

## 簡諧操作狀態下之壓電樑模態振型測定

王栢村  
國立屏東科技大學  
機械工程系 教授

陳柏宏  
國立屏東科技大學  
機械工程系碩士班 研究生

國科會計劃編號：NSC 91-2212-E-020-003

關鍵詞：簡諧激振、操作變形振型、壓電樑模態振型。

### 摘要

本文探討承受簡諧外力激振條件下壓電材料樑結構，由操作變形振型之量測進而發展模態振型預測模式。首先壓電材料樑結構理論分析求得操作變形振型並發展一模態振型預測模式，將所得壓電材料樑結構於共振激振與非共振激振狀態下之操作變形振型，代入預測模式進行曲線嵌合即可得到結構的模態振型，由模態振型預測模式可合理地求得壓電材料樑之模態振型，亦有助於操作狀態下之實驗模態分析進行。由共振激振及非共振激振結果顯示，壓電材料樑之操作狀態下可由預測程式得到良好之模態振型預測，改善了結構必須於靜止狀態之模態測試技術。

### 一、前言

壓電轉換器有著靈敏度高、質量輕、便宜、且方便使用之特性[1]，由壓電材料取代傳統加速度計亦為另一研究之課題，由彭[2]對壓電材料之介紹，瞭解某些結晶材料受到了極化以後便有著壓電效應，而正壓電效應便是施加應力，材料會有電荷輸出，反之則稱為逆壓電效應。Matsuzaki[3]說明現今太空結構及次結構也是利用壓電材料進行振動控制，可以透過數值或實驗分析之方法來進行，未來還可以應用於微機電系統之領域。

實際結構當中，其結構往往處於操作狀態下，因此，操作狀態下之實驗模態分析是現今研究課題之一，Johansen and Madsen[4]與 Hermans *et al.*[5]提出操

作狀態下之實驗模態分析還可以表現實際結構在操作狀態下之真正動態特性。Herman and Hermans[6]提出應用操作狀態下之量測應用於航空、橋樑、車輛，透過及時操作量測進行健康監測及破壞檢測會有效率，同時也可以反應出結構實際特性。

Wang[7]提出操作變形振型(operational deflection shape, ODS)理論預測模式，針對多自由度彈簧質塊系統進行操作變形振型預測，驗證了應用理論預測模式得到自由度彈簧質塊系統模態振型之適用性，胡[8]利用一實際多自由度彈簧質塊系統行操作變形振型量測，並將所量測得到之操作變形振型資料帶入預測模式，確實地得到多自由度彈簧質塊系統之模態振型。吳[9]由離散多自由度系統延伸至連續樑結構，並進行樑結構之操作變形振型量測，並修改 Wang[7]之多自由度理論模態振型預測模式，進一步發展為應用樑結構之操作變形振型來進行樑結構之模態振型預測。

本文目的為所發展一壓電樑結構於作業狀態下由操作變形振型預測模態振型之模式，並驗證研究其預測模式之可行性及適用性，未來可用於操作狀態下之量測依據，並可用於其他操作狀態下之結構。

### 二、理論分析

#### 2.1 自由振動分析

考慮一樑結構長度為  $L_b$ ，可得到其系統運動方程式如下：

$$\left[ E_b I_b \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \right] + C_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

其中,  $E_b$  為樑之楊氏係數,  $I_b$  為截面積慣性矩,  $w$  為樑之側向位移,  $C_b$  為懸臂樑的阻尼係數,  $\rho_b$  為樑的密度,  $A_b$  為樑的截面積。

考慮自由振動, 因此令外力為零及忽略阻尼之影響並假設系統之位移響應如下:

$$w(x,t) = \phi(x)q(t) \quad (2)$$

利用數值方法求解則自然頻率可求得

$$\omega_r = (\alpha_r L_b)^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b A_b L_b^4}} = (\alpha_r)^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b A_b}} \quad (3)$$

對應之模態振型函數為

$$\phi_r(x) = \frac{[\cosh \alpha_r x - \cos \alpha_r x - \sigma_r (\sinh \alpha_r x - \sin \alpha_r x)]}{\sqrt{\rho_b A_b L_b}} \quad (4)$$

$$\sigma_r = \frac{\sinh \alpha_r L_b - \sin \alpha_r L_b}{\cosh \alpha_r L_b + \cos \alpha_r L_b} \quad (5)$$

