

正齒輪路易士齒形係數之有限元素分析

學生：趙令賢 鄭四海

指導老師：王栢村 博士

國立屏東技術學院機械工程技術系

摘要

本文係以有限元素分析軟體，考慮 20° 壓力角全高齒之正齒輪，分析探討齒輪之彎曲應力，以求得路易士齒輪係數。有限元素模型考慮單一齒形，在齒輪的尖端受一垂直於中心線的水平力時，分析齒輪所產生之變形及應力分佈的情況，並考慮不同齒數，探討其影響，並將推算之路易士齒形係數與工業界常用之路易士齒形係數作比較，並求證路易士齒形係數之值，其結果顯示與有限元素分析之值有段差距。本文之分析方法除了了解每一齒輪其內部產生之應力分佈情況，將來可作為一般齒輪設計之參考。

壹· 前言

任何機器，動力傳輸均由迴轉運動由一軸傳送到另一軸，而之所以要研究齒輪結構，正是因為齒輪為各類有效傳動機構中最佳之一種。所以正確地分析為甚麼齒輪會損壞是非常重要的，因為只是將齒輪加大並無法去除造成損壞的原始原因。

齒輪的損壞以彎曲應力和疲勞所造成之影響最大，本報告將針對彎曲應力加以探討。齒輪斷裂是由於施加在輪齒上的意外負荷所造成。損傷的形式是由於彎曲疲勞，它是在齒輪旋

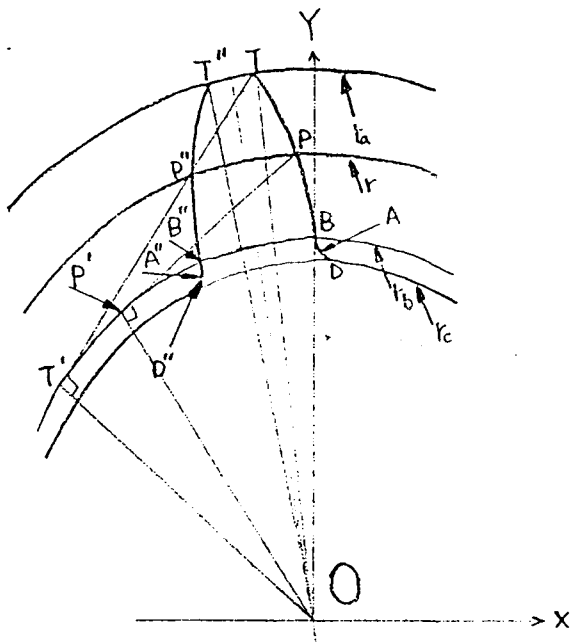
轉時，負荷反覆施加於齒輪上所造成的。小的內圓角半徑會加大彎曲疲勞的影響。

Dolan and Broghamer[1]利用光彈(photoelastic)實驗分析，探討了齒輪彎曲應力分布情況，當模型承受負荷時，彩色光紋在最大應力點處開始產生，應力與每一光紋有關，故可決定其應力值。

本文採用有限元素分析(Finite Element Analysis; FEA)，可以藉本文的結果了解有限元素法在分析齒輪彎曲應力方面的能力，及與其它方法之優劣比較。

有限元素法分析，其成本低，幾何模型可依所欲分析的外型迅速建構完成進行分析，且尺寸可任意合理的調整，更改邊界條件方便容易，設備簡單，重覆多次執行，任何時間可執行，容易且準確地於合理供給條件下獲得求解，沒有如實驗方法之設備複雜，成本高，耗費時間，幾何模型形狀尺寸受限，邊界條件控制麻煩，以及理論幾何模型外型受拘限等缺點。

本報告在分析一正齒輪受一垂直於中心線的水平力時，以有限元素分析軟體為求解工具，分析所產生之變形及應力分佈的情況，且求證路易士齒形係數(Lewis form factor)，並與Spotts[2]之理論分析作比較。



