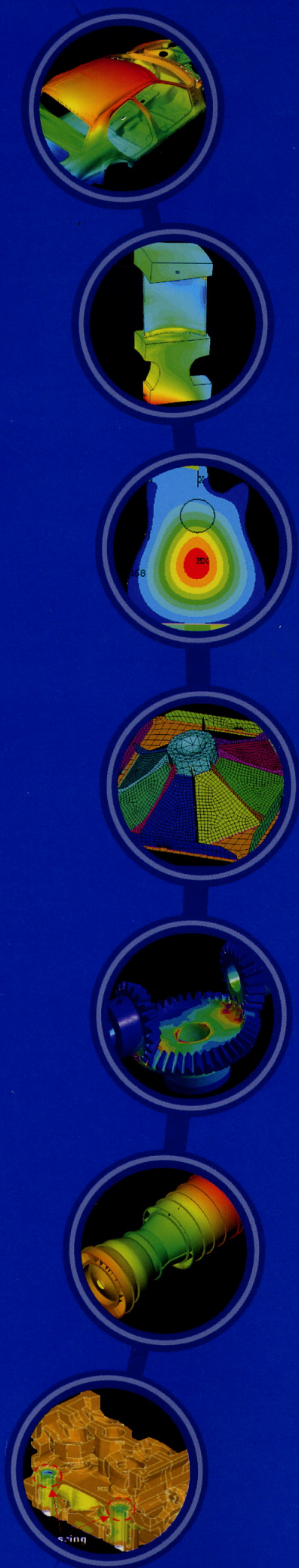


2003 TAIWAN ANSYS USER CONFERENCE



CADMEN

ANSYS 應用論文集

劍湖山王子渡假飯店

2003/11/16~18

主辦：

虎門科技股份有限公司

<http://www.cadmen.com>

複合材料疊層板之靜態分析

胡惠文¹ 王栢村² 蘇敬翔³

¹國立屏東科技大學車輛工程系助理教授

²國立屏東科技大學機械工程系教授

³國立屏東科技大學車輛工程系研究生

摘要

本研究主要是利用ANSYS軟體探討複合材料疊層板之靜態分析，包括單一方向疊層板、對稱疊層板、以及反對稱疊層板。不同疊層板在承受同一平面之靜態負荷時，可能產生之擴張變形、彎曲變形、擴張與彎曲耦合變形，以及在每一疊層產生的應力均將分析探討。本研究亦將比較平板元素、殼元素、與實體元素在的複合材料疊層板分析的使用，分析結果將以古典疊層板理論來驗證。

關鍵詞：複合材料疊層板，對稱與反對稱疊層板，疊層板應力，古典疊層板理論

1. 前言

隨著科技的進步，對於材料的性能也要求愈高，以符合工程應用之需求，因此複合材料也就被發展出來。複合材料具有質輕、機械強度高等優異性質，目前已被廣泛應用在各行各業，如航太、運輸、汽車、船舶及土木工程等領域，甚至在日常生活所需之民生用品、運動器材與休閒用具都可見其芳蹤。

複合材料的材料性質與傳統的均質等向性金屬材料有很大的不同，以連續的纖維強化塑膠為例：其材料結構是由連續的纖維與高分子膠合而成的正交異向性(orthotropic)材料。然而針對不同的工程應用，可以將一層層的單向纖維板疊合成複合層板，使得複合材料受到外界負載作用時，產生的機械行為比一般傳統的均質等向性材料更為複雜。在複合材料疊層板的理論分析中，有不少文獻可供參考。在忽略彎曲延伸耦合變形的複材疊層板問題，Zastrow [1,2,3] 所推導出的理論解已被廣泛的採用。至於考慮彎曲延伸耦合的問題，Becker [4,5,6] 則使用複變法(Complex Potential Method)成功的解析該問題。

