

具缺陷懸臂樑之自由振動有限元素分析

方孟隆 陳坤華 陳秀蜜

指導老師:王柏村

國立屏東科技大學

機械工程技術系

摘要

本篇報告主旨係在討論具缺陷懸臂樑之自由振動分析,以 ANSYS 5.0 軟體分析具缺陷懸臂樑受到振動後之 ω_n 、 ϕ_n 。做完收斂性分析之後,將其結果做一比較,再以最適當的元素針對缺陷位置,深度及寬度的分析。將其結果比較 ω_n 、 ϕ_n ,並比較不同缺陷位置、深度及寬度的振型,從自然頻率及振型的變化可預測缺陷存在的位置

一.引言

近來工業科技發達,各種工件日益複雜,檢驗工件(產品)的方式也因應而生。X光、超音波...等。欲瞭解工件缺陷之動態特性,利用有限元素分析亦是目前被廣泛運用的一種方法採用有限元素分析,可針對產品的需要,隨時改變結構的外形、尺寸及邊界條件進行分析,可避免實驗方法之費時、成本、邊界條件控制不易之缺點對於複雜形狀無法以理論分析求解時亦可使用有限元素收斂性分析求出精確解。

本文即以有限元素分析的方法,利用 ANSYS 5.0 軟體為求解工具,作懸臂樑的自由振動分析,求取懸臂樑的自然頻率及振型,進而分析具缺陷懸臂樑之自然頻率及振型並與 Euler-Bernoulli beam 之理論作比較。過程中採用 Beam 3、Plane 42、shell 63 三種不同元

素形態,並且運用 Subspace method 模式求取懸臂樑的自然頻率及振型,並與以

Euler-Bernoulli beam 理論為基礎所得之數值解作比較。就元素種類比較, BEAM 3 所得結果與理論解最吻合, PLANE 42 次之,而 PLANE 42 誤差,此乃因理論解忽略剪力變形及旋轉慣性的效應,故 PLANE 42 適合使用於考慮剪力變形及旋轉慣性效應的自由振動分析。本文所分析的結果,未來可運用至其他更複雜的分析上。

二.理論分析

討論具缺陷懸臂樑之前先分析不具缺陷懸臂樑,並與理論解比較。以 ANSYS 5.0 軟體分析之前,必需對問題定義,並架構模型。

取一傳統樑長 1m,寬 0.2m、厚度 0.02m 分析。討論具缺陷時,將樑取寬度 0.02m,深度 0.08m,位置 0.4m 的地方分析。

(一) 實體模型描述 (physical model description)

欲求取一懸臂樑之自然頻率及振型,其長為 1m,寬為 0.2m,厚度為 0.02m,缺陷寬度 0.02m,深度 0.08m,位置 0.4m,幾何形狀如圖一所示,其物理性質如表一。

(二) 數學模式描述 (physical model description)

假設忽略力變形(Shear deformation)及轉動慣量(Rotation Inertia)的效應,則懸臂樑運動方程式為:

懸臂樑運動方程式為:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其邊界條件為:

$$y(0) = \frac{\partial y(0)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(L)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y(L)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3)$$

利用分離變數法,令 $y(x,t) = \phi(x)q(t)$ 代入運動方程式,化簡得:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \right) q(t) + \rho A \frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} \phi(x) = 0$$

(4)

得式聯程代入(4)式,得 4 個聯立方程式,求解後得:

$$-1 + \cos \alpha L \cosh \alpha L = 0 \quad (5)$$

式為特徵方程式,可由數值方法求得特徵值解 α_n ($n=1,2,\dots$)。

故自然頻率為:

$$\omega_n = (\alpha_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6)$$

振型(mode shape)為:

$$c_n [\sin \alpha x - \sinh \alpha x - D_n (\cos \alpha x - \cosh \alpha x)] \quad (7)$$

其中

$$c_n = -A_2 \frac{\cos \alpha_n L + \cosh \alpha_n L}{\sin \alpha_n L + \sinh \alpha_n L} \quad (8)$$

$$D_n = \frac{\sin \alpha_n L + \sinh \alpha_n L}{\cos \alpha_n L + \cosh \alpha_n L} \quad (9)$$

三. 有限元素模型

本文選用三種元素 BEAM 3 PLANE 42 SHELL 63,四種模型,具單邊缺陷樑 BEAM 3

模型分割如圖二,具單邊缺陷 PLANE 42 模型分割如圖三,具單邊缺陷 SHELL 63 模型分割如圖四,具雙邊缺陷 SHELL 63 模型分割如圖五,有限元素模型的建立首先須架構其幾何模型,包括元素形態之選擇、自由度之選擇、實際常數之設定、材料性質之設定等,再進一步設定適當的邊界條件,如位移限制及受力情形等。以下就幾何模型及邊界條件說明懸臂樑在 ANSYS 5.0 軟體之有限元素模型。

