

## 立式轉子系統振動模態分析與設計

## Vibration Modal Analysis and Design of Vertical Rotor System

王栢村<sup>1</sup>, 林朝乾<sup>2</sup><sup>1</sup> 國立屏東科技大學機械工程系教授<sup>2</sup> 國立屏東科技大學機械工程系研究生

## 摘要

本文探討一典型立式轉子系統之結構振動模態分析，以求得轉子系統之軸向、側向及旋轉等三軸向振動模態參數，包括自然頻率及振型，本文先以理論分析建立單自由度系統數學模型，分別求得轉子系統三軸向之振動自然頻率，並應用 ANSYS 軟體，以樑元素建立連續系統之轉子數學模型，以進行振動模態分析，並比較理論與有限元素分析之差異。最後，利用驗證之有限元素模型對轉軸尺寸及轉子位置，進行最佳化設計分析，以期避免轉子系統於運轉狀態之共振，亦即避開臨界轉速之運轉，本文建立之分析方法，可供如渦輪機轉子系統基於振動之設計分析。

關鍵字: 模態分析、自然頻率、最佳化設計、臨界轉速

## 1. 前言

轉子系統在工業界中應用範圍廣，所有運轉機具，轉動件，幾乎都具有轉子元件的存在，於輸送動力的原動機馬達，及泵浦，汽渦輪機，工具機傳動動力系統等，皆是使用轉子系統的裝置，因此轉子系統的模態特性與自然頻率共振的探討，是值得分析及進一步認識。

轉子系統設置，無論是立式或橫式皆有其模態特性，轉子運轉的頻率與轉子自然頻率所產生共振問題，於轉子設計時，通常較少考慮，但於現今設備振動高要求品質下，轉子運轉的最佳情形，轉子系統設計避開轉子本身自然頻率共振區，是必須納入考量的。王[1-2]為 ANSYS 有限元素分析應用及使用範例，配合電腦輔助工程分析之實務與應用，對 ANSYS 有限元素分析作基本實例演練探討。王等人[3]是設計一轉子系統教學模型，對轉子系統轉軸作側向振動模態分析，且對模型臨界轉速進行驗證，完整的應用有限元素理論分析及實驗模態分析驗證。王等人[4]分析樑側向振動模態，應用 ANSYS 於樑元素分析，探討樑結構

三種不同邊界，簡支端，固定端，自由端等情形，對樑元素結構作詳細的模態分析，上述應用樑元素分析轉子系統模態，只探討側向振動，對軸向及旋轉方向未有進一步分析。李及施[5]指出離心幫浦設計，趨高轉速及高性能要求，旋轉機械振動問題對幫浦品質有決定性的影響，所以須要一套完整理論來分析幫浦振動現象，幫浦是典型轉子機械，工業上運用最多的轉子系統，探討此類轉子運轉，幫浦振動分析，實際量測方法。陳[6]探討準確的機械振動量測與機械振動分析需求，是漸增及重要的，量測機械振動正確方式，以得到正確的振動分析資料，達到設備預防成效。轉子系統自然頻率與轉速產生共振，其轉子轉軸產生裂痕是可經振動分析出來，吳及黃[7]和潘及崔[8]對轉子系統有裂縫時的動態分析，探究轉子存在裂縫時運轉分析頻率模式，轉子裂縫模態分析，使能早期預防轉子斷裂。Ku, and Chen, [9]探討轉子軸於軸向有負載時，速度與穩定性的分析，速度與轉子運轉的模態特性，Steidel, [10]指出機械於運轉時，機械振動普遍存在，不只轉子引起的振動，運轉中的機械皆會有振動產生，振動大小會影響機械壽命，探討機械振動發生原因。章等人[11]探討直立式泵轉軸軸裂特性及頻

率變化測試，由泵浦實際測試，瞭解泵浦在不同運轉條件下，泵轉軸功率頻譜，且更進一步測試出轉軸整周軸裂深度變化時，轉軸自然頻率也會變化，王與劉[12]建構一轉子系統，有主軸，聯結器，軸承，馬達等元件，進行轉子系統模態驗證，有助於轉子系統動態特性，臨界轉速，操作變形振型等的了解。

本文主要是由理論模型與有限元素分析作立式轉子系統驗證，探討對立式轉子系統軸向，側向，旋轉方向頻率，有無軸質量比較，並討論實際設計渦輪時，最佳的軸徑與圓盤位置，確保避開自然頻率與渦輪運轉時振動頻率的重合，以防止共振產生，並利用驗證之有限元素模型對轉軸尺寸及轉子位置，進行最佳化設計分析，作為實際設計評估的一項方法，使渦輪能避開臨界轉速運轉。

