

## 音叉結構振動分析與模型驗證

\*王栢村<sup>1</sup>、蔡文俊<sup>1</sup>、王星盛<sup>1</sup>、徐詩瑜<sup>1</sup>、吳盈輝<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立屏東科技大學機械工程系

<sup>2</sup> 國立內埔高級農工職業學校 機械科

\*Email: [wangbt@mail.npust.edu.tw](mailto:wangbt@mail.npust.edu.tw)

### 摘要

音叉在醫療上與樂器的校正中被廣泛應用，其結構之幾何形狀與材料參數為影響振動特性的重要參數。本文主要針對基音頻率為 440Hz 的音叉，分別透過有限元素分析(Finite Element Analysis, FEA)以及實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA)進行音叉結構的模型驗證。首先利用電腦輔助工程分析(Computer-aided Engineering, CAE)軟體建構音叉之有限元素模型，分別進行模態分析求得理論模態參數，包含自然頻率與模態振型，以及簡諧響應分析，獲得頻率響應函數。同時透過 EMA 量測音叉結構之實驗模態參數，包含自然頻率、模態振型以及模態阻尼比，並將實驗與分析進行比對驗證。結果顯示有限元素分析與實驗之模態參數，有相互對應，可確認音叉結構分析模型與實際結構具有等效性，證明此次實驗可靠度高。本文所提出之實驗流程與分析方法，未來可應用於其他打擊樂器進行研究與開發設計。

**關鍵字：**音叉、振動分析、模型驗證、有限元素分析、實驗模態分析

### 1. 前言

音叉是一種兩端分叉，末有一柄的打擊樂器，其幾何形狀類似英文字母 U，主要被用在醫療、調音以及校正儀器等領域。音叉主要的發聲與音高在於兩根分叉，其長度對音高會造成極大影響。

針對不同結構，探討模型驗證基本流程及手法，王與張[1]透過同為打擊樂器的石磬與鐵磬，說明了如何驗證、實驗，此篇分別進行了有限元素分析與實驗模態分析，最終得出結果誤差百分比約為 4%，初步評估認為是加工造成的誤差。王等人[2]分析兩刷結構，同樣透過有限元素分析與實驗模態分析進行對比，最終對比結果自然頻率雖說誤差稍大，約在 6%，但在模態上有著明顯的對應，說明實驗的品質可靠。

有限元素分析的步驟與技巧，王等人[3]，分析了結構與音叉相似的自行車前叉，使用線性立方體(Solid45)建立模型，並使用 FreeMesh 進行元素分割，成功進行分析。因結構複雜，Guan *et al.*[4]在建構有限元素模型時，為了減少有限元素模型建立的時間，故使用 Aveva Marine 先匯出模型再經由轉檔匯入軟

體並進行分析。王等人[5]說明了在有限元素分析中在做模態分析時無須設定負荷條件即可進行。Knezev *et al.*[6]使用了 ANSYS APDL 對高速電機轉軸進行有限元素分析，且簡化了螺紋孔、圓角、倒角，針對該部分文中指出此簡化對分析結果並沒有影響。

透過實驗模態分析能夠求得實驗之模態參數，進而與理論之模態參數進行比對，達到模型驗證的目的。王等人[5]主要針對五種市售兩刷彈片進行模型驗證，在後處部分，以曲線嵌合軟體 ME'scope VES 擷取每隻兩刷彈片之模態參數，最後再將理論、實驗模態參數進行比對，以確認分析模型等效於實際結構。Watkins *et al.*[8]對一塊等向性平板，使用 Rayleigh-Ritz 法和 COMSOL 有限元素分析法，運用 ME'Scope VES 匯整頻率響應函數，由頻率峰值得知自然頻率與模態振型，並與實驗模態分析求得之模態參數進行比對，確定了前八個模態自然頻率與模態振型有相對應。Meera Saheb *et al.*[9]針對在四個角落裝有不鏽鋼彈簧的矩形鋁板進行模型驗證，為了使理論與實驗模態參數有相對應，首先，將實驗模態分析所求得之頻率匯入 ME'scope VES 中，再與有限元素分析之模態參數相互驗證。Lin *et al.* [10]為了解決加工時的切削顫振，使用實驗模態分析的手法，將頻率響應函數透過 ME'scope VES 進行匯整，成功找到主要變形之頻率。