1. 幾何模型

表二至表三詳細顯示出懸臂樑的幾何模型資料。表二顯示 BEAM 3 元素有 2 個節點,每個節點有 3 個自由度 UX,UY,ROTZ。PLANE42 元素有 4 個節點,2 個自由度 UX,UY。SHELL63 元素有 4 個節點,6 個自由度 UX,UY,UZ,ROTX,ROTY,ROTZ。表三顯示出材料性質與實際常數(Real Constant)。材料性質設定了楊氏係數(EX),密度(DENS)。實際常數設定面積(A),慣性矩(I),厚度(t)。軟體之設定方式如附錄。圖二顯示出有限元素模型的分割情形。

2. 邊界條件

本文所使用的分析方法為 ANSYS 5.0 軟體中的模態(Modal)分析,故邊界條件僅須設定位移限制,而不須設定任何位移或力量負載。因懸臂樑其一端須固定,而另一端為自由端,故須拘束固定端的節點之所有方向的自由度。

四. 結果與討論

(一) 收斂性分析

本文利用 ANSYS5.0 軟體來模擬具缺陷懸臂樑的自由振動之有限元素分析。過程中採用 BEAM3、PLANE42、SHELL63 三種元素形式來探討。而眾所皆知將元素分割的愈精細,所得的精確度也愈好,但相對的所需耗費的求解時間也愈長,因此基於經濟效益及

精確度兩者要兼顧的情況下，有必要做收斂性分析。分析時固定懸臂樑長度=1m，懸臂樑寬度=0.2m，懸臂樑厚度=0.02m，缺陷位置=0.4m，缺陷寬度=0.02m，缺陷深度=0.08m 利用三種元素來做分析，取前四個自然頻率做比較其收斂性分析，只要所作的細模型比上前次模型的誤差在 5 %之內，則所做的分割就可被接受亦即已經達到收斂。

1 BEAM3 元素之收斂性分析

由表四及表八可以看出，在分割為 5 個節點時與 12 個節點之間的誤差在 w_1 ~ w_3 時已經在 5%之內，但在 w_4 時卻出現 15%的誤差，為了使四個自然頻率都保持在 5%的誤差之內，所以我們須做更細的分割。在 12 個節點與 26 個節點做比較時，四個自然頻率的誤差都已經保持在 5%之內，所以我們可以說它已經趨近收斂。因為 BEAM3 元素在用軟體求解時給定的參考依據及求解過程都跟傳統樑一模一樣，所以 node 數增加時 ω_n 值並沒有太大的變化，而在時間上由於 node 數沒有很多所以大致沒有什麼變化，因此暫不考慮時間問題。

2 PLANE42 元素之收斂性分析

由表五及表九可看出元素分割的愈細所得的結果愈接近收斂，到 165 個節點與 215 個節點做比較時，四個自然頻率的誤差都保持在 5%之內，所以可見在 215 個節點時已達收斂，所以取 215 這一組來做為以下的分析。

3 SHELL63 單邊缺陷之收斂性分析

由表六及表十一可看出 node 數愈增加所得的結果愈趨近於收斂，至 133 個 node 時四個自然頻率的誤差都保持在 5%之內，所以已收斂，原本取這一組來做下列分析即可，但因為以下還要做振型的比較，為了振型曲線的平滑及缺陷部分的細分割，所以選擇 359 個節點這一組來做以下的分析。

4 SHELL63 雙邊缺陷之收斂性分析

由表七及表十一同樣可看出 node 數愈增加所得的結果愈趨近於收斂，至 147 個 node 時四個自然頻率的誤差都保持在 5%之內，因此已趨於收斂，此時除了以上的考

量之外還要注意到它有兩個缺陷的問題，所以需要細分割地方更多，所以取的 node 數要比單缺陷多，因此基於精確性的考量，採用 535 這一組做為後面的分析。

*表中的 140/90 為 $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega} \times 100$ 依此類推。

(二) 無缺陷自然頻率與振型分析比較

1 無缺陷自然頻率分析比較

圖二十八為 BEAM 3，PLANE42，SHELL63 三種不同元素形態所得自然頻率與理論解之誤差值比較。由圖可看出：

- a BEAM 3 的第一個 mode 的自然頻率與理論值完全相等，第二~四個 mode 則有些許誤差，但最大不超過 0.25%故 BEAM3 的分析結果和 Euler-Bernoulli 理論相當吻合，此乃因 BEAM3 元素使用 Euler-Bernoulli beam 理論之假設，顯示出本及的分析相當的正確，讓本文往後的分析具信心。
- b Plane42 第一個 mode 自然頻率的誤差最小，第二~四個 mode 誤差較大，但最大為 2.97%，此乃因 plane42 於厚度方向分割成四層，求解時自動包含了剪力變形(shear deformation)及旋轉慣性(Rotary inertia)的效應，因此與 Euler-Bernoulli beam 理論解忽略此等應所得的結果略有不同。若欲進一步探討剪力變形及旋轉慣性對自然頻率與振型之影響，在建立懸臂樑有限元素模型時，應於厚度方向作細分割，以求得較精確之解，而本文並未深入探討剪力變形及旋轉慣性之效應。
- c Shell 63 自然頻率誤差和 Plane42 較相近但誤差不超過 2.24%以 Shell63 分析，可得到轉矩模式(Torsion mode)。