ANSYS有限元分析軟體在分析複合材料結構的各種問題上，提供了許多不同的元素。例如一般複合材料薄層平板在受力時的線性彈性變形問題，在ANSYS軟體中可供選擇的元素就有平板元素PLANE42、殼元素SHELL91、SHELL99、以及實體元素SOLID46與SOLID191等元素。其中除了PLANE42只提供二維的平面變形分析外，其他四種元素均可分析三維的變形，在大型的複合材料結構分析，例如載具結構，提供了相當便利多元的選擇。本研究主要是利用ANSYS對複合材料疊層板之靜態分析做探討，包含單一方向疊層板、對稱疊層板及反對稱疊層板，可能產生擴張變形、彎曲變形、彎曲耦合變形與層間應力，並討論ANSYS中之平板元素、殼

元素與實體元素的分析結果，並以古典疊層板理論解的結果來比較驗證，以提供分析不同的複合材料結構，選擇不同元素的參考。

本研究以單向纖維平板、反對稱疊層平板與對稱疊層平板三種複合材料，在承受單向拉伸變形為例，比較ANSYS各種不同元素的分析結果，並以古典複材疊層板理論之解析解檢驗其分析結果。表1、表2所列為三種複合材料疊層平板的材料性質與尺寸規格：

表1. 單向纖維平板規格

定義	規格描述
纖維方向	45°
單層板規格	$L \times W \times t = 10 \times 1 \times 0.01(m)$
單層板材質	縱向楊氏模數 $E_1 = 140GPa$
	橫向楊氏模數 $E_2 = E_3 = 10GPa$
	剪力模數 $G_{12} = 6.9GPa$
	浦松比 $\nu_{12} = 0.3$
負載形式	作用力 $F_0 = 10KN$

表2. [+45/-45]與[±45/0/90]_k疊層平板規格

定義	規格描述
纖維方向	[+45/-45]
疊層板規格	$L \times W \times t = 10 \times 1 \times 0.03(m)$
單層厚度	$t_k = 0.015(m)$
纖維方向	[±45/0/90] _k
疊層板規格	$L \times W \times t = 10 \times 1 \times 0.04(m)$
單層厚度	$t_k = 0.005(m)$
疊層板材質	縱向楊氏模數 $E_1 = 140GPa$
	橫向楊氏模數 $E_2 = E_3 = 10GPa$
	剪力模數 $G_{12} = 6.9GPa$
	浦松比 $\nu_{12} = 0.3$
負載形式	作用力 $F_0 = 10KN$

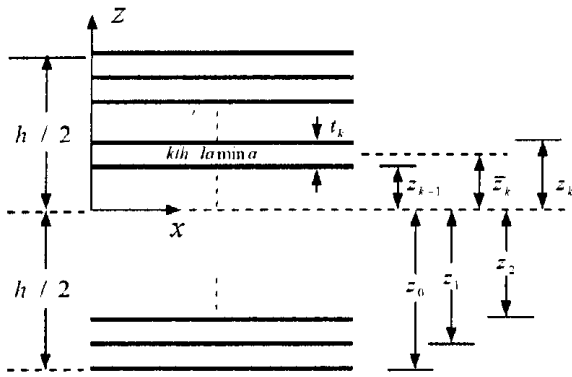


圖1. 疊層平板座標

2. 古典疊層平板理論

在古典疊層平板理論中，則複材疊層板的應變是被假設成連續的。而在層間應力，則由於不同的纖維方向導致內部有不同的材料性質，造成層間應力不連續的情形。因此在第 k 層時的應力，可由以下公式表示[7]：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中， \bar{Q}_{ij} 為第 k 層纖維方向 θ 的勁度矩陣， ε_{ij}^0 則為中央對稱平面上的應變， κ_{ij} 為在中央對稱面上疊層板的曲率， z 為第 k 層中間到中央對稱面上的距離，如圖1所示。矩陣 $[\bar{Q}]$ 是從纖維方向 $\theta = 0^\circ$ 時的勁度矩陣 $[Q]$ 經由座標轉換所獲得的，即：

$$[\bar{Q}] = [T_c]^T [Q] [T_c] \quad (2)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12} E_1 & 0 \\ 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 0 \\ \nu_{12} E_1 & E_2 & 0 \\ 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[T_c] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