本文旨在對音叉結構進行模型驗證，針對理論與實驗的模態參數進行比對，確認分析模型能夠等效於實際結構，也就是模態參數彼此吻合，未來也可以針對音叉聲音特性的主題進行探討，並應用於音叉的聲場分析與設計。

### 2. 音叉之模型驗證方法與理念

進行振動分析前，為了獲得準確的分析結果，需要確認分析模型是否等效於實際結構，使分析結果更貼近於實際結構；因此，進行模型驗證是必要的過程之一。

圖 1 為音叉模型驗證流程圖，模型驗證包含有限元素分析與實驗模態分析，有限元素分析會求得理論模態參數，包括自然頻率、模態振型，而實驗模態分析會求得實驗模態參數，包括自然頻率、模態振型、模態阻尼比。最終會比對 FEA 與 EMA 的自然頻率、模態振型、頻率響應函數(Frequency Response Function,

FRF)，若模態參數相互符合，就代表成功驗證模型與實際結構相似，若不符合，則需要進一步修正模型，直至結果相符為止。

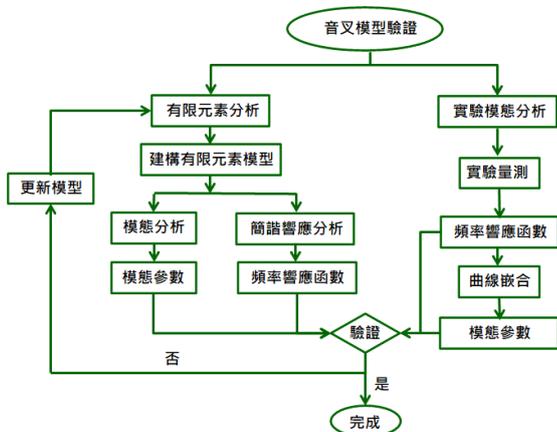


圖 1 模型驗證流程圖

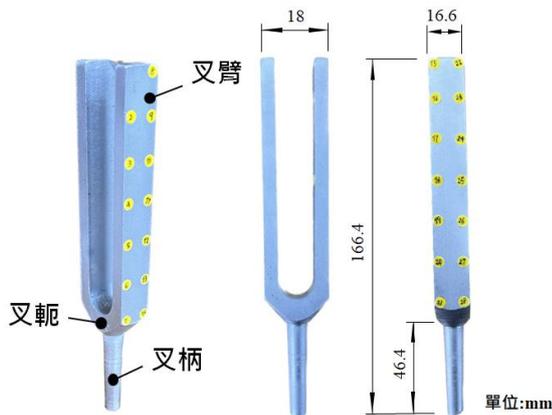


圖 2 音叉實體結構圖

### 3. 有限元素分析

為了設計開發或模擬製造的過程，得知結構理論的自然頻率、模態振型是非常重要的環，而本節將介紹有限元素分析的方法與流程。

圖 2 為 A6 音階音叉的實體結構，為一支基音頻率為 440Hz 的 C 列音叉，是由叉臂、叉軛、叉柄所組成。透過測量音叉的實體結構，得到其幾何尺寸為長度 166.4 mm、寬度 30.9 mm、厚度 16.1 mm、高度 46.4 mm。接著，使用電腦輔助製圖軟體繪製音叉模型，再利用 CAE 建構有限元素模型。圖 3 為音叉結構之有限元素模型圖，該模型使用密度  $\rho=7940 \text{ kg/m}^3$ ，楊氏係數  $E=187 \text{ GPa}$ ，蒲松比  $\nu=0.27$  來建構等向性材料有限元素模型，元素形式採用二次線性立方體(solid 186)，元素分割以 Free mesh 進行，元素大小針對前五個自然頻率，使用不同之元素大小進行收斂性分析後，最終得到大小為 5 mm，共切割 1970 個元素與 4011 個節點，位移限制為模擬自由邊界，負荷在模態分析時無須設定，為了求得頻率響應函數，

施加作用力於端點簡諧響應分析，並與實驗模態分析之結果進行比對。

### 4. 實驗模態分析

本節將會介紹實驗模態分析的方法和流程。在實驗模態分析之前，需對於音叉結構進行佈點規劃，圖 4 (a)為音叉結構之量測點示意圖，共規劃 35 個量測點。為了避免規劃的量測點在節點上，透過有限元素分析的模態分析結果，取得有限元素模型的模態振型為基礎，並規劃適當的量測點位，避開音叉結構的節點，才能有效的激發出頻率響應，並取得與實際結構相符的良好的模態參數，假如敲擊點位在節點上，可能會發生無法取得模態振型的狀況。