## 2.2 壓電薄膜方程式

考慮一矩形壓電薄膜感應器如圖 1 所示, 黏貼於樑之表面, 其壓電薄膜之形狀函數(shape function)可表示為:

$$\Gamma(x) = u(x - x_{p1i}) - u(x - x_{p2i}) \quad (6)$$

其中,  $u(x)$  為步階函數(step function),  $x_{p1i}$  及  $x_{p2i}$  分別為第  $i$  個壓電薄膜之兩端位置座標, 壓電薄膜感應方程式:

$$q_p(t) = \frac{t_b + t_p}{2} b_p e_{31} \int_0^{L_b} \Gamma(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (7)$$

其中,  $t_b$  為樑之厚度,  $t_p$  為壓電薄膜之厚度,  $b_p$  為壓電薄膜之寬度,  $e_{31}$  為壓電場強度常數(piezoelectric field intensity constant)。所以將式(6)代入式(7), 可得:

$$q_p(t) = \frac{t_b + t_p}{2} b_p e_{31} \sum_{r=1}^{\infty} Q_r [\phi_r'(x_{p2i}) - \phi_r'(x_{p1i})] \quad (8)$$

又因壓電薄膜有類似其電容之效應產生, 所以壓電薄膜之電壓為:

$$V_p(t) = \frac{q_p(t)}{\varepsilon A_p} t_p$$

$$= \frac{t_b + t_p}{2 \varepsilon A_p} t_p b_p e_{31} \sum_{r=1}^{\infty} Q_r [\phi_r'(x_{p2i}) - \phi_r'(x_{p1i})] \quad (9)$$

$$= \frac{t_b + t_p}{2 \varepsilon A_p} t_p b_p e_{31} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_r(x_j) [\phi_r'(x_{p2i}) - \phi_r'(x_{p1i})]}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)}$$

其中,  $V_p(t)$  為壓電薄膜之電壓,  $q_p(t)$  為壓電薄膜之電量,  $\varepsilon$  為壓電薄膜之電容係數(permittivity),  $A_p$  為壓電薄膜之面積。

## 2.3 簡諧分析

當在結構座標  $x = x_j$  受簡諧外力作用時, 其外力的型式可寫成如下式:

$$f(x,t) = F_j \delta(x - x_j) e^{i\omega_s t} \quad (10)$$

其中,  $F_j$  為簡諧外力大小,  $x_j$  為外力作用位置,  $\omega_s$  為簡諧激振頻率。由於輸入為簡諧激振, 所以輸出亦為簡諧響應, 利用擴充原理可假設系統位移響應如下:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) Q_r e^{i\omega_s t} \quad (11)$$

經由數值疊代可解得:

$$Q_r = \frac{F_j \phi_r(x_j)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (12)$$

令  $x_j$  為第  $j$  個簡諧外力  $F_j$  作用之位置, 在  $x_i$  之位置時, 其系統之響應如下:

$$w(x_i,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x_i) Q_r e^{i\omega_s t} = e^{i\omega_s t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_r(x_j) \phi_r(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (13)$$

因此, 懸臂樑結構令  $x = x_i$  為簡諧力  $F_j$  作用於時  $x = x_j$  之簡諧力輸入之位移響應, 則頻率響應函數如下式:

$$H_{a_i, f_j} = \frac{X_i}{F_j} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^f(x_j) \phi_r^a(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (14)$$

令  $x_j$  為第  $j$  個簡諧外力作用之位置, 在  $x_{p1i}$ 、 $x_{p2i}$  之位置時, 其壓電薄膜電壓輸出之頻率響應函數如下:

$$H_{p_i, f_j} = \frac{V_p}{F_j}$$

$$= \frac{t_b + t_p}{2\varepsilon A_p} t_p b_p e_{31} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x_j) [\phi_r'(x_{p2i}) - \phi_r'(x_{p1i})]}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (15)$$

令  $x_{p_i}$  為第  $i$  壓電薄膜中點位置座標,  $l_p$  為壓電薄膜之長度,  $x_{p1i} = x_{p_i} - \frac{l_p}{2}$ ,  $x_{p2i} = x_{p_i} + \frac{l_p}{2}$ 。所以壓電薄膜電壓輸出之頻率響應函數通式如下:

$$H_{p_i, f_j} = \frac{V_p}{F_j} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^f(x_j) \phi_r^p(x_{p_i})}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (16)$$