在這裡 E_1 為在纖維方向的楊氏模數， E_2 為在膠合物

方向的楊氏模數。在三維情況下，負載與變形的關係，公式(1)可以表示成合力 $\{N\}_k$ 與合力矩 $\{M\}_k$ ，即：

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (6)$$

在這裡 h 為疊層厚度，將式(1)代入(5)和(6)，可得到

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{在這裡 } (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (8)$$

矩陣 A_{ij} 稱為延伸勁度， B_{ij} 為彎曲延伸耦合勁度， D_{ij} 為彎曲勁度。一旦合力 $\{N\}$ 與合力矩 $\{M\}$ 知道， ε_{ij}^0 與 κ_{ij} 可由公式(7)倒置求得：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (9)$$

將公式(9)代入公式(1)，即可求得疊層板中每一層的層間應力。由於本研究採用之例題為單向拉伸變形，所以合力矩 $\{M\} = 0$ ，因此在單一纖維方向平板與對稱疊層平板的問題中，由於 $B_{ij} \neq 0$ ，所以公式(9)可以簡化成 $\{\varepsilon^0\} = [A]^{-1} \{N\}$ ，而反對稱疊層板由於 $B_{ij} \neq 0$ ，所以平板除了平面變形外還有彎曲變形，曲率 $\kappa \neq 0$ 。

3. 有限元素分析模型

圖2 ~ 圖6分別表示各種不同的複合材料疊層平板有限元模型。以下分別就其元素模型、受力與邊界條件的建立說明如下：

3-1 平板元素PLANE42

圖2 所示為二維平板元素PLANE42模擬之單向纖維 0° 、 45° 、 90° 的複合材料平板模型。PLANE42元素具有正交異向性材料(orthotropic)特性，可以針對不同的纖維方向，經由座標轉換來模擬。以拉伸變形的問題為例，可以採用1/4的對稱模型來分析，如圖2 所示，模型下端與左邊分別固定 y 與 x 方向之自由度，拉伸力則平均加在模型右邊。

3-2 殼元素SHELL91與SHELL99

圖3與圖4分別表示三維的殼元素SHELL91與SHELL99模擬的複合材料疊層平板。以拉伸變形的問題為例，模擬單向纖維平板與對稱疊層平板 $[\pm 45/0/90]_s$ 時，由於不會產生彎曲延伸之耦合變形，可以採用1/4的對稱模型來分析，如圖3-(a)、(c)以及圖4-(a)、(c)所示。然而模擬反對稱疊層平板 $[+45/-45]$ 時，會產生彎曲延伸之耦合變形，所以採用全模型，拉伸力則平均加在模型左右兩邊，如圖3-(b)以及圖4-(b)所示。

3-3 實體元素SOLID46與SOLID191

圖5與圖6分別表示三維的實體元素SOLID46與SOLID191模擬的複合材料疊層平板。以拉伸變形的問題為例，模擬單向纖維平板與對稱疊層平板 $[\pm 45/0/90]_s$ 時，由於不會產生彎曲延伸之耦合變形，可以採用1/4的對稱模型來分析，並固定單邊外側節點上 z 方向之自由度，使得模型受拉伸時，平板厚度的在 z 方向的收縮不受約束，如圖5-(a)、(c)以及圖6-(a)、(c)所示。同樣地，模擬反對稱疊層平板 $[+45/-45]$ 時，會產生彎曲延伸之耦合變形，所以採用全模型，如圖5-(b)以及圖6-(b)所示。