圖 4 (b)為音叉結構之量測敲擊點示意圖，由於單軸向敲擊只能取得該方向的振幅，為了使得模態更符合實際的結構，故分別對音叉結構施予 X 與 Z 方向作用力。圖 5 為音叉實驗模態分析儀器架設圖，透過棉線懸吊 C 列音叉模擬自由邊界。將加速規黏貼於 1 號點，麥克風對準 22 號點，以中型衝擊錘為驅動器，精密麥克風與單軸向加速規作為感測器。本次實驗採用固定加速規，移動衝擊錘的手段進行量測，透過麥克風與加速規，獲取時間域的響應，透過頻譜分析儀於振動噪音量測軟體 (Sound and Vibration Measurement System, SVM) 進行快速傅立葉轉換 (FFT)，取得頻率響應函數。圖 6 為振動噪音量測軟體(SVM)，軟體分析設定如下，量測頻寬為 10000 Hz、解析係數為 12800、頻率解析度為 0.78 Hz，每個點位敲擊 3 次，並取其平均值。

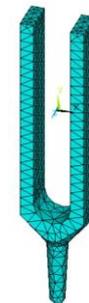
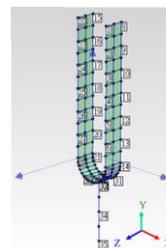
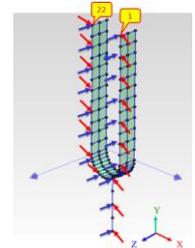


圖 3 音叉結構之有限元素模型圖



(a)量測點示意圖



(b)敲擊點示意圖

圖 4. 音叉結構之量測規劃與敲擊方向示意圖



圖 5 音叉實驗模態分析儀器架設圖

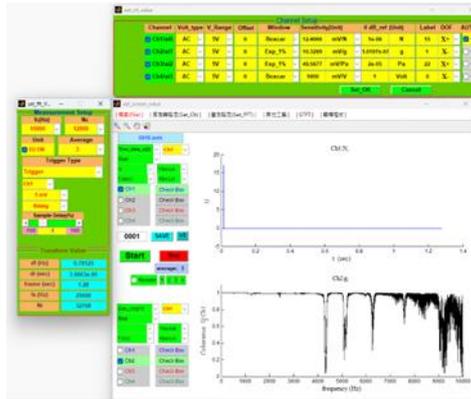


圖 6 振動噪音量測軟體(SVM)

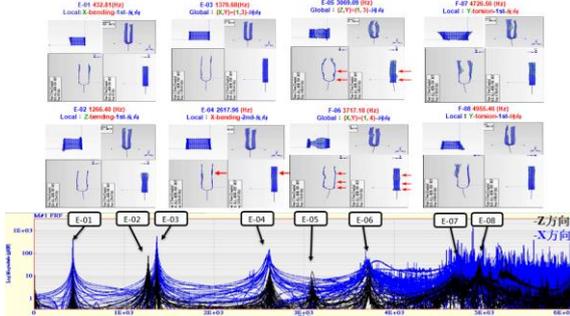


圖 7 音叉結構之實驗頻率響應函數與模態參數對應圖

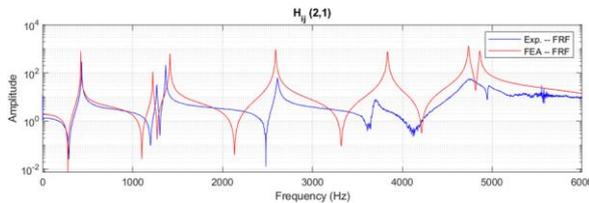


圖 8 音叉結構之實驗與分析頻率響應函數

### 5. 結果與討論

表 1 為 FEA 自然頻率與模態振型及物理意義總表，可以觀察到模態主要的物理意義有局部模態稱 Local mode 與全域模態稱 Global mode，局部模態指的是結構振動的範圍，主要在於叉臂的部分，全域模態則不只有叉臂，結構振動的範圍是整體音叉；其中，

物理意義的擺動姿態分為彎曲模態 Bending mode 與扭轉模態 Torsion mode 兩種特徵。Bending mode 的擺動姿態如懸臂樑一般，其模態的特徵為，沿著軸向進行擺動，Torsion mode 的模態的特徵為扭轉擺動，根據叉臂擺動或旋轉的方向，區分成同向和反向。