圖一、漸開線齒輪之幾何形狀

貳· 理論分析

以有限元素軟體來對齒輪做彎曲應力分析，首先需定義齒形，再探討其應力分析，進而求出路易士齒形係數，以下即是理論的簡略描述。

(一) 齒形定義

圖一顯示一漸開線齒輪(3)之幾何形狀，考慮一粗齒，全齒深，20度壓力角之正齒輪，可得下列關係式：[4]

$$r_a = r + l/p \quad (1)$$

$$r_b = r \cdot \cos \phi \quad (2)$$

$$r_c = r - 1.25/p \quad (3)$$

式中，
 r_a ：齒冠圓半徑
 r ：節圓半徑
 r_b ：基圓半徑
 r_c ：齒根圓半徑
 p ：徑節(Diametral Pitch)
 ϕ ：壓力角

由漸開線齒輪的定義，可定出座標：

$$\text{點} O : (0, 0)$$

$$\text{點} B : (0, r_b)$$

$$\text{點} P : (-r \cdot \sin(\angle BOP), r \cdot \cos(\angle BOP))$$

$$\text{點} T : (-r_a \cdot \sin(\angle BOT), r_a \cdot \cos(\angle BOT))$$

$$\text{點} A : (0, r_c + 0.3/p)$$

$$\text{點} P'' : (-r \cdot \sin(\angle POP'' + \angle BOP), r \cdot \cos(\angle POP'' + \angle BOP))$$

$$\text{點} T'' : (-r_a \cdot \sin(\angle TOT'' + \angle BOT), r_a \cdot \cos(\angle TOT'' + \angle BOT))$$

$$\text{點} B'' : (-r_b \cdot \sin(\angle BOB''), r_b \cdot \cos(\angle BOB''))$$

連接上述各點，齒形即可定義出來，亦可把上述結果用程式來表示，見附錄(1)，只需輸入齒數，壓力角，節徑，作用力的大小即可。

(二) 彎曲應力

探討齒輪承受之彎曲應力，可將輪齒視為懸臂樑，如圖二所示，所推導之彎曲應力如下：

$$\sigma = \frac{6W_t \ell}{F t^2} \quad (4)$$

式中，

W_t ：垂直輪齒中心線的作用力

ℓ ：輪齒長度

F ：輪齒軸向寬度

t ：輪齒從頂端至最弱截面的齒厚

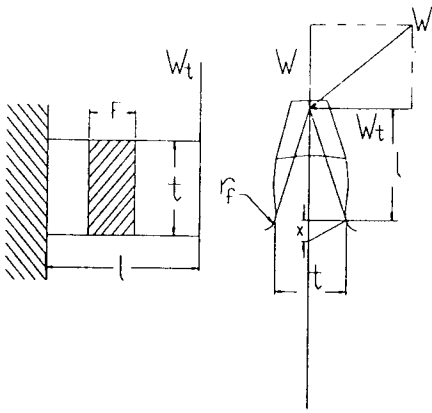
由(2)，可得：

$$P_c y = \frac{t^2}{6\ell} \quad (5)$$

式中，

P_c ：周節(Circular Pitch)

y ：路易士齒形係數



圖二、輪齒作用力之假設情形

可將(4)式化簡成

$$\sigma = \frac{W_t}{F y p_c} \quad (6)$$

(三) 路易士齒形係數之分析

以有限元素軟體分析所得之彎曲應力來推導路易士齒形係數，由(6)式

$$y' = \frac{W_t}{F \sigma' p_c} \quad (7)$$

式中，

y' ：由有限元素分析求得之路易士齒形係數

σ' ：由有限元素分析求得之彎曲應力值

其詳細求法可見 Mitchiner and Mabie [5]之推導方法。

參· 有限元素模型之建立

本報告旨在求路易士齒形係數，因此僅考慮單一齒受一水平側向力之作

用，以下就建立幾何模型 (Geometry Model),包括元素之選擇及參數之設定,再進一步設立適當之邊界條件 (Boundary Condition),如位移限制及負載情形等,作一說明。

(一)幾何模型之建立

由於本報告所分析之元件為齒輪之彎曲應力,再推導以求路易士齒形係數,故幾何模型之建立須配合工業界實際之常用齒輪。

表一所列為本報告之齒輪基本形式。

表二所顯示是所使用之元素種類為 PLANE 82,每個元素有8個節點,每個節點為 UX,UY,兩個自由度,為平面固體四邊形元素。表三顯示在本次報告中元素分割上所產生之節點及元素之數目及各種齒型之基本數據。在分割元素大小上以靠近齒根之圓角為一不連續處,會產生其最大應力。其所在位置採細微分割,而齒輪外型以程式化方式撰寫巨集程式以利自動產生元素分割。圖三顯示有限元素之幾何分割情形。