其中,

$$\phi_r^f(x_j) = \frac{1}{\sqrt{\rho_b A_b L_b}} \phi_r(x_j) \quad (17)$$

$$\phi_r^p(x_{p_i}) = \frac{(t_b + t_p) t_p b_p e_{31} [\phi_r'(x_{p2i}) - \phi_r'(x_{p1i})]}{2\varepsilon A_p \sqrt{\rho_b A_b L_b}} \quad (18)$$

$\phi_r^f(x_j)$  為點力之特徵函數, 其物理意義為懸臂樑之位移振型,  $\phi_r^p(x_{p_j})$  為壓電薄膜感應之特徵函數, 其物理意義為壓電薄膜兩端斜率差振型。

欲求樑之操作變形, 令  $V_p(t) = V_i(\omega_s) e^{i\omega_s t}$ , 因此, 壓電薄膜電壓輸出響應可以改寫成如下:

$$\{V(\omega_s)\} e^{i\omega_s t} = \begin{Bmatrix} V_1(\omega_s) \\ V_2(\omega_s) \\ \vdots \\ V_m(\omega_s) \end{Bmatrix} e^{i\omega_s t} \quad (19)$$

其中,

$$V_i(\omega_s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_r^f(x_j) \phi_r^p(x_{p_i})}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (20)$$

$\{V(\omega_s)\}$  即是一系統受簡諧外力激振下之壓電薄膜操作變形振型。經由壓電薄膜之頻率響應函數、電壓輸出響應及簡諧外力激振, 可以得到系統輸入及輸出之關係:

$$\{V(\omega)\} = [H_{p_i, f_j}(\omega)] \{F(\omega)\} \quad (21)$$

## 2.4 由 ODS 求取模態振型

圖 2 為由操作振型變形求得模態振型之示意圖, 當系統結構受到一簡諧外力激振時, 其結構之輸出響應亦為簡諧響應輸出, 由式(21)可得知, 系統之電壓輸出響應由頻率響應函數和簡諧外力之乘積可得, 而

系統之自然頻率及阻尼比可由一次頻率響應函數量測求得。在假設已知之簡諧外力作用下, 只要得到操作狀態下之結構電壓輸出響應, 便可由預測模式得知其智慧型結構之電壓振型輸出。在本文中  $\omega_r$  及  $\xi_r$  可由一次頻率響應函數量測求得, 簡諧外力為固定位置, 所以  $F_j$ 、 $\omega_s$  及  $\phi_r^f(x_j)$  均為已知, 因此,  $V_i(\omega_s)$  實為  $\phi_r^p(x_{p_j})$  之函數。本文中假設可由 ODS 量測而得知系統之  $\hat{V}_i(\omega_s)$ , 透過模態振型之預測程式得到一適當之模態振型, 使預測之  $V_i(\omega_s)$  與實驗量測之  $\hat{V}_i(\omega_s)$  能夠相吻合。

如圖 3 所示, 本文透過多項式曲線嵌合 (Polynomial fit) 之方式求得結構之模態振型, 並假設多項式函數為  $p$  個分格點,  $x$  座標值分別為  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_p$ , 第  $r$  個模態振型值相對應為  $y_{r,1}, y_{r,2}, y_{r,3}, \dots, y_{r,p}$ , 因此, 可得到多項式函數表示式:

$$\phi_r^p(x) = \sum_{q=0}^N a_{r,q} \tilde{x}^q \quad (22)$$

其中,  $q$  為多項式之次方項,  $a_{r,q}$  為第  $r$  個模態振型所對應之多項式函數係數,  $a_{r,q}$  可透過  $\tilde{x}_p$  及  $y_{r,p}$  之曲線嵌合得知, 因此, 第  $r$  個模態振型值可由任意  $x$  代入式(22)得知。以實際 ODS 實驗量測而言, 實驗量測點為  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ , 其中,  $m$  為實驗之量測點數, 並代入相對應之位置即可求得結構之模態振型。透過式(22)可知會有  $r \times p$  個設計變數, 為了簡化其設計變數, 首先由少數點之設計變數  $y_{r,s}$  進行, 可繪出模態振型之相關點數資料, 再透過多項式函數曲線之方法進行處理使其曲線平滑化, 最後透過最佳化產生預測所得之模態振型, 示意圖如圖 4, 表示式如下:

$$\phi_r(x_i) = \phi_{r,i} = \sum_{q=0}^N a_{r,q} x_i^q \quad (23)$$

由前述可知透過實驗所得之 ODS 亦即  $\hat{X}_i(\omega_s)$  進行預測, 可得到預期之  $X_i(\omega_s)$ , 再透過多項式曲線嵌合之預測程式以求得模態振型, 因此, 便形成一最佳化[4]問題如下:

◎ 目標函數(Objective Function):

$$f = \sum_{i=1}^m \left[ \text{MAC} \{ X_i(\omega_s), \hat{X}_i(\omega_s) \} - 1 \right]^2 \quad (24)$$

◎設計變數(Design Variable)：

$$y_{r,s}, r = 1, 2, 3, \dots, n, s = 1, 2, 3, \dots, p \quad (25)$$

◎限制條件(Constraints)：

$$[\text{MAC}(\{\phi_r\}, \{\phi_s\})] - 1 \leq 0, r = s \quad (26)$$

$$[\text{MAC}(\{\phi_r\}, \{\phi_s\})] \leq 0, r \neq s \quad (27)$$

在最佳化問題解析中，目標函數之  $\{\hat{X}_i(\omega_s)\}$  為實驗所得之 ODS， $\{X_i(\omega_s)\}$  則為預測所得之 ODS，透過  $\text{MAC}\{X_i(\omega_s), \hat{X}_i(\omega_s)\}$  為 1 以確認預測所得之 ODS 與實驗所得之 ODS 形狀之相似。設計變數為  $y_{r,s}$ ，其中  $r = 1, 2, 3, \dots, n$ ， $s = 1, 2, 3, \dots, p$  對應為第  $r$  模態第  $s$  格點之數值，並透過多項式曲線嵌合求得  $\phi_r(x)$ ，最後由目標函數為最小化進而預測得知其 ODS。限制條件為透過模態振型呈現正交化之特性進行，使預測之相同模態振型正交值為 1，不同模態之模態振型正交值為 0，以預期能預測出正確之模態振型。在模態振型排序方面，由於各個模態之振型可較容易分辨，因此在預測程式中便沒有給定模態振型排序之限制條件。

### 三、ODS 預測模態振行數值模擬

整個預測模式流程圖如圖 5 所示，以下針對預測程式各個步驟進行說明：

1. 預測程式開始。
2. 各項參數設定： $p$  為多項式曲線嵌合格點數， $N$  為多項式曲線嵌合次方數， $m$  為量測點數， $n$  為模態數。
3. 給定預測起始值  $y_{r,s}$ 。
4. 將起始值  $y_{r,s}$  及  $p$  個曲線嵌合格點數代入多項式曲線嵌合表示式  $\phi_r(x) = \sum_{q=0}^N a_{r,q} x^q$ ，透過多項式曲線嵌合可得  $\phi_r$  之多項式函數。
5. 將對應  $m$  個量測點之  $x$  值代入多項式函數，以求得模態振型值， $\phi_{r,m} = \phi_r(x_m)$ 。
6. 給定上下限並將步驟 5 所得之模態振型代入最佳化程式，可得  $y_{r,s}$ 。
7. 將  $y_{r,s}$  及  $x_1, x_2, \dots, x_p$  再代回多項式曲線嵌合

$$\phi_r(x) = \sum_{q=0}^N a_{r,q} x^q \text{ 即可求得預測之模態振型。}$$

8. 程式結束。

整體模態振型預測程式中以多項式曲線嵌合格點數  $p$ ，多項式曲線嵌合次方數  $N$  為影響之主要因素，以固定格點數  $p$  而言，曲線嵌合次方數  $N$  數值太小會造成預測之振型與實際結構之模態振型有形狀上差異，若固定曲線嵌合次方數  $N$  而改變曲線嵌合格點數  $p$ ，則會因  $p$  值過小造成曲線嵌合所得之模態振型和實際之模態振型在形狀上有較大之差異性，因此，選擇  $p$  及  $N$  為一重要課題，當  $p$  大於 14 及  $N$  大於 8 時，預測所得之模態振型會有跟實際模態振型形狀相似且誤差較小之特性，因此，參數設定可以依此為依據進行。

## 四、結果與討論

### 4.1 理論驗證分析

(一) 第 1 模態共振激振， $f_s = 16.6\text{Hz} \approx f_1$

- (1) 由圖 6(a)知道理論與預測之 ODS 振型形狀極為相似，圖 6(b)為預測所得之模態振型，其形狀與理論分析所得之形狀相當吻合。
- (2) 由表 1(a)之 MAC 比對得知對角線直均趨近於 1，非對角線於趨近於 0，由表 1(b)之 MSF 之對角線最大為 1.0060，顯示預測振型最大為 0.6% 之誤差。