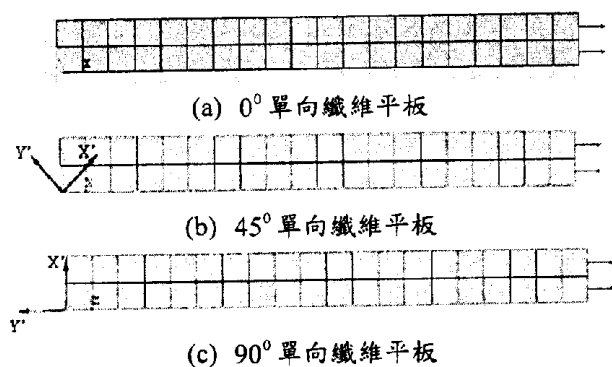


圖2. PLANE42在單向纖維平板之有限元模型

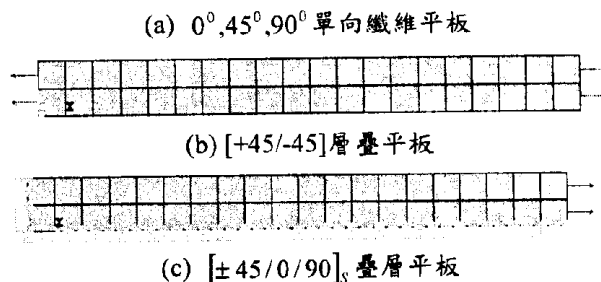


圖3. SHELL91在不同疊層平板之有限元模型

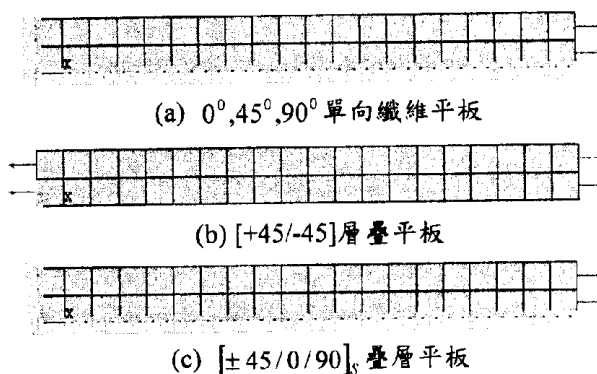


圖4. SHELL99在不同疊層平板之有限元模型

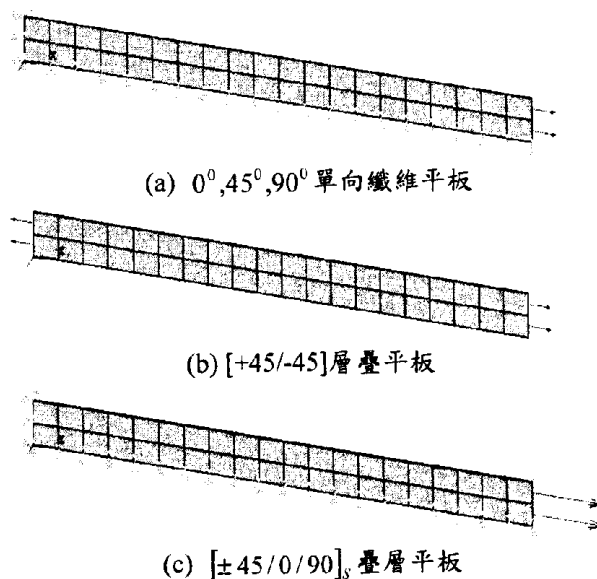


圖5. SOLID46在不同疊層平板之有限元模型

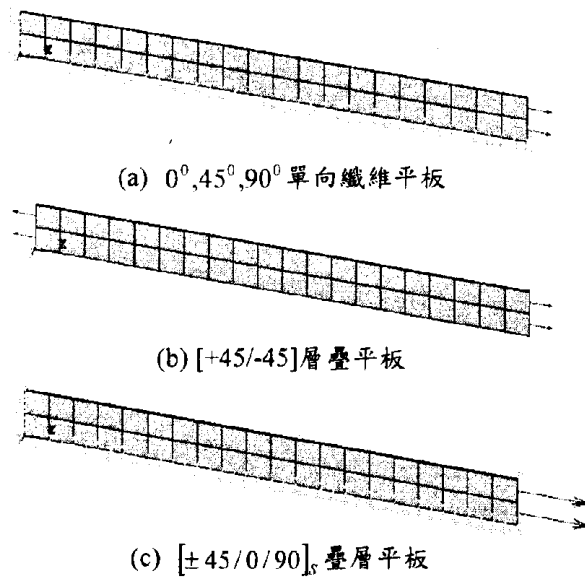


圖6. SOLID191在不同疊層平板之有限元模型

4. 結果與討論

ANSYS與理論解的分析結果，包括應變、位移、層間應力，詳列於表3～表8，其中ANSYS分析值與理論值之差異計算如下：

$$\Delta = \frac{\text{ANSYS值} - \text{理論值}}{\text{理論值}} \quad (10)$$

以下就三種複材疊層平板的拉伸變形的分析結果進行討論。

4-1 45°單向纖維平板之拉伸變形