表一. 齒型基本型式

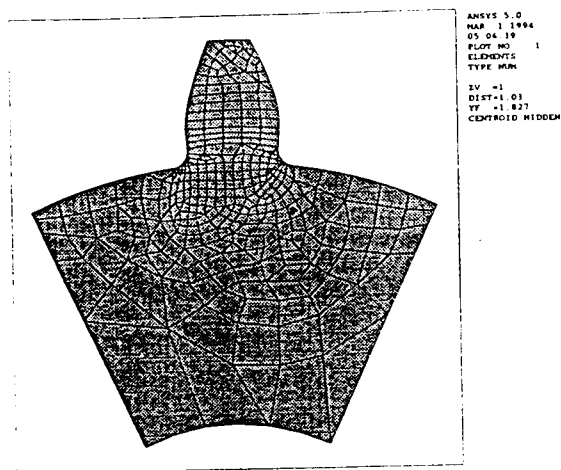
	型 式
齒 型	漸 開 線
壓 力 角	20度
種 類	粗 節 距
齒 制	全 高 齒

表二. 元素名稱及特性

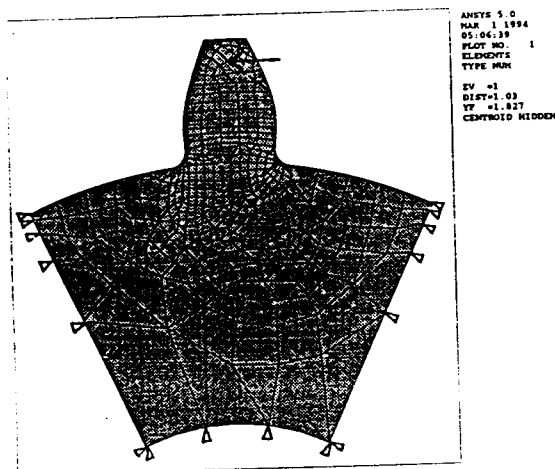
元 素 種 類	PLANE 82
節 點 數	8
形 狀	二 維 四 邊 形
自 由 度	UY UX

肆 · 結果與討論

本報告中探討以 20° 壓力角全高齒之正齒輪，在齒輪尖端受一垂直於中心線之水平力分析齒輪所產生之變形及應力分布情況。其中以20齒之齒數，加以不同之作用力所分析是否為線性，並改變齒數，以檢視路易氏齒形係數與有限元素分析之關係。由圖五及圖六分別顯示10、27齒之有限元素分析應力分布圖，圖中可知最大彎曲應力處是為齒根之圓角部份



圖三. 有限元素模型元素分割圖



圖四. 有限元素模型元素邊界條件

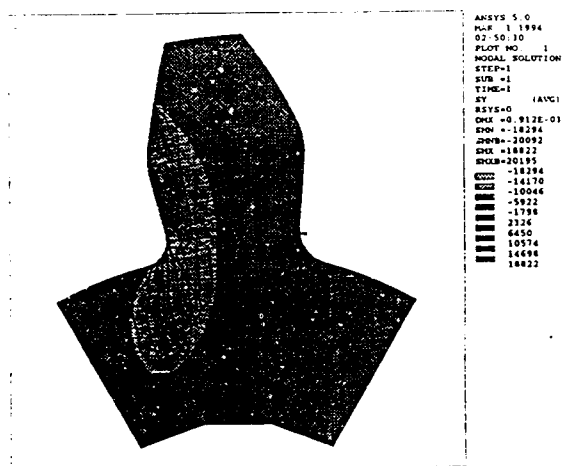
(二)邊界條件：

1. 受力情形：

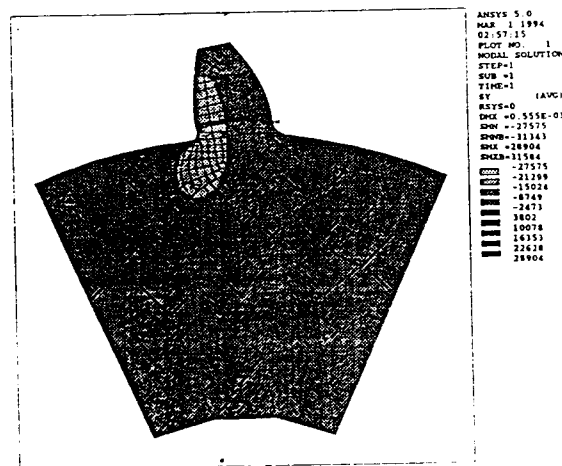
在齒頂尖端施一水平側向力，考慮其力量之大小分別為 500, 1000, 1500, 2000 之單位力並只考慮齒輪之彎曲應力，此側向力即為方程式(7)之 w 。