2 無缺陷振型分析比較

由 ANSYS 5.0 軟體之 Beam3，Plane42 及 Shell 63 元素所得之振型比較，如圖二十九~三十二，三種元素的振型幾乎是一樣也

和理論相符。由圖中可看出 plane 42 和 shell63 相當吻合，而 Beam 3 的振型及節點 (node point) 的位置卻有些許誤差，乃因 Beam 3 忽略剪力變形 (Shear deformation) 及旋轉慣性 (Rotary inertia)

(三) 有缺陷自然頻率與振型分析比較

1 有缺陷自然頻率分析比較

圖三十三為三種分析具缺陷樑之自然頻率和理論解的誤差百分比，由圖中可看出 Beam3 和理論解較相近，最小為 0.002% 但最大誤差不超過 0.5%，同樣的具缺陷的分析 plane42 和 shell63 較相近，誤差同樣不超過 1%，由圖中亦可看出，單一缺陷和雙缺陷的最大差異在 ω_1 ，而 ω_2 及 ω_3 、 ω_4 幾乎沒什麼差異，所以若要分單一缺陷或多的缺陷可從 ω_1 著手。

2 具缺陷樑振型分析比較

圖三十四~三十七為 plane42、SC Shell63 DC Shell63 與 beam3 分析具缺陷樑四種振型比較，四種振型幾乎是一樣，顯示缺陷對振型並無多大的影響，由其是單一缺陷和雙缺陷所得的振型幾乎是一樣，顯示缺陷的多少對振型並無影響，圖中 beam3 的振型及節點 (node point) 的位置和其它三者稍有誤差乃因 beam3 忽略了剪力變形 (shear deformation) 及旋轉慣性 (rotary inertia)

*SC Shell 63 (Signal Crack Shell 63) 為單缺陷 Shell 63 元素分析。DC Shell (Double Crack Shell 63) 為雙缺陷 Shell 63 元素分析。

五. 結論

為了分析缺陷對自然頻率與振型的影響，從元素選擇開始我們做了收斂性分析由結果可知 1. beam3 元素取的節點數很少就可

以趨於收斂因 beam3 為樑元素，每個元素只有兩個節點，而平面元素 (plane42) 與薄殼元素 (shell63) 都有四個節點因此分割出的節點數會較多。2. shell63 因為比 plane42 多考慮厚度問題所以趨近於收斂的節點數最多。3. 經收斂性分析可確保本文在較短時間得到合理的結果。而在第二部份時我們做三種元素四種模型來比較與理論的差異，找出 BEAM、PLANE、SHELL 三種元素在做自由振動分析時的特性，我們可得到自然頻率 ω_2 、 ω_3 差異不太，可利用 ω_1 、 ω_4 求出缺陷的影響；振型的分析得到 Beam 3 元素的振型，及節點位置和 plane 42 及 shell 63 有所不同，於是我們可拿 shell 63 元素做缺陷位置、寬度及長度對振型的影響。再來我們決定使用 SHELL 元素來做具缺陷懸臂樑的自由振動分析

六. 參考文獻

1. 王柏村，「振動學」，全華圖書，1997。
2. Ewins, D.J. Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press Ltd., 1984。
3. Meirovitch, L., Elements of Vibration Analysis, 2nd ED., McGraw-Hill Book Company, 1986。
4. Swanson Analysis Systems Inc. ANSYS User's Manual, Vol. 1-3, 1990。
5. Rao, S.S., Mechanical Vibrations, 2nd ED., Addison wesley Publish Company, 1990。
6. ELIAHU ZAHZVI, The finite element method in machine design., prentice-Hall Intermation Editions。

Finite Element Analysis of Free Vibration of
Cantilever with crack beam

Student : Mon-Long Fang

Kun-Hwa Chen

Shu-Mie Chen

Nation Pingtung University of Science Technology

ABSTRACT

This report presents the finite element analysis for the free vibration of cantilever with crack beam using ANSYS 5.0, finite element application software. By Plane 42 , Beam 3 and Shell 63 element in ANSYS to analyze the cantilever beam with vibration to get natural frequencies and mode shapes , compare them . Then analyze the crack with different location 、 deep and width .

表一 懸臂樑之材料性質

材料	鋼
長度(L)	0.3m
寬度(b)	0.04m
厚度(h)	0.002m
密度(ρ)	7870kg/m ²
楊氏係數(E)	207 × 10 ⁹ N/m ²

表二 三種元素形態之節點及自由度

元素形態	節點數	自由度
BEAM3	2	UX,UY,ROTZ
PLANE42	4	UX,UY
SHELL63	4	UX,UY,UZ ROTX,ROTY,ROTZ

表三 三種不同元素形態之材料性質與實際常數

	BEAM3	PLANE42	SHELL63
材料性質	A=8E-5 I=2.667E-11 h=0.002		h=0.002
實際常數	EX=207E9 Dens=7870	EX=207E9 Dens=7870	EX=207E9 Dens=7870