表3所列為45°單向纖維平板之拉伸變形結果，ANSYS的平板元素PLANE42、殼元素SHELL91、SHELL99以及實體元素SOLID46、SOLID191分析所得之正向應變、剪應變與理論值幾乎沒有差異，縱向位移則有2.5～3.2%的差異，這樣的差異值不大上可以接受。另外，由於單向纖維平板承受-45°的負載，平板在受力方向會產生偏斜的位移而不是均勻的位移。圖7所示為SHELL99元素分析45°單向纖維平板之縱向位移，受力端有明顯的偏斜位移。

4-2 [+45/-45]疊層平板之拉伸變形

表4所列為[+45/-45]疊層平板之拉伸變形結果，ANSYS的殼元素SHELL91、SHELL99以及實體元素SOLID46、SOLID191分析所得之正向應變、剪應變與理論值幾乎沒有差異。然而在層間的橫向應力，SOLID191元素所得到的 σ_{xy} 與理論值明顯不同，理

論上疊層平板的橫向應力應該為0，SOLID191元素卻產生150 (N/m²)的應力。至於縱向層間應力，ANSYS分析與理論值幾乎沒有差異如圖8所示。ANSYS分析的層間剪應力與理論值也只有很少的差異。另外，由於[+45/-45]疊層平板為反對稱，在承受單向拉伸力時會產生彎曲延伸之耦合變形。