2. 位移限制：

在考慮單一齒形時，所採用為分析齒型之齒腹部份邊界可沿邊界作平行移動，而在邊界之垂直方向拘束，使其能產生對稱性之變形，如圖四。



圖五. 有限元素應力分部圖(10齒)



圖六. 有限元素應力分部圖(27齒)

表三. 各齒輪之節點數及元素數目
(20°壓力角)

	節點	元素數目
10	910	297
12	964	317
14	965	316
16	934	307
18	986	327
20	1046	349
23	1081	360
25	1091	364
27	1120	373

並得於圖七當齒輪之作用力增加，其應力值亦隨負荷之遞增而產生線性之關係。

(2)、路易氏齒形係數與有限元素分析值之比較。

採用不同之齒數及相異之節徑與路易氏齒形係數相較結果如表五

由表中可知當相同齒數時改變節徑大小，其路易氏齒形係數之值皆相當接近，可知路易氏齒形係數並在以有現元素分析時，不受節徑改變而影響，在圖八中三種不同節徑所分析求得之路易氏齒形係數相當多重合處。

表四. 各種齒數之齒形基本資料

	齒冠圓	節徑	基圓	齒根圓	圓角
10	3	2.5	2.35	1.875	0.15
12	2.92	2.5	2.35	1.979	0.125
14	2.857	2.5	2.35	2.054	0.107
16	2.813	2.5	2.35	2.109	0.094
18	2.778	2.5	2.35	2.153	0.083
20	2.75	2.5	2.35	2.188	0.075
23	2.717	2.5	2.35	2.228	0.065
25	2.7	2.5	2.35	2.25	0.06
27	2.685	2.5	2.35	2.269	0.056

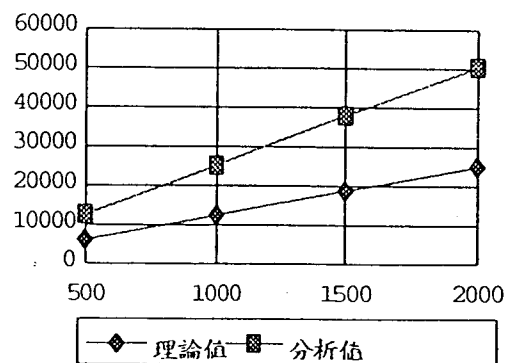
表六. 齒形係數之比較

	理論值	D=5	D=10	D=7
10	0.064	0.038	0.038	0.0339
12	0.078	0.0383	0.0381	
14	0.088	0.042	0.0443	
16	0.094	0.0453	0.0452	
18	0.098	0.0483	0.0482	
20	0.102	0.0505	0.0509	0.0511
23	0.106	0.0549	0.0547	
25	0.108	0.0574	0.0571	
27	0.111	0.0595	0.060	0.060

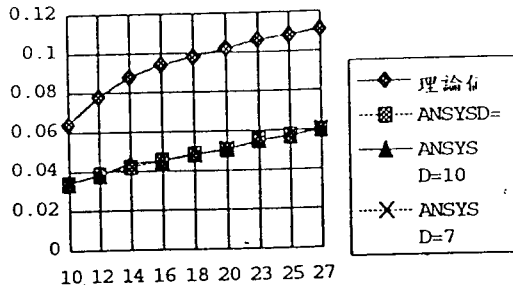
表五. 作用於20齒之分析應力與理論應力比較

	500	1000	1500	2000
理論值	6241	12482	18724	24965
實際值	12609	25219	37828	50438

(1)、作用力與應力值線性之比較以20齒之模型，並以500，1000，1500，2000 四種水平力作用於齒形尖端，其結果如表五



圖七. 作用於20齒之分析應力與理論應力比較圖



圖八. 路易氏齒形係數分析之比較

在圖中可看出路易氏齒形係數理論值與分析值有一近似等距之比值上差異，在本報告中尚無足夠資料解釋此一現象，尚待將來研討之。

伍. 結論

本報告以有限元素分析軟體ANSYS，分析路易氏齒形係數之彎曲應力，進而推導求出路易氏齒形係數與理論值之比較，重要結論如下：

- 1、本報告以有現元素分析 20° 全齒深正齒輪之路易氏齒形係數。
- 2、作用力與彎曲應力是線性關係，作用力大小對路易氏齒形係數無影響。
- 3、對不同齒數，分別可以有限元素求得路易氏齒形係數，其值與理論值，有兩倍之差距，目前仍無法解釋。
- 4、由本報告分析，彎曲應力之有限元素分析對不同節徑有相同之路易氏齒形係數。
- 5、本報告提供齒輪彎曲應力之分析技巧，並推求路易氏齒形係數，但仍須進一步了解路易氏齒形係數與理論值之差異原因。

參考資料

1. Dolan, T.J. and E.L. Broghamer, "A photoelastic study of stresses in gear tooth

Profile. Bull. No. 335, Eng. Exp. Sta. University of Illinois, Urbana, Ill., (1942).