表四 BEAM3 元素所求得的 ω_n

ω_n 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	求解時間(s)
5	16.490	103.92	298.21	671.41	11.11
12	16.489	103.64	290.11	567.87	16.31
26	16.489	103.64	290.06	567.90	16.45
31	16.489	103.64	290.05	567.87	16.98
38	16.489	103.64	290.50	567.85	17.00

表五 PLANE42 元素所求得的 ω_n

ω_n 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	求解時間(s)
90	17.013	109.37	326.53	711.33	11.50
140	16.943	106.93	303.99	620.10	13.19
165	16.547	104.34	294.55	585.21	13.43
215	16.527	103.97	291.89	574.75	14.06
290	16.516	103.79	290.61	569.30	15.10

表六 SHELL63 單缺陷所求得的 ω_n

ω_n 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	求解時間(s)
15	16.423	101.33	305.10	659.46	15.65
61	16.248	101.00	290.97	599.16	21.91
133	16.176	100.47	285.67	558.67	22.60
186	16.156	100.28	285.06	556.68	23.61
234	16.153	100.24	285.05	555.87	24.54
359	16.374	101.95	288.43	566.7	25.99
441	16.136	100.05	284.47	554.17	27.45

表七 SHELL63 雙缺陷所求得的 ω_n

ω_n 點節數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	求解時間(s)
23	16.71	106.15	331.26	682.09	17.54
87	16.702	105.4	304.61	623.92	18.90
147	16.584	103.96	293.69	583.00	38.65
249	16.559	103.65	292.47	577.77	39.10
400	16.547	103.5	291.85	576.58	40.12
535	16.541	103.42	291.51	575.32	41.45
666	16.537	103.39	291.41	575.12	45.58

表八 BEAM3 元素的 ω_n 之誤差(%)

ω_n / 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
12/5	6.1e-3	0.269	2.716	15.421
26/12	0	0	0.0172	5.3e-3
31/26	0	0	1.2e-5	5.3e-3
38/31	0	0	0.115	3.5e-3

表九 PLANE42 元素的 ω_n 之誤差(%)

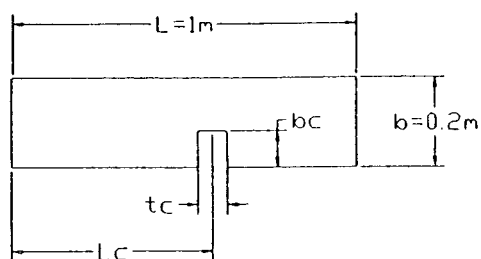
ω_n / 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
140/90	0.4115	2.231	6.903	14.23
165/140	2.337	2.422	3.105	5.627
215/165	0.067	0.173	0.440	0.899
290/215	0.121	0.356	0.911	1.820

表十 SHELL63 單缺陷的 ω_n 之誤差(%)

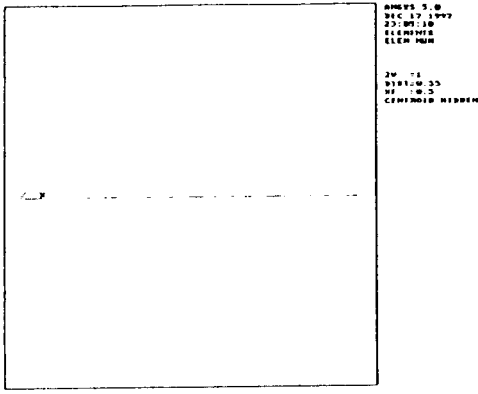
ω_n / 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
61/15	1.066	0.326	4.631	9.144
133/61	0.443	0.525	1.821	6.758
186/133	0.124	0.189	0.214	0.356
243/186	0.019	4.0e-3	3.5e-3	0.146
359/243	1.369	1.706	1.186	1.948
441/359	1.45	1.863	1.373	2.211

表十一 SHELL63 雙缺陷的 ω_n 之誤差(%)

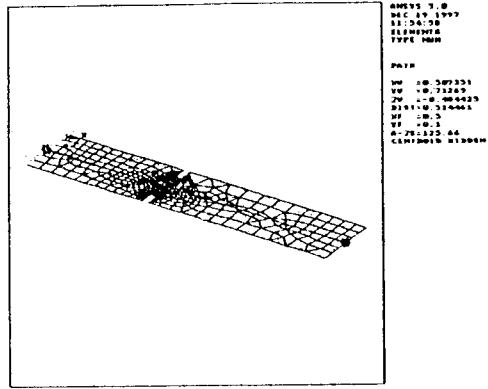
ω_n / 節點數	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
87/23	0.048	0.707	8.045	8.528
147/87	0.707	1.366	3.585	6.559
249/147	0.151	0.298	0.415	0.897
400/249	0.072	0.1447	0.212	0.206
535/400	0.024	0.077	0.034	0.035
666/535	0.036	0.046	0.116	0.219