(二) 第 2,3 模態間之非共振激  $f_2 < f_s = 202\text{Hz} < f_3$

- (1) 由圖 7(a)得知理論與預測之 ODS 振型形狀極為相似，圖 7(b)為預測所得之模態振型，其形狀與理論分析所得之形狀有良好之吻合性。
- (2) 由表 2(a)之 MAC 比對得知對角線直均趨近於 1，非對角線於趨近於 0，表 2(b)之 MSF 顯示預測振型為第 1 模態比對誤差 0.33%，第 2 模態比對誤差 0.12%。結果顯示模態振型之正交性及一致性。

綜合以上共振與非共振激振狀態下，由 ODS 預

測模態振型之理論驗證分析，可以得知由 ODS 預測模態振型有其可行性，且不論共振或非共振激振均可。而模態振型之正確性，除節點處數值小有較大之相對誤差外，模態振型在各點預測之誤差在 $\pm 3-5\%$ 以內，由 MAC 及 MSF 比對可知預測之模態振型仍有良好之形狀吻合及正交特性。

#### 4.2 實驗驗證分析

(一) 第 2 模態共振激振， $f_s = 107\text{Hz} \approx f_2$

(1) 由圖 8 知道實驗與預測之 ODS 振型形狀極為相似，但有些許比例上之誤差產生。圖 9(a)-(d)為預測所得之模態振型，除第 1 模態比對較差外，其預測之模態形狀與實驗分析所得之形狀相當吻合。

(2) 由表 3(a)之 MAC 比對得知對角線值除第 1 模態為 0.77 其餘模態均為 0.94 以上，非對角線均趨近於 0。由表 3(b)之 MSF 之對角線值除第 1 模態及第 2 模態比對較差外其餘均趨近 0.97 以上。最大誤差為 38%，可知預測之模態振型有良好之吻合性。

(二) 第 3,4 模態間非共振激振， $f_3 < f_s = 410\text{Hz} < f_4$

(1) 由圖 10 知道實驗與預測之 ODS 振型，其形狀極為相似，但比例上有些許誤差產生。圖 11(a)-(d)為預測所得之模態振型，由於實驗 ODS 與預測部分比對不佳，導致其預測之第 1 模態及形狀與實驗分析所得之形狀吻合不佳，其餘模態比對良好。

(2) 由表 4(a)之 MAC 比對得知對角線值均為 0.87 以上，非對角線均趨近於 0。由表 4(b)之 MSF 之對角線值除第 3 模態比對為 0.61 外，其餘均趨近 0.83 以上。最大誤差為 39%，可知預測之模態振型有良好之吻合性。

由實驗驗證由 ODS 預測模態振型，分別探討共振激振與非共振激振狀態下之模態振型預測，其共振激振與非共振激振狀態下，均可得到適當之模態振型預測；且模態振型預測誤差原因，在靠近節點處因為振幅數值小，而有較大之相對誤差，整體 MAC 及

MSF 則仍不錯，最大在 40% 誤差以內；最後預測模態振型如要準確，則 ODS 實驗量測品質亦應有一定可靠性。

#### 五、結論

本文應用壓電材料樑結構於簡諧外力激振條件下，由操作變形振型之量測進而發展模態振型預測模式，其結論主要如下

1. 成功的以數值分析程式撰寫由壓電材料樑之操作變形振型預測模態振型程式，並以壓電懸臂樑結構進行驗證分析。
2. 由壓電材料樑之數值模擬分析，證實由操作變形振型求取模態振型之可行性，且在共振激振或非共振激振狀態下，均能透過預測程式求得壓電樑之模態振型。
3. 由實際實驗 ODS 代入模態振型預測程式以預測模態振型之實驗驗證分析，在共振激振及非共振激振狀態下，進行由操作變形振型預測壓電樑之模態振型，以驗證模態振型預測程式之適用性及正確性。

#### 六、誌謝

本文由國科會計畫編號：NSC 91-2212-E-020-003，經費補助特此申謝。

#### 七、參考文獻

1. 王栢村，1994，「智慧型材料系統簡介」，噪音會訊，第五期，二月，第 31-36 頁。
2. 彭成鑑，1995，「壓電材料」，科儀新知，第十六卷，第六期，第 18-29 頁。
3. Matsuzaki, Y., 1997, "Review Article: Smart Structure Research in Japan," *Smart Material Structures*, Vol. 6, pp. R1-R10.
4. Johansen, S., and Madsen, K. D., 1992, "Operating Deflection Shapes a Fast Developing Technique," *Proceeding of the 10th International Modal Analysis Conference*, San Diego, California, Vol. 2,

pp. 1181-1188.