2. 馮騰榔, 王亞平, 戴義國等編譯, Spott. M.F., 機械元件設計, 文京圖書有限公司, pp.521-582, 台北(1989)。

3. 襲肇鑄, Amstead, B.H., P.F.Ostwald, and M.L. Begeman, 機械工作法, 東華書局, 臺北(1977)。

4. Deutschman, A.D., W.T.Michels, and C.E.Wilson, "Machine Design Theory and Practice," Macmillan Publishing company, New York(1975)。

5. Mitchiner, R.G., and H.H.Mabbie, "The Determination of the Lewis form Factor and the AGMA Geometry Factor J for External Spur Gear Teeth," vol.104, pp.148-158(1982)。

Determination of Lewis Factor of Spur Gear by Finite Element Analysis
 Lin-Shian Jau and Si-Hi Cham
 B.T.Wang
 Department of Mechanic Engineering
 Nation Pingtung Polytechnic Institute

ABSTRACT

This report presents the use of finite element software to analyze the gear bending stress so as to determine Lewis form factor. The

full-depth and pressure angle 20 degree of gears and considered. A single tooth is considered in finite element model. A horizontal force is applied on the top of the tooth. The deformation and stress distinction are determined. Different tooth number are considered to determine the Lewis form factor. The Lewis form factor derived from finite element results are compared with the data from handbook. Some discrimination are found between finite element result and handbook. The analysis procedure can be applied to determine the gear stress and can be used for gear design.

附錄(1) : (Appendix)

```

/BATCH
/COM,ANSYS REVISION 5.0          19:57:48
03/01/1994
! /show,vga
/PREP7
/TITLE, FEW of the Gear Stress
ETYPPE
STAT
ET, 1,82                          *Define the element type*
MP,EX,1,3e7                       *Set material properties*
/cor,real
angle,rf,h,sl,s2pd,ra,rc,bop,t,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,s10
/cor,real bot,tot2,bot2,pop2,bop2,bob2,boy,s11,s12,s13,s14
*ask,n,gear number,              *Set the variety of gear model*
d=5.                               *Decide to gear number*
*ask,p_angle,press angle,       *Decide to the press angle of
gear*

pd=n/d
rp=2.5
rb=2.35
ra=2.5+1/pd
rc=2.5-1.25/pd
*afun,deg
bop=0.854
t_angle=acos(rb/ra)
bott=(tan(t_angle))*180/3.1416-t_angle
tot2=(d*180)/(4*n*ra)
bot2=tot2+bott
pop2=(180*d)/(n*rp*2)
bop2=pop2+bop
bob2=pop2+2*bop
bow=20.
boy=bob2+20.
h=bob2/2.
rf=.3/pd
*ask,fn,force,                  *Decide to force value*
k,,0*cos(h)+2.35*sin(h),0*sin(h)+2.35*cos(h)
k,,-.037*cos(h)+2.499*sin(h),+.037*sin(h)+2.499*cos(h)
s1=(-ra*sin(bott))*cos(h)+(ra*cos(bott))*sin(h)
s2=(+ra*sin(bott))*sin(h)+(ra*cos(bott))*cos(h)
k,,s1,s2
s3=(-ra*sin(bot2))*cos(h)+(ra*cos(bot2))*sin(h)
s4=(+ra*sin(bot2))*sin(h)+(ra*cos(bot2))*cos(h)
k,,s3,s4
s5=(-rp*sin(bop2))*cos(h)+(rp*cos(bop2))*sin(h)
s6=(+rp*sin(bop2))*sin(h)+(rp*cos(bop2))*cos(h)
k,,s5,s6
s7=(-rb*sin(bob2))*cos(h)+(rb*cos(bob2))*sin(h)
s8=(+rb*sin(bob2))*sin(h)+(rb*cos(bob2))*cos(h)
k,,s7,s8
s9=(rc*sin(bow))*cos(h)+(rc*cos(bow))*sin(h)
s10=(-rc*sin(bow))*sin(h)+(rc*cos(bow))*cos(h)
k,,s9,s10
k,,sin(bow)*cos(h)+cos(bow)*sin(h),
-sin(bow)*sin(h)+cos(bow)*cos(h)
s11=(-rc*sin(boy))*cos(h)+(rc*cos(boy))*sin(h)
s12=(+rc*sin(boy))*sin(h)+(rc*cos(boy))*cos(h)
k,,s11,s12
k,,(-sin(boy))*cos(h)+cos(boy)*sin(h),
(+sin(boy))*sin(h)+cos(boy)*cos(h)
k,,0*cos(h)+rc*sin(h),0*sin(h)+rc*cos(h)
s13=(-rc*sin(bob2))*cos(h)+(rc*cos(bob2))*sin(h)
s14=(+rc*sin(bob2))*sin(h)+(rc*cos(bob2))*cos(h)
k,,s13,s14
*Define a marcos function to keypoint
KPLLOT
SPLINE,P50X
3
3
2
1
SPLINE,P50X
3
4
5
6
L,P50X
1
11
L,P50X
6
12
L,P50X
7
8
L,P50X
9
10
LARC,4,3,1,ra
LARC,2,5,1,rp
LARC,6,1,2,-rb
LARC,9,12,2,-rc
LARC,11,12,2,-rc
LARC,11,7,2,-rc
LARC,8,10,2,-1
/PNUM,DEFAULT
/PNUM,LINE,1
/PNUM,KPOI,0
/PBC,ALL,,0
/WIN,ALL,ON
LPLLOT
LFILET,6,12,rf
LFILET,5,14,rf
/PNUM,DEFAULT
/PNUM,KPOI,1
/PBC,ALL,,0
/WIN,ALL,ON
LPLLOT
L,P50X
13
12
L,P50X
15
11
LARC,14,12,1,-rc
LARC,11,16,1,-rc
k,,0,rb/cos(20+.5*bob2+.5*tot2) *Define the arc of gear root*
/PNUM,DEFAULT
/PNUM,LINE,1
/PNUM,KPOI,0
/PBC,ALL,,0
/WIN,ALL,ON
LPLLOT
*Display line number except to the arc of
gear root*
LARC,13,15,1,-LY(15,1)
L,P50X
2
17
L,P50
17
4
A,P50X, 4 *Display the area of gear model*
4
3