## 2. 問題定義及訂定分析目標

考慮一立式渦輪機，其示意圖如圖一，假設此渦輪葉片質量  $m = 1000\text{kg}$ ，質量極慣性矩  $J_0 = 500\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，渦輪轉速  $8000\text{rpm}$ ，設置於一鋼軸上，距離軸頂端距離  $a = 2\text{m}$ ，並假設軸上下兩端為固定邊界，軸材料楊氏係數  $E = 209 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ，剪力模數  $G = 80 \times 10^9 \text{N/m}^2$ ，密度  $\rho = 7870 \text{kg/m}^3$ ，軸原始直徑  $d = 0.3\text{m}$ ，軸長度  $L = 3\text{m}$ ，定義軸向座標為  $y$ ，側向座標為  $x$ ，今欲驗證此立式渦輪轉子系統於運轉速度下，是否有共振之虞，故須求得此轉子系統之結構自然頻率，包括軸向 ( $y$ )、側向 ( $x$ )、及扭轉 ( $\theta_y$ ) 三個方向之系統自然頻率。

本文分析目標包括：

- (1) 進行數學模型化，建立此立式渦輪機之軸向 ( $y$ )、側向 ( $x$ )、及扭轉 ( $\theta_y$ ) 振動的單自由度系統數學模式。
- (2) 建立有限元素分析模型，應用 ANSYS 軟體分析求得此連續系統之立式渦輪轉子之三個方向結構自然頻率。
- (3) 探討前述單自由度系統及連續系統數學模型之差異，並驗證 SDOF 系統模型之合理性。
- (4) 探討此渦輪機尺寸，包括軸徑  $d$ ，渦輪轉子位置  $a$  對結構自然頻率之影響並進行最佳化分析，求

得避免共振之尺寸設計。

## 3. 單自由度離散系統之理論分析

本節將探討以單自由度離散系統對立式渦輪轉子系統，進行數學模型化，推導其系統運動方程式，並求得其系統自然頻率，分別考慮軸向 ( $y$ )，側向 ( $x$ )，及扭轉 ( $\theta_y$ ) 三個方向之振動問題。

### 3-1 軸向振動分析

圖 2(a) 為原始立式渦輪轉子系統，假設轉子受到一軸向負荷  $F_y$ ，由靜力分析可求得渦輪轉子之垂直位移：

$$\delta_y = \delta_{y1} + \delta_{y2} = \frac{F_y a}{AE} + \frac{F_y b}{AE} \quad (1)$$

其中， $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ，為軸之截面積，若以如圖 2(b) 之質塊與彈簧等效系統取代，可得

$$k_{y1} = \frac{AE}{a} \quad (2)$$

$$k_{y2} = \frac{AE}{b} \quad (3)$$

則可進一步簡化圖 2(b)，如圖 2(c) 之等效系統，其中，

$$k_y = k_{y1} + k_{y2} \quad (4)$$

則圖 2(c) 系統之其運動方程式，可推導如下：

$$m\ddot{y} + k_y y = F_y(t) \quad (5)$$

此軸向振動系統自然頻率得：

$$\omega_y = 2\pi f_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}} \quad (6)$$

在此須注意，此單自由度系統模擬假設軸質量效應可忽略，亦即適用於渦輪轉子質量  $m$ ，遠大於軸質量，只考慮軸之軸向撓性變形效應。

### 3-2. 側向振動分析

圖 3(a) 為原始渦輪轉子系統，假設轉子受到一  $x$  方向負荷  $F_x$  如圖示，由靜力分析可得此渦輪轉子位置之側向位移如下 [13]：

$$\delta_x(x=a) = \frac{F_x b^2 a^2}{6EIL} \left( \frac{3a}{L} - \frac{(3a+b)a}{L^2} \right) \quad (7)$$

其中， $I = \frac{\pi d^4}{64}$  為軸之截面積慣性矩。若以圖 3(b) 之質塊與彈簧等效系統取代，可得

$$k_x = \frac{F_x}{\delta_x} \quad (8)$$

則圖 3(b) 之運動方程式，可推導如下：

$$m\ddot{x} + k_x x = F_x(t) \quad (9)$$

所以此渦輪轉子系統之側向振動自然頻率為：

$$\omega_x = 2\pi f_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad (10)$$

在此也應注意，軸質量效應也是忽略未納入考慮。

### 3-3. 扭轉振動分析

此立式渦輪轉子系統除了前述之軸向振動(axial vibration)及側向振動(lateral vibration)分析，尚須考慮旋轉(rotational)或扭轉(torsional)振動分析。如圖 4(a) 令原始渦輪轉子受到一  $y$  方向力矩  $M_y$ ，渦輪轉子則有  $\theta_y$  之角度變化，由靜力分析可得：

$$\theta_y = \theta_{y1} + \theta_{y2} = \frac{M_y a}{GJ} + \frac{M_y b}{GJ} \quad (11)$$