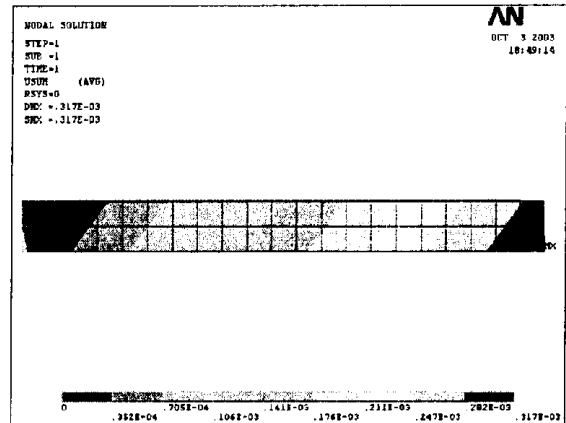


圖7. SHELL99元素分析45°單向纖維平板之縱向位移

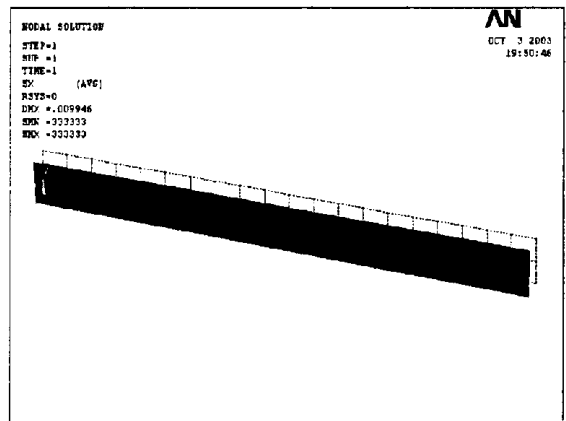


圖8. SHELL99元素分析[+45/-45]之層間縱向應力

4-3 [±45/0/90]s疊層平板之拉伸變形

表4所列為[±45/0/90]s疊層平板之拉伸變形結果，由於[±45/0/90]s為類似等向性材料(quasi-isotropic)，不會彎曲延伸的耦合變形。ANSYS的殼元素SHELL91、SHELL99以及實體元素SOLID46、SOLID191分析所得之正向應變、剪應變、位移與理論值幾乎沒有差異。表6所列為0°纖維層之層間應力，四種元素分析所得之縱向層間應力 σ_{xx} 、剪應力 σ_{xy} 與理論值幾乎一致，然而SHELL91與SHELL99分

析所得之橫向層間應力 σ_{yy} 與理論值的差異高達9.2%，SOLID46與SOLID191分析結果則高出理論值3.3倍，差異太大。檢查 90° 纖維層之層間應力如表7所列，四種元素分析所得之縱向層間應力 σ_{xx} 、橫向層間應力 σ_{yy} 與理論值只有很小的差異，剪應力 σ_{xy} 則與理論值一致。檢查 $\pm 45^\circ$ 纖維層之層間應力如表8所列，四種元素分析所得結果只有橫向層間應力 σ_{yy} 與理論值很小的差異，其他 σ_{xx} 與 σ_{xy} 則與理論值一致。因此， $[\pm 45/0/90]_s$ 疊層平板受拉伸變形時在 0° 纖維層所產生之層間應力並不可靠，對此問題，本研究嘗試三種方法進一步檢驗：(1)將ANSYS元素模型尺寸再細分，分析結果幾乎沒有改變，四種元素在 0° 纖維層所產生之層間應力仍然過高。(2)將1/4對稱模型改為全模型，分析結果仍然沒有改變。(3)將實體元素SOLID46、SOLID191模型由一個元素定義八層單向纖維平板，改為八個元素個別定義八層單向纖維平板，如圖9所示，並細分元素尺寸，分析結果仍然沒有改變。

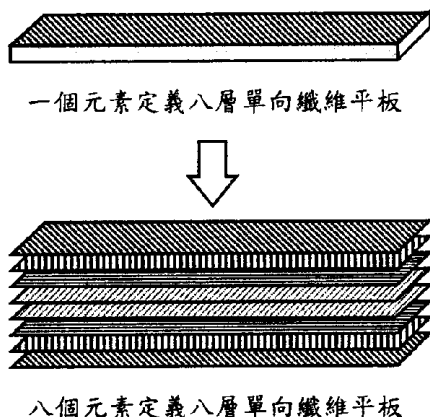


圖9. $[\pm 45/0/90]_s$ 疊層平板實體元素模型之改變

5. 結論

本研究藉由ANSYS有限元模型與古典層板理論探討複合材料疊層平板之拉伸變形，其分析結果獲得以下幾點結論：

- (1) 平板元素PLANE42可以經由座標轉換，成功地模擬二維單向纖維板之靜態特性包括應變與位移。
- (2) 三維殼元素SHELL91與SHELL99可以成功地模擬二維的單向纖維平板以及三維疊層平板之靜態特性，包括應變與位移，然而疊層板 0° 纖維層之層間應力分析並不可靠。
- (3) 三維實體元素SOLID46與SOLID191可以成功地模擬二維的單向纖維平板以及三維疊層板之靜態特性，包括應變與位移，然而疊層板 0° 纖維層之