```

```

2
17
A,P50X, 4
5
6
1
2
A,P50X, 4
1
15
13
6
A,P50X, 4
13
12
11
15
A,P50X, 3
12
13
14
A,P50X, 3
15
11
16
A,P50X, 8
7
16
11
12
14
9
10
8
A,P50X, 4
4
17
2
5
ned o htal *
MAOUM,AREA,0
OPTOM,KPOI,0
TENOM,LINE,0
OPBC,ALL,,0
LWIN,ALL,ON
APLOT
si ts ait i
9
LESIZE,P50X,,5
1
LESIZE,P50X,,5
10
LESIZE,P50X,,5
3
LESIZE,P50X,,5
10
LESIZE,P50X,,5
11
LESIZE,P50X,,4
2
LESIZE,P50X,,4
4
LESIZE,P50X,,5
11
LESIZE,P50X,,5
22
LESIZE,P50X,,3
5
LESIZE,P50X,,3
6
LESIZE,P50X,,10
13
LESIZE,P50X,,4
19
LESIZE,P50X,,4
18
LESIZE,P50X,,5
21
LESIZE,P50X,,5
17
LESIZE,P50X,,5
20
LESIZE,P50X,,5
16
LESIZE,P50X,,5
12
LESIZE,P50X,,5
14

```

noedh the alea m*th node and element*

sat ist as tit tsa i ts ai t saits at
all lines*

```

LESIZE,P50X,,3
15
LESIZE,P50X,,5.20
8
LESIZE,P50X,,5.20
7
LESIZE,P50X,,3
23
LESIZE,P50X,,2
24
AMESH,ALL *to free mesh all area*
FINISH
/SOLU
/PNUM,DEFAULT
/PNUM,KPOI,0
/PBC,ALL,,0
/WIN,ALL,ON
*plot all lines with numbering*
LPLLOT Define under of r.c. with symmetric
DL,P50X,,SYMM boundary
8
7
DL,P50X,,SYMM
15
7
DL,P50X,,SYMM
7
7
F1,cOX,FX,-fn *Define the right horizontal line a force
17
SOLVE
FINISH
/POST1
PLDISP,1
PLNSOL,S,Y
FINISH

```