其中， $J = \frac{\pi d^4}{32}$  為軸截面之極慣性矩， $G$  為剪力模數，

如圖 4(b) 剛性圓盤及旋轉彈簧等效系統取代，可得

$$k_{\theta 1} = \frac{GJ}{a} \quad (12)$$

$$k_{\theta 2} = \frac{GJ}{b} \quad (13)$$

可再進一步簡化圖 4(b)，如圖 4(c) 之等效系統，其中

$$k_{\theta} = k_{\theta 1} + k_{\theta 2} \quad (14)$$

則圖 4(c) 系統之運動方程式如下：

$$J_0 \ddot{\theta} + k_{\theta} \theta = M_y(t) \quad (15)$$

所以此渦輪轉子系統之扭轉振動自然頻率為：

$$\omega_{\theta} = 2\pi f_{\theta} = \sqrt{\frac{k_{\theta}}{J_0}} \quad (16)$$

其中， $J_0 = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{8} m d^2$  為渦輪轉子之質量慣性矩。

以上所建立之軸向，側向及扭轉三個方向振動之單自由度離散系統數學模型，綜合討論如下：

1. 三種模型均忽略軸質量，亦即適用於渦輪轉子質量遠大於軸質量。
2. 模型中均只考慮軸之撓性變形，並以等效彈簧  $k_x$ 、 $k_y$  或  $k_{\theta}$  分別代表軸之剛性，而渦輪轉子假設為剛性質塊或剛性圓盤。
3. 三個模型分別是獨立的，也分別代表此渦輪轉子系統主要的三個振動特性，有助於快速評估轉子系統之振動行為。

### 4. 有限元素分析

不同於前節以單自由度離散系統模擬，本節將探討以有限元素分析，以連續系統模擬分析此立式渦輪轉子系統。對應於圖 1 之立式渦輪轉子系統，所建立

之理念有限元素模型如圖 5，圖中  $x$ 、 $y$  為絕對座標，

$x$ 、 $y$ 、 $z$  為三維樑元素(BEAM4)之元素座標，依有

限元素模型 4 項要點綜合說明如下：

1. 元素型式：本文分別以三維樑元素(BEAM4)及質量元素(MASS21)，模擬軸及渦輪轉子。就三維樑元素(BEAM4)所須設定之幾何物理常數(real constant)包

$$\text{括：} A = \frac{\pi d^2}{4}, h_y = d, h_z = d, I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi d^4}{64}。$$

就質量元素(MASS21)，包含三維軸向及三維旋轉自由

度，所須設定之幾何物理常數(real constant)包

$$\text{括：} m_x = m_y = m_z = m, I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{J_0}{2}, I_{xy} = J_0, \text{ 其}$$

中， $J_0 = 500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  如問題說明。

2. 模型元素分割：如圖 5 所示沿軸長度方向，共分成 11 個節點，元素①-⑩為三維樑元素(BEAM4)，元素⑪為質量元素(MASS21)，於節點 6 之位置。

3. 位移限制：依結構系統實際邊界，在上下兩端均為固定端，因此設定節點①及⑪所有自由度為零，也

就是  $u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ 。

4. 負荷條件：在此模擬結構模態分析，免設定。

在此須注意，於 ANSYS 軟體應用分析中，為配合後續之最佳化分析於下節討論，必須以參數化方式，建立分析程式。

## 5. 渦輪轉子尺寸最佳化設計

本文探討立式渦輪轉子系統，基於振動特性之最佳化設計，由問題說明已知渦輪運轉轉速為 8000rpm 則其對應之轉速頻率如下：

$$f_s = \frac{\text{rpm}}{60} = \frac{8000}{60} = 133 \text{ Hz} \quad (17)$$

$f_s$  即為系統之激振頻率，由振動理論[2]得知，若激振頻率  $f_s$  與結構系統之自然頻率，如第二節求得之

$f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_\theta$ 、相等或相近時，則會有共振(resonance)

現象，造成系統有較大位移響應，容易引起疲勞破壞，故基於振動之設計準則，在適當之設計結構系統，使得結構系統自然頻率遠離激振頻率，由前人經驗建議：

$$f_s < 0.6 f_n \quad (18)$$

或

$$f_s > 1.4 f_n \quad (19)$$

本文假設軸長度  $L$  固定，渦輪轉子， $m$ 、 $J_0$  均為

已知，擬確認原始尺寸軸徑  $d = 0.3 \text{ m}$  及渦輪轉子位置  $a = 1.5 \text{ m}$ ，是否有共振之虞慮。設計分析流程如圖 6，由 ANSYS 有限元素分析與單自由度(SDOF)系統進行模型驗證，再由式(18)及式(19)判斷是否產生共振，如會有共振，則重新選擇軸徑  $d$  及渦輪轉子位置  $a$ ，直到符合式(18)及(19)之條件。