圖 7 為音叉結構之實驗頻率響應函數與模態參數對應圖，藍線與黑線分別代表 X 和 Z 方向。由於音叉主要的振動特徵是在 X 方向，所以 Z 方向的振動大多較不明顯，這部分也能從音叉的振動模態上觀察到。

圖 8 音叉結構之實驗與分析頻率響應函數，透過實驗與理論的頻率響應函數曲線特徵中，可以觀察到第一個峰值比對吻合，驗證了基音頻率有明顯得對應，表示實驗與理論分析兩者結果呼應，說明了實驗品質可靠性，其餘沒對應的峰值，推測可能為叉軛部分有微小差異所造成。

表 2 為分析與實驗自然頻率對照總表，可以觀察到模態保證指標(Modal Assurance Criterion, MAC)，第 5 個模態主要擺動方向為 Z 軸，故 MAC 結果數值較趨近 0，表示兩個向量是正交，而其餘結果皆大於 0.5 且模態振型類似，代表兩個向量平行，而 Z 方向同理，為此可證明理論與實驗之振動模態，對應良好並具有等效性。

表 3 為理論與實驗自然頻率對照總表，將理論與實驗獲得的頻率響應函數，進行比對，其中，F-7 的模態振型頻率誤差最低，其頻率誤差值百分比約為 0.23%；F-5 頻率誤差值最大，相差約 22.79%，由結果可以得知，理論與實驗之自然頻率總體誤差平均在 4% 以下，由此也可得知此驗證方法的可行性。為了方便區別物理意義的差異，因此以不同顏色來代表。黃色為 Local 模態中，X 軸向 Bending 模態；藍色為 Local 模態中，Torsion 模態；紅色為 Local 模態中，Z 軸向 Bending 模態；橙色為 Global 模態中，XY 軸向 Bending 模態；青色為 Global 模態中，ZY 軸向 Bending 模態。

至於造成第 5 個模態誤差較大的原因，初步推測此較大誤差原因，由於此模態是 Global Bending 模態，推論是來自音叉又軛的不規則形狀，在分析的幾何模型，仍有些微的差異，其 FEA 的自然頻率也會比 EMA 來的高，同時也說明了 F-5 自然頻率大於 E-5 之原因。

表 1 FEA 自然頻率與模態振型及物理意義總表

模態	自然頻率 (Hz)	物理意義	模態振型
F-01	425.67	Local X-bending-1 <sup>st</sup> 反向	

表 1 FEA 自然頻率與模態振型及物理意義總表(續)

F-02	1226.12	Local Z-bending-1 <sup>st</sup> 反向	
F-03	1416.54	Global (X,Y)=(1,3) 同向	
F-04	2593.16	Local X-bending-2 <sup>nd</sup> 反向	
F-05	3801.94	Global (Z,Y)=(1,3) 同向	
F-06	3837.09	Global (X,Y)=(1,4) 同向	
F-07	4737.61	Local Y-torsion-1 <sup>st</sup> 反向	
F-08	4862.65	Local Y-torsion-1 <sup>st</sup> 同向	
F-09	6999.74	Local X-bending-3 <sup>rd</sup> 反向	
F-10	7255.25	Global (Z,Y)=(1,4) 同向	
F-11	7282.62	Local 柄部 X-bending 1 <sup>st</sup>	
F-12	7505.65	Global Y-torsion-1 <sup>st</sup> 同向	
F-13	8405.67	Local X-bending-4 <sup>th</sup> 同向	
F-14	12941.71	Global (X,Y)=(1,5) 反向	