層間應力分析亦不可靠。

上述結論可提供給讀者在使用ANSYS 6.0版分析複合材料疊層平板與結構時，選用不同元素之參考。

6. 參考文獻

1. Zastrow, U., On the complete system of fundamental solutions for anisotropic slices and slabs: A comparison by use of the slab analogy. *Journal of Elasticity*, 15 [1985] 293-318.
2. Zastrow, U., Basic geometrical singularities in plane-elasticity and plate-bending problems. *Inc. J. of Solids and Structures*, 21 [1985] 1047-67.
3. Zastrow, U., Zum System der Einflußfunktionen für die unendliche anisotrope Scheibe mit statischen und geometrischen Singularitäten. *Ingenieur-Archiv*, 55 (1985) 124-33.
4. Becker, W., A complex potential method for plate problems with bending extension coupling. *Archive of Applied Mechanics*, 61 (1991) 318-26.
5. Becker, W., Closed-form analytical solution for a Griffith crack in a non-symmetric laminate plate. *Comp. Struct.*, 21 (1992) 49-55.
6. Becker, W., Complex method for the elliptical hole in an unsymmetric laminate. *Archeve of Applied Mechanics*. 63 (1993) 159-69.
7. Sun, C.T. "Mechanics of Composite Materials and Laminates" Lecture note, 1998.

STATIC ANALYSIS OF COMPOSITE LAMINATES

Huiwen Hu, Bor-Tsuen Wang, Jing-Shiang Su

National Pingtung University of Science and Technology

Abstract

Static analysis of composite laminates, including unidirectional, symmetric and antisymmetric laminates, was studied by using ANSYS in this paper. Composite laminates were subjected to in-plane static load. According to different laminates, the deformations, including extension, bending and coupling, and laminar stresses were analyzed. The use of plate, shell and solid elements in static analysis of composite laminates was investigated. Classical laminate theory was used to verify the analytical results.

Keywords: composite laminates, symmetric and antisymmetric laminates, laminar stress, classical laminate theory

表3. 45°單向纖維平板之應變與位移

$\theta = 45^\circ$	ε_{xx}	ε_{yy}	γ_{xy}	$u_x(m)$	$u_y(m)$
理論值	6.19×10^{-5}	-1.05×10^{-5}	-4.64×10^{-5}	2.86×10^{-4}	-5.26×10^{-6}
PLANE42	6.19×10^{-5}	-1.05×10^{-5}	-4.64×10^{-5}	2.95×10^{-4}	-5.26×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	3.2	0
SHELL91	6.19×10^{-5}	-1.05×10^{-5}	-4.64×10^{-5}	2.93×10^{-4}	-5.26×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	2.5	0
SHELL99	6.19×10^{-5}	-1.05×10^{-5}	-4.64×10^{-5}	2.93×10^{-4}	-5.26×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	2.5	0
SOLID46	6.19×10^{-5}	-1.05×10^{-5}	-4.64×10^{-5}	2.95×10^{-4}	-5.26×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	3.2	0
SOLID191	6.19×10^{-5}	-1.05×10^{-5}	-4.64×10^{-5}	2.93×10^{-4}	-5.26×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	2.5	0

表4. 反對稱疊層板[+45/-45]之層間應力與層間應變

[+45/-45]	ε_{xx}	ε_{yy}	γ_{xy}	σ_{xx} (N/m ²)	σ_{yy} (N/m ²)	σ_{xy} (N/m ²)
理論值	1.69×10^{-5}	-7.21×10^{-6}	$\mp 6.6 \times 10^{-6}$	3.33×10^5	0	$\pm 7.95 \times 10^4$
SHELL91	1.69×10^{-5}	-7.21×10^{-6}	$\mp 6.6 \times 10^{-6}$	3.33×10^5	0	$\pm 7.97 \times 10^4$
Δ (%)	0	0	0	0	0	0.25
SHELL99	1.69×10^{-5}	-7.21×10^{-6}	$\mp 6.6 \times 10^{-6}$	3.33×10^5	0	$\pm 7.97 \times 10^4$
Δ (%)	0	0	0	0	0	0.25
SOLID46	1.69×10^{-5}	-7.21×10^{-6}	$\mp 6.6 \times 10^{-6}$	3.33×10^5	0	$\pm 7.97 \times 10^4$
Δ (%)	0	0	0	0	0	0.25
SOLID191	1.69×10^{-5}	-7.21×10^{-6}	$\mp 6.6 \times 10^{-6}$	3.33×10^5	1.5×10^2	$\pm 7.98 \times 10^4$
Δ (%)	0	0	0	0	×	0.38