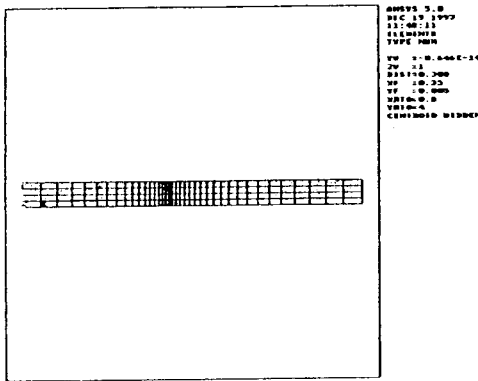
圖一 懸臂樑幾何模形



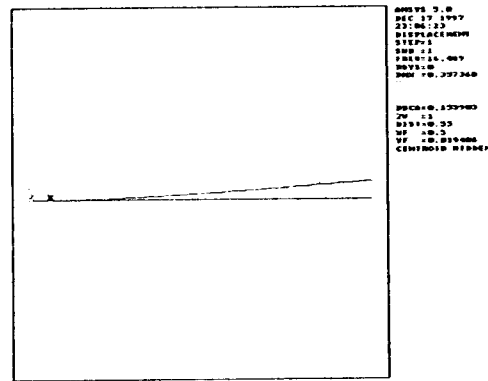
圖二 BEAM 3 有限元素模型



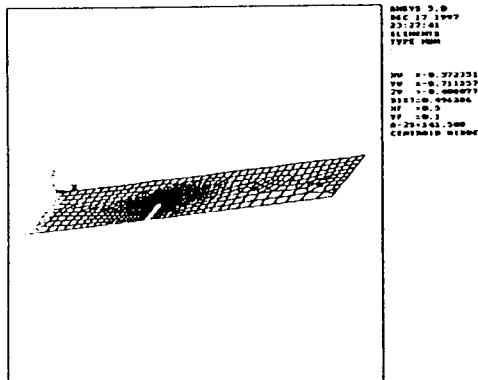
圖五 SHELL63 雙邊缺陷有限元素模型



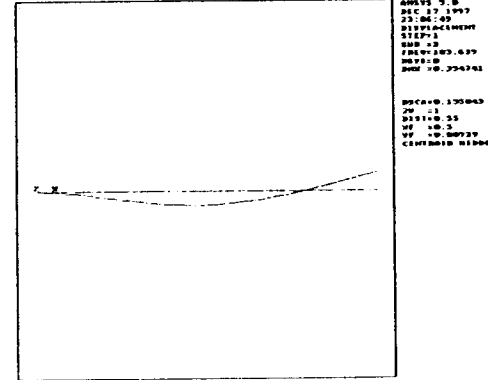
圖三 PLANE 42 有限元素模型



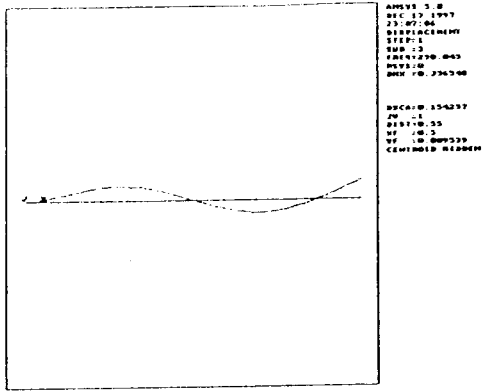
圖六 BEAM 3 第一振型



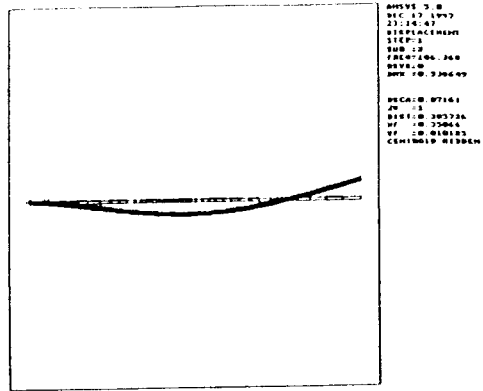
圖四 SHELL 63 單邊缺陷有限元素模型



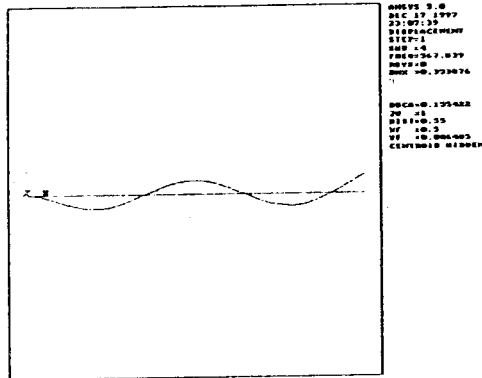
圖七 BEAM 3 第二振型



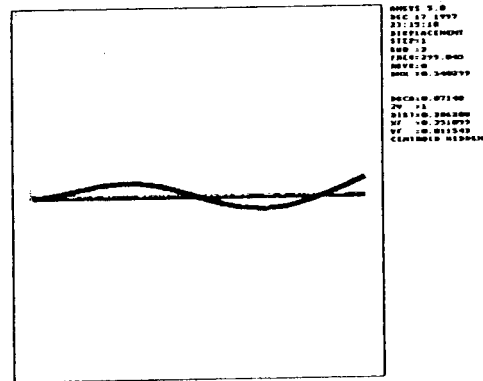
圖八 BEAM 3 第三振型



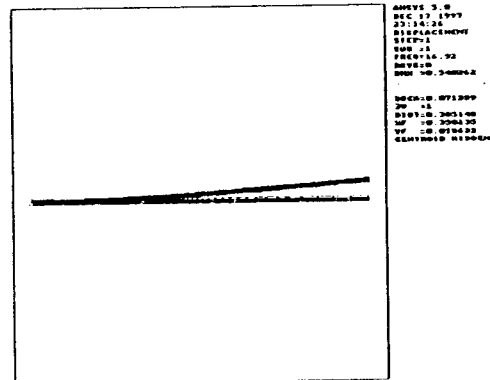
圖十一 PLANE 42 第二振型



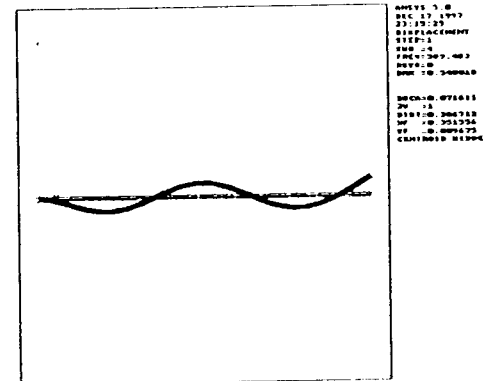
圖九 BEAM 3 第四振型



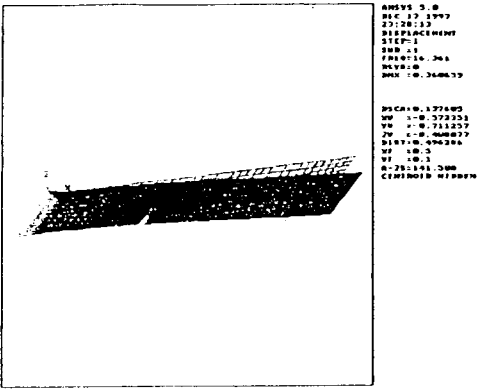
圖十二 PLANE 42 第三振型



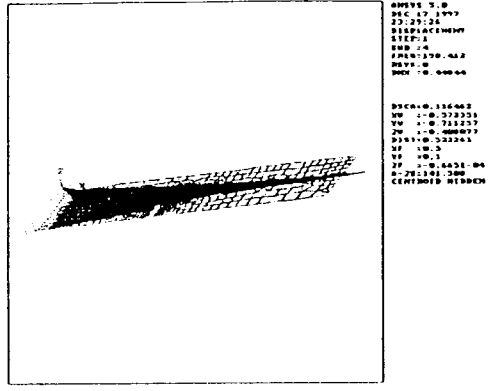
圖十 PLANE 42 第一振型