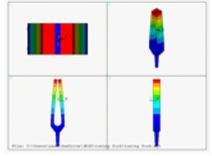
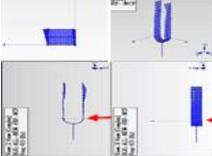
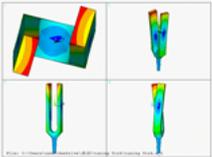
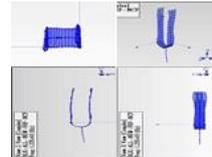
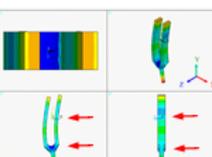
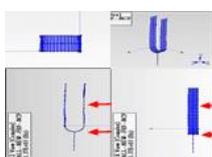
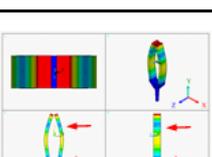
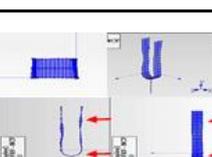
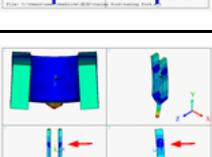
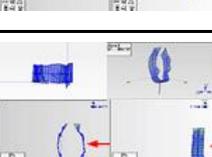
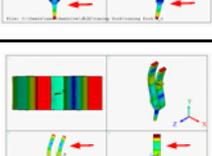
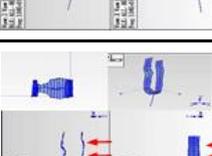
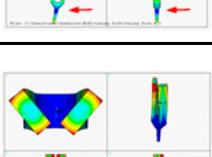
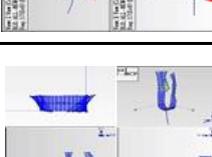
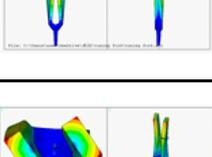
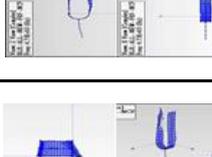
表 1 FEA 自然頻率與模態振型及物理意義總表(續)

F-15	13010.81	Global (Z,Y)=(1,5) 同向	
F-16	14116.62	Local Y-torsion-2 <sup>nd</sup> 同向	
F-17	14266.05	Local Y-torsion-2 <sup>nd</sup> 反向	
F-18	14680.55	Global (X,Y)=(1,6) 反向	

表 2 分析與實驗自然頻率對照總表

FEA			EMA			誤差	阻尼
模態	自然頻 率(Hz)	物理意義	模態	自然頻 率(Hz)	物理意義	(%)	(%)
						AVG	AVG
						3.94	0.12
						RMS	RMS
8.13	0.19						
F-1	425.67	LocalX bending-1 <sup>st</sup> 反向	E-1	432.81	LocalX bending-1 <sup>st</sup> 反向	-1.65	0.22
F-2	1226.12	LocalZ- bending-1 <sup>st</sup> 反向	E-2	1266.4	LocalZ- bending-1 <sup>st</sup> 反向	-3.12	0.17
F-3	1416.54	Global (X,Y)=(1,3) 同向	E-3	1379.68	Global (X,Y)=(1,3) 同向	2.64	0.14
F-4	2593.16	LocalX- bending- 2 <sup>nd</sup> 反向	E-4	2617.96	LocalX- bending- 2 <sup>nd</sup> 反向	-0.94	0.29
F-5	3801.94	Global (Z,Y)=(1,3) 同向	E-5	3096.09	Global (Z,Y)=(1,3) 同向	22.79	0.29
F-6	3837.09	Global (X,Y)=(1,4) 同向	E-6	3717.18	Global (X,Y)=(1,4) 同向	3.22	0.16
F-7	4737.61	LocalY- torsion-1 <sup>st</sup> 反向	E-7	4726.56	LocalY- torsion-1 <sup>st</sup> 反向	0.23	0.45
F-8	4862.65	LocalY- torsion-1 <sup>st</sup> 同向	E-8	4955.46	LocalY- torsion-1 <sup>st</sup> 同向	-1.87	0.45

表 3 理論與分析之模態振型對照表

模態	FEA 模態振型	EMA 模態振型	物理意義	MAC X 方向	MAC Z 方向
1			Local X-bending-1 <sup>st</sup> 反向	0.93	--
2			Local Z-bending-1 <sup>st</sup> 反向	0.70	0.91
3			Global (X,Y)=(1,3) 同向	0.80	--
4			Local X-bending-2 <sup>nd</sup> 反向	0.73	--
5			Global (Z,Y)=(1,3)同向	0.11	0.8
6			Global (X,Y)=(1,4)同向	0.64	--
7			Local Y-torsion-1 <sup>st</sup> 反向	0.35	--
8			Local Y-torsion-1 <sup>st</sup> 同向	0.53	0.52

## 6. 結論

本文針對 A6 音階音叉，進行模型驗證，分別透過有限元素分析與實驗模態分析，獲得理論與實驗模態參數，進行比對驗證，來確認分析模型等效於實際結構，其相關結論如下：

- (1) 比對理論與實驗之模態分析的結果，驗證了模態振型對應良好，除了 F-05 模態頻率誤差為 22.79%，其餘頻率誤差百分比皆低於 3.94%，推測誤差較大因素可能為，音叉主要剛性集中在叉軛所造成的影響，本文使用的模型叉軛與幾何形狀有部分差異，未來可以將模型更新，以更符合實際結構。
- (2) 音叉模態振型比對 8 個模態，其 MAC 比對結果具有合理的對應，驗證分析模型等效於實際結構，未來可以將結構應用於音場分析。
- (3) 本文建立了模型驗證之方法與流程，未來可以針對不同音高的音叉，以便製造或設計。