5. Hermans, L. Herman, V., Mathieu, L., and Coppens, D., 1997, "Modal Parameter Extraction From In-Operation Data," *Proceeding of the 15th International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, Vol. 1, pp. 531-539.
6. Herman, V., and Hermans, L., 1999, "Applications of Structural Model Identification During Normal Operating Conditions: an Overview of the Eureka Project Sinopsys," *Proceeding of the 17th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, Florida, Vol. 1, pp. 27-34.
7. Wang, B. T., 2001, "Determination of Mode Shapes From The Operational Deflection Shape," *The 8th International Congress on Sound and Vibration*, Hong Kong, China, pp. 1941-1948.
8. 胡華良, 2001, 結構系統於操作狀態下之模態分析, 碩士論文, 國立屏東科技大學, 屏東。
9. 吳盈輝, 2002, 樑結構由操作變形振型之模態振型預測, 碩士論文, 國立屏東科技大學, 屏東。

## Determination of Structural Mode Shape for Piezoelectric Beam in Harmonic Operating Condition

Bor-Tsuen Wang, Po-Hung Chen  
Department of Mechanical Engineering  
National Pingtung University of Science and Technology

### Abstract

This paper presents the mode shape prediction model from operational deflection shape(OD). For the cantilever beam adhered with PVDF sensors in harmonic excitation condition, the vibration analysis of the piezoelectric beam is first introduced to derive its ODS. The mode shape prediction model is then developed. The

ODS of the piezoelectric beam can be numerically or experimentally obtained and input to the prediction program. Results show that the structural mode shapes can be satisfactorily predicted for both on-resonance and off-resonance excitation conditions, respectively. This work improves the conventional modal testing technique that requires the structure in static. The structure can be performed experimental modal analysis in harmonic excitation condition as well.

Key words: harmonic excitation, operational deflection shape (ODS), piezoelectric beam, mode shape.

表 1、第 1 模態共振激振下之理論與預測振型

(a)MAC

預測 理論	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.9998	0.0000	0.0000	0.0001
Mode 2	0.0000	1.0000	0.0001	0.0001
Mode 3	0.0000	0.0001	1.0000	0.0002
Mode 4	0.0000	0.0002	0.0002	1.0000

(b)MSF

預測 理論	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	1.0060	-0.0007	-0.0004	-0.0003
Mode 2	-0.0214	0.9995	-0.0033	-0.0022
Mode 3	-0.0398	-0.0234	0.9992	-0.0071
Mode 4	-0.0108	-0.0676	-0.0267	1.0002

表 2、第 2,3 模態非共振激振下之理論與預測振型

(a)MAC

預測 理論	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.9999	0.0000	0.0000	0.0001
Mode 2	0.0000	1.0000	0.0001	0.0001
Mode 3	0.0000	0.0001	1.0000	0.0002
Mode 4	0.0000	0.0001	0.0002	1.0000

(b)MSF

預測 理論	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.9967	-0.0008	-0.0004	-0.0003
Mode 2	-0.0305	1.0012	-0.0033	-0.0022
Mode 3	0.0036	-0.0301	0.9995	-0.0073
Mode 4	-0.1269	-0.066	-0.0263	1.0002

表 3、第 2 模態共振激振下之實驗與預測振型結果

(a)MAC

預測 實驗	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.7777	0.0005	0.0165	0.0877
Mode 2	0.0333	0.9460	0.0042	0.0008
Mode 3	0.0012	0.0095	0.9713	0.0051
Mode 4	0.0000	0.0002	0.0005	0.9478

(b)MSF

預測 實驗	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.6843	0.0030	-0.0096	-0.0101
Mode 2	0.6803	0.6287	0.0231	0.0046
Mode 3	0.3675	0.1819	1.0197	0.0338
Mode 4	0.1204	-0.0505	0.0486	0.9795