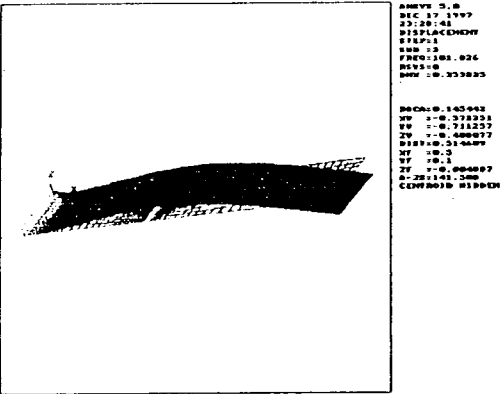
圖十三 PLANE 42 第四振型



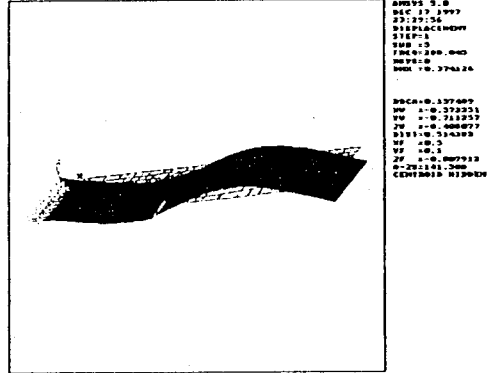
圖十四 SHELL 63 單邊缺陷第一振型



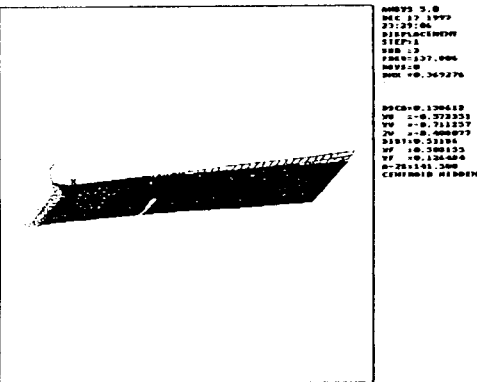
圖十七 SHELL 63 單邊缺陷第四振型



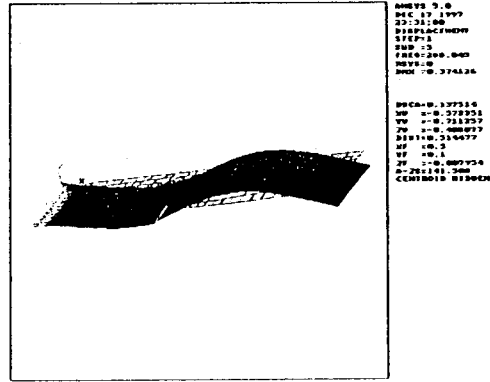
圖十五 SHELL 63 單邊缺陷第二振型



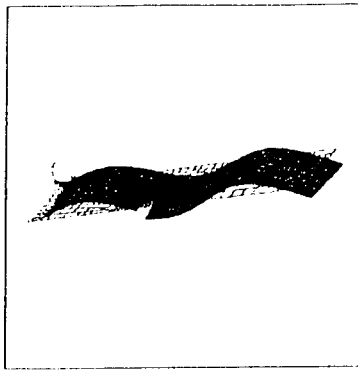
圖十八 SHELL 63 單邊缺陷第五振型



圖十六 SHELL 63 單邊缺陷第三振型



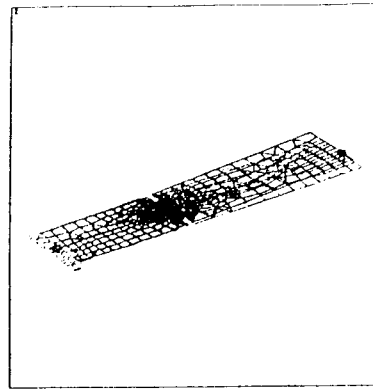
圖十九 SHELL 63 單邊缺陷第六振型



```

ANSYS 3.0
DEC 27 1977
11:37:31
DISPLACEMENT
STEP=1
MODE=1
FREQ=363.3
DELT=
MESH=391429
N
-----
DEFC=0.33193
WV=-0.22824
WY=0.31227
WZ=0.48697
X117=16162
XF=0.1
XF2=0.00000
XZ=23736.36
CENTROID HIDDEN
  
```

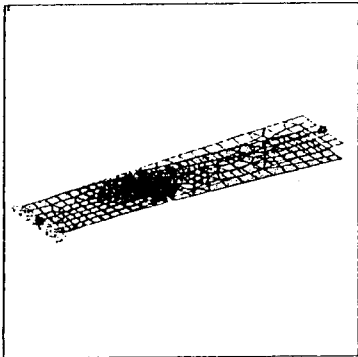
圖二十 SHELL 63 單邊缺陷第七振型



```

ANSYS 3.0
DEC 27 1977
11:38:00
DISPLACEMENT