## 7. 參考文獻

1. 王栢村、張宏名，鐵磬之模型驗證與聲音特性探討，第四屆海峽兩岸動力學、振動學與控制學術會議，高雄，論文編號：D-02，2015。
2. 王栢村、謝宗廷、曾國睿，自行車前叉之模型驗證與彎曲試驗模擬分析，中華民國第十五屆車輛工程學術，2010
3. 王栢村、胡詠翔、周冠程、黃鈺展、黃智群、張明仁，複合型兩刷結構之模型驗證及接觸力分析，中華民國力學學會第三十九屆全國力學會議，台北，論文編號:1295，2015
4. 王栢村、余冠德，2014，古鈸之模型驗證與聲音特性探討，中國機工程學會第三十一屆全國學術研討會，台中市，論文編號:03188。
5. 王栢村、陳俊偉、胡詠翔、吳盈輝，兩刷彈片之模型驗證與材料參數校正，精密機械與製造科技研討會，屏東，論文編號：A032，2016。
6. M. Knezev, A. Zivković, M. Zeljković, C. Mladenović, Numerical and experimental modal analysis of high speed. SPINDLE, IETI Transactions on Engineering Research and Practice, vol. 2, No. 2, pp. 27-33, 2018
7. P. C. Guan, O. L. Kwok, W. C. Yao, Y. F. Chen, J. S. Li, Y. L. Chen, L. C. Chen, H. H. Chou, The development of a transformation interface program between Aveva Marine database and finite element method, Journal of Taiwan Society of Naval Architects and Marine Engineers, vol. 36, No. 4, pp. 179 - 188, 2017
8. R. J. Watkins, S. Santillan, J. Radice, O. Barton Jr, Vibration response of an elastically point-supported plate with attached masses, Thin-Walled Structures, Vol. 48, No. 07, pp. 519-527
9. K. Meera Saheb, S. Deepak, Free vibration analysis of a laminated composite plate using experimental

modal testing, Materials Today: Proceedings, Vol. 72, No. 03, pp. 1573-1583

10. S. H. Lin, M. R. Song, Investigation of Modal Characteristics and Milling Dynamics for a Machine-Tool System, Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers, vol. 42, No. 6, pp. 561 - 569, 2021

## Vibration Analysis and Model Verification of Tuning Fork Structure

\*Bor-Tsuen Wang<sup>1</sup>, Wen-Chun Tsai<sup>1</sup>, Xing-Sheng Wang<sup>1</sup>, Shih-Yu Hsh<sup>1</sup>, Ying-Hui Wu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering,  
National Pingtung University of Science and  
Technology

<sup>2</sup> Machinery Division, National Nei-Pu Senior  
Agricultural Industrial Vocational School

\*Email:[wangbt@mail.npust.edu.tw](mailto:wangbt@mail.npust.edu.tw)

### Abstract

Tuning forks are widely used in medical treatment and calibration of musical instruments, and the geometry and material parameters of their structures are important parameters that affect vibration characteristics. This paper mainly focuses on the tuning fork with a pitch frequency of 440 Hz, and conducts model verification of the tuning fork structure through Finite Element Analysis (FEA) and Experimental Modal Analysis (EMA). Firstly, the finite element model of the tuning fork is constructed using computer-aided engineering (CAE) software, and the modal analysis is carried out to obtain the theoretical modal parameters, including natural frequency and mode shape, and harmonic response analysis is to obtain frequency response function. At the same time, the experimental modal parameters of the tuning fork structure are measured by EMA, including natural frequency, mode shape and modal damping ratio, and the experiment and analysis are compared and verified. Results show that the modal parameters of the finite element analysis and the experiment correspond to each other, which confirms that the analysis model of the tuning fork structure is equivalent to the actual structure and proves that the experiment is highly reliable. The experimental process and analysis method proposed in this paper can be applied to other percussion instruments for research, development and design in the future.

**Keywords** : Tuning fork, vibration analysis, model verification, finite element analysis (FEA), experimental modal analysis (EMA)