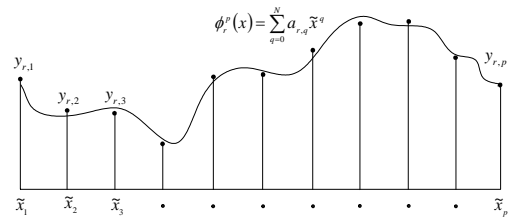


圖 3、 $\phi_r^P(x)$  振型多項式函數嵌合示意圖

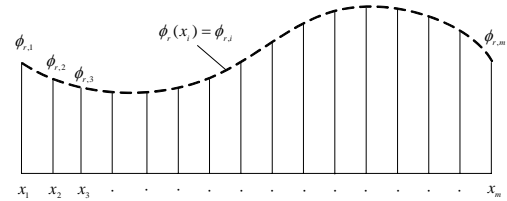


圖 4、 $\phi_{r,P}^P$  模態振型示意圖

表 4、第 3,4 模態非共振激振下實驗與預測振型結果

(a)MAC

預測 實驗	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.8708	0.0034	0.0091	0.0625
Mode 2	0.0115	0.9252	0.0106	0.0001
Mode 3	0.0055	0.0001	0.8620	0.0036
Mode 4	0.0005	0.0000	0.0338	0.9027

(b)MSF

預測 實驗	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	1.0692	0.0105	-0.0045	-0.0098
Mode 2	0.5909	0.8324	0.0234	0.0022
Mode 3	-1.1854	0.0285	0.6108	-0.0329
Mode 4	-0.7927	0.0162	0.2577	1.1077

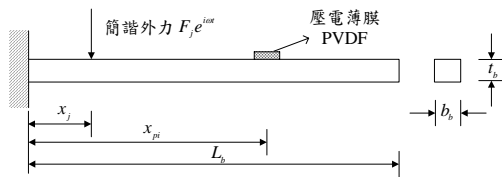


圖 1、懸臂樑之理論分析示意圖

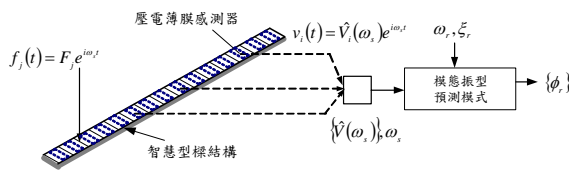


圖 2、模態振型預測示意圖

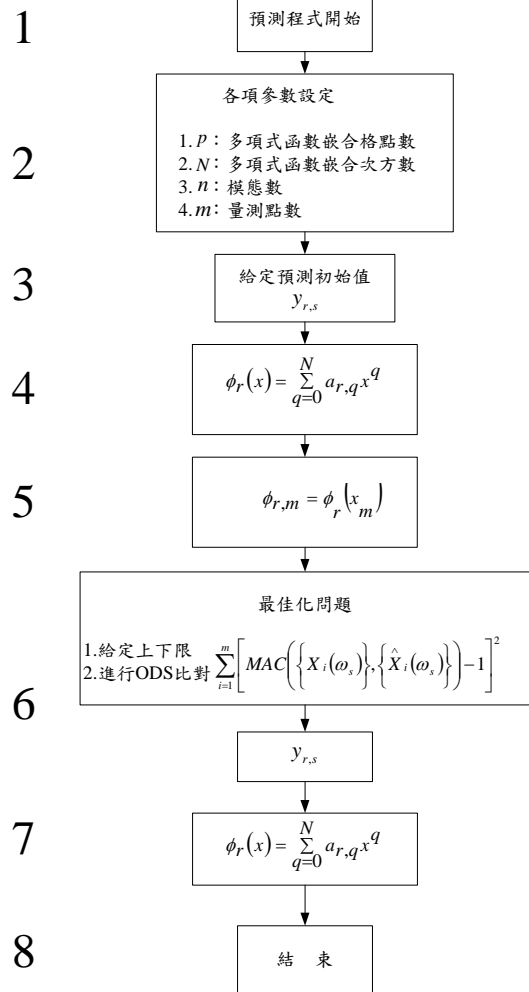
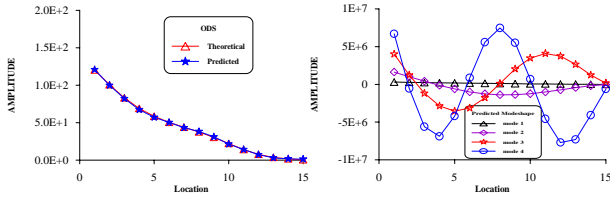
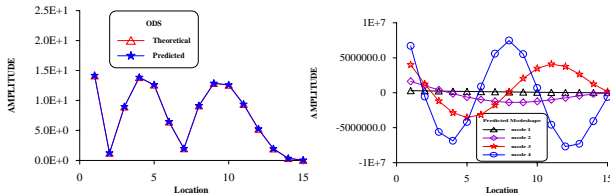