STEP=1
MODE=3
FREQ=143.774
DELT=
MESH=391429
N
-----
DEFC=0.146749
WV=-0.249253
WY=0.31249
WZ=0.486625
X117=16179
XF=0.1
XF2=0.00000
XZ=23736.36
CENTROID HIDDEN
  
```

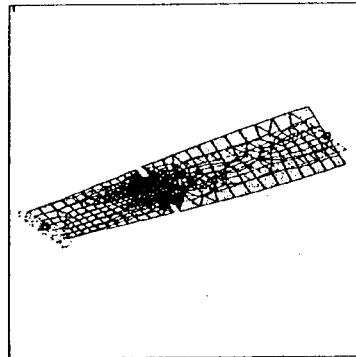
圖二十三 SHELL 63 雙邊缺陷第三振型



```

ANSYS 3.0
DEC 27 1977
11:37:48
DISPLACEMENT
STEP=1
MODE=1
FREQ=10.242
DELT=
MESH=391429
N
-----
DEFC=0.349997
WV=-0.247254
WY=0.31249
WZ=0.486625
X117=16184
XF=0.1
XF2=0.00174
XZ=23736.36
CENTROID HIDDEN
  
```

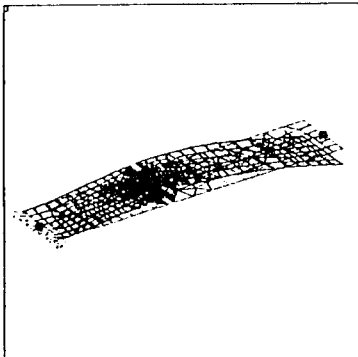
圖二十一 SHELL 63 雙邊缺陷第一振型



```

ANSYS 3.0
DEC 27 1977
11:38:10
DISPLACEMENT
STEP=1
MODE=4
FREQ=123.961
DELT=
MESH=391429
N
-----
DEFC=0.216239
WV=-0.247254
WY=0.31249
WZ=0.486625
X117=16184
XF=0.1
XF2=0.00000
XZ=23736.36
CENTROID HIDDEN
  