表5. 對稱疊層板[±45/0/90]_N之應變與位移

[±45/0/90] _N	ε_{xx}	ε_{yy}	γ_{xy}	$u_x(m)$	$u_y(m)$
理論值	4.49×10^{-6}	-1.31×10^{-6}	0	4.49×10^{-5}	-1.31×10^{-6}
SHELL91	4.49×10^{-6}	-1.31×10^{-6}	0	4.49×10^{-5}	-1.31×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	0	0
SHELL99	4.49×10^{-6}	-1.31×10^{-6}	0	4.49×10^{-5}	-1.31×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	0	0
SOLID46	4.49×10^{-6}	-1.31×10^{-6}	0	4.49×10^{-5}	-1.31×10^{-6}
Δ (%)	0	0	0	0	0
SOLID191	4.5×10^{-6}	-1.32×10^{-6}	0	4.49×10^{-5}	-1.31×10^{-6}
Δ (%)	0	0.76	0	0	0

表6. 對稱疊層板 $[\pm 45/0/90]_s$ 之 0° 層間應力

$\theta=0^\circ$	σ_{xx} (N/m ²)	σ_{yy} (N/m ²)	σ_{xy} (N/m ²)
理論值	6.29×10^5	3.81×10^5	0
SHELL91	6.29×10^5	4.16×10^5	0
$\Delta(\%)$	0	9.2	0
SHELL99	6.29×10^5	4.16×10^5	0
$\Delta(\%)$	0	9.2	0
SOLID46	6.3×10^5	1.26×10^3	0
$\Delta(\%)$	0.16	×	0
SOLID191	6.3×10^5	1.26×10^3	0
$\Delta(\%)$	0.16	×	0

表7. 對稱疊層板 $[\pm 45/0/90]_s$ 之 90° 層間應力應力

$\theta=90^\circ$	σ_{xx} (N/m ²)	σ_{yy} (N/m ²)	σ_{xy} (N/m ²)
理論值	4.12×10^5	-1.71×10^5	0
SHELL91	4.13×10^5	-1.7×10^5	0
$\Delta(\%)$	0.24	-0.58	0
SHELL99	4.13×10^5	-1.7×10^5	0
$\Delta(\%)$	0.24	-0.58	0
SOLID46	4.04×10^5	-1.71×10^5	0
$\Delta(\%)$	-1.94	0	0
SOLID191	4.03×10^5	-1.71×10^5	0
$\Delta(\%)$	-2.18	0	0

表8. 對稱疊層板 $[\pm 45/0/90]_s$ 之 $\pm 45^\circ$ 層間應力應力

$\theta=\pm 45^\circ$	σ_{xx} (N/m ²)	σ_{yy} (N/m ²)	σ_{xy} (N/m ²)
理論值	1.65×10^5	8.48×10^4	$\pm 1.04 \times 10^5$
SHELL91	1.65×10^5	8.5×10^4	$\pm 1.04 \times 10^5$
$\Delta(\%)$	0	0.24	0
SHELL99	1.65×10^5	8.5×10^4	$\pm 1.04 \times 10^5$
$\Delta(\%)$	0	0.24	0
SOLID46	1.65×10^5	8.5×10^4	$\pm 1.04 \times 10^5$
$\Delta(\%)$	0	0.24	0
SOLID191	1.65×10^5	8.49×10^4	$\pm 1.04 \times 10^5$
$\Delta(\%)$	0	0.12	0