圖 5、預測模式撰寫流程圖



(a)理論與預測之 ODS 振型 (b)預測所得之振型  
圖 6、理論與預測之 ODS 振型比較與預測所得之振型



(a)理論與預測之 ODS 振型 (b)預測所得之振型  
圖 7、第 2,3 模態非共振激振下 ODS 與預測之振型圖

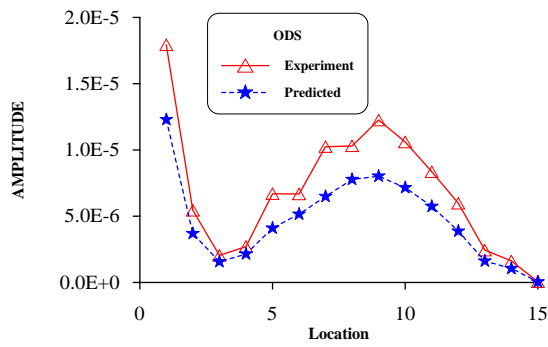


圖 8、第 2 模態共振激振下之實驗與預測 ODS 振型圖

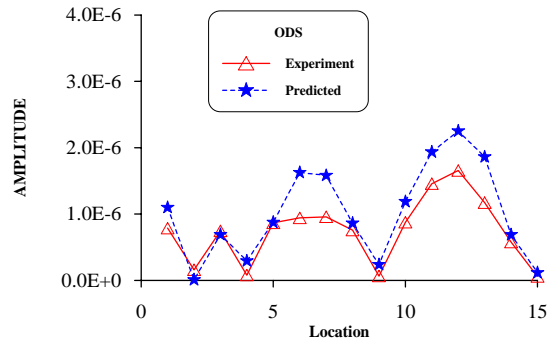
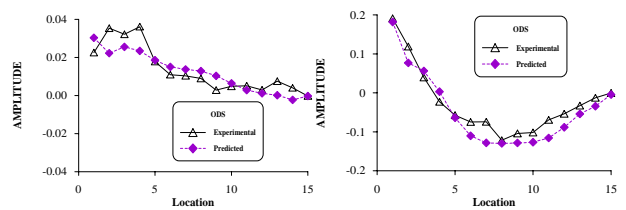
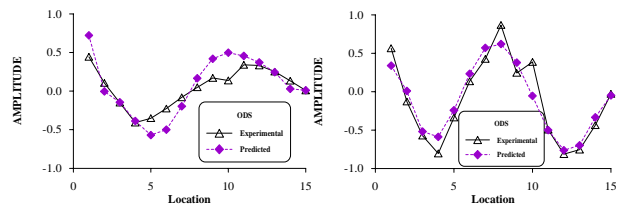


圖 10、第 3,4 模態非共振激振下實驗與預測 ODS 振型圖

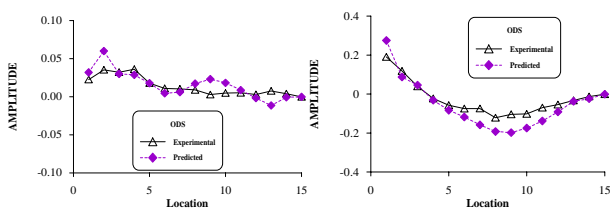


(a)第 1 模態 (b)第 2 模態

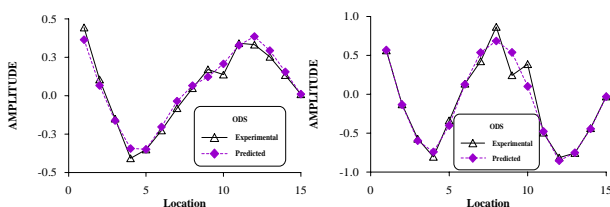


(c)第 3 模態 (d)第 4 模態

圖 11、第 3,4 模態非共振激振下之實驗與預測振型圖



(a)第 1 模態 (b)第 2 模態



(c)第 3 模態 (d)第 4 模態

圖 9、第 2 模態共振激振下之實驗與預測振型圖