```

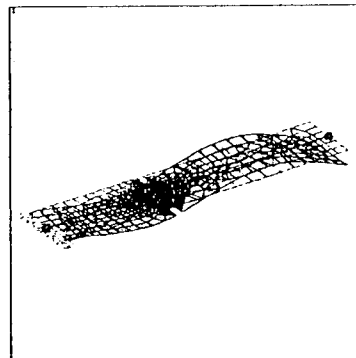
圖二十四 SHELL 63 雙邊缺陷第四振型



```

ANSYS 3.0
DEC 27 1977
11:37:38
DISPLACEMENT
STEP=1
MODE=2
FREQ=189.47
DELT=
MESH=391429
N
-----
DEFC=0.344300
WV=-0.249253
WY=0.31249
WZ=0.486625
X117=16182
XF=0.1
XF2=0.00000
XZ=23736.36
CENTROID HIDDEN
  
```

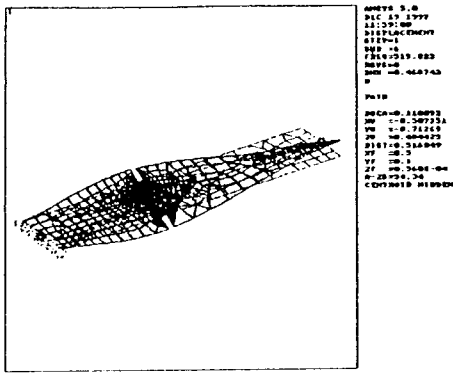
圖二十二 SHELL 63 雙邊缺陷第二振型



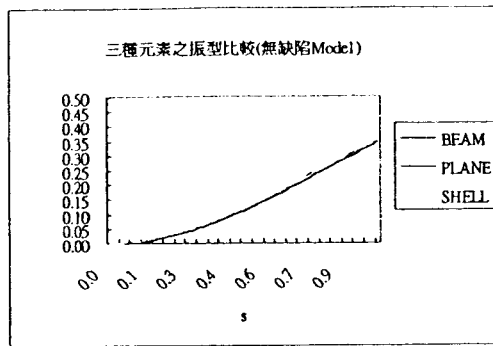
```

ANSYS 3.0
DEC 27 1977
11:38:03
DISPLACEMENT
STEP=1
MODE=5
FREQ=231.468
DELT=
MESH=391429
N
-----
DEFC=0.344754
WV=-0.249253
WY=0.31249
WZ=0.486625
X117=16182
XF=0.1
XF2=0.00000
XZ=23736.36
CENTROID HIDDEN
  
```

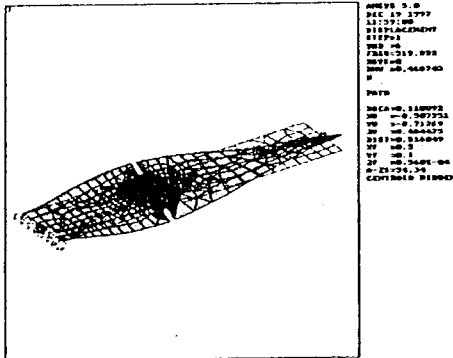
圖二十五 SHELL 63 雙邊缺陷第五振型



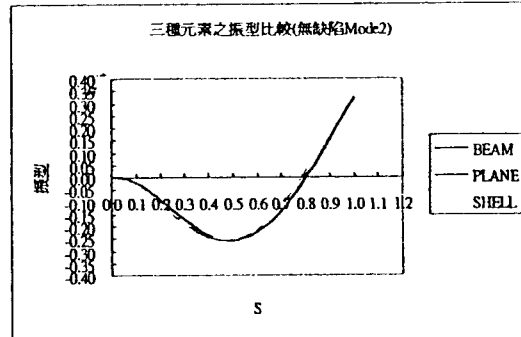
圖二十六 SHELL 63 雙邊缺陷第六振型



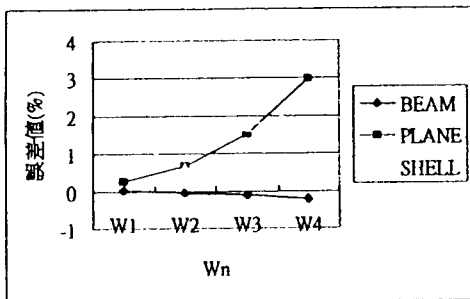
圖二十九 三種元素無缺陷樑第一振型比較



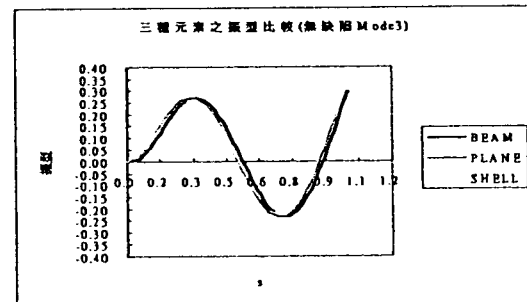
圖二十七 SHELL 63 雙邊缺陷第七振型



圖三十 三種元素無缺陷樑第二振型比較



圖二十八 三種元素無缺陷之自然頻率比較



圖三十一 三種元素無缺陷樑第三振型比較