定義最佳化問題如下：

目標函數：

$$Q = \left( \frac{f_s - 0.6 f_1}{f_s} \right)^2 \quad (20)$$

設計變數：

$$0.01 < d < 1 \quad (21)$$

$$1 < a < 2.9 \quad (22)$$

此最佳化問題旨在找到設計變數  $d$ 、 $a$ ，使得目標函數  $Q$  為最小，此目標函數以最小平方誤差定義，

為轉子系統第 1 個自然頻率  $f_1$ ，應符合  $f_s < 0.6 f_1$  條

件。在此應注意本文僅考慮振動因素之設計分析理念，實務上仍應加入應力分析，本文忽略此部份之探討。

## 6. 結果與討論

### 6-1、單自由度離散系統與樑連續系統之比較分析

表 1 所示為引用第二節單自由度系統代入原始設計尺寸之軸向( $f_x$ )、側向( $f_y$ )、扭轉( $f_\theta$ )自然頻率，

得知  $f_x = 122 \text{ Hz} \approx f_s = 133 \text{ Hz}$ ，故此轉子系統有共振

之虞慮。若以第三節建立之有限元素模型進行分析，但忽略軸質量，由表 1 可知，三個方向自然頻率完全對應，且誤差為 0%，若加入軸質量效應，則側向振動自然頻率差異最大有 20.70%，軸向振動自然頻率差異有 19.8%，而扭轉自然頻率誤差僅 0.62%，此乃因轉子在有限元素模型仍以剛體圓盤考慮之故。

進一步探討樑連續系統之自然頻率，如表 2 為 1000Hz 以下之考慮軸無質量及有質量之比較，討論如下：

1. 第一個模態為第一個對  $y$  軸扭轉模態

(1<sup>st</sup>  $y$  torsional)，軸有無質量之差異僅 0.62%，此乃因轉子仍假設為剛體圓盤。

2. 第二、三模態，分別為第一個  $x$  及  $z$  方向側向彎曲模態，圖 7(b)、(c) 為其對應之模態振型，此二個頻率相等乃因軸對稱之故，此自然頻率為 97.010 Hz，不吻合避免共振條件，故有共振之虞。

3. 第四、五個模態，頻率也相等，分別代表第二個  $x$  及  $z$  方向側向彎曲模態，其對應模態振型如圖 7(d)、(e)，軸質量效應減少約 7.21%。

4. 第六個模態為第一個軸向振動模態，有無軸質量有 19.8% 之差異。

由以上討論可知軸質量效應影響轉子系統自然頻率甚鉅，SDOF 系統僅適於快速評估，欲有較精確評估，應納入軸質量效應，以樑之連續系統模擬較適合。

## 6-2、渦轉子尺寸對振動特性之影響

表 3 為固定  $d=0.3\text{m}$ ，變化  $a$  由 1.0~2.9m，轉子系統前 6 個自然頻率總表，可觀察知：

1.  $a \leq 2.8\text{m}$ ， $f_1$  為第一個對  $y$  軸扭轉模態， $f_2$ 、 $f_3$  為第一個  $x$  及  $z$  方向側向彎曲模態。

2.  $a = 2.9\text{m}$  時， $f_1$ 、 $f_2$  為第一個  $x$  及  $z$  方向側向彎曲模態， $f_3$  才是為第一個對  $y$  軸扭轉模態。

3. 因  $a=1.5\text{m}$  為中心點，所以如  $a=1.6\text{m}$  及  $1.4\text{m}$ ，呈對稱，又如  $a=1.0\text{m}$  及  $2.0\text{m}$ ，亦幾乎是對稱。

4. 就  $f_s = 133\text{Hz}$ ，要滿足避免共振條件  $f_s < 0.6f_n$  及  $f_s > 1.4f_n$ 。

$$\frac{f_s}{0.6} < f_n \Rightarrow \frac{133}{0.6} = 221 < f_n \quad (23)$$

$$\frac{f_s}{1.4} > f_n \Rightarrow \frac{133}{1.4} = 95 > f_n \quad (24)$$

也就是  $f_n$  不能為 95~221Hz 之間，以  $d=0.3\text{m}$  無法適度滿足此條件。

表 4 為固定渦輪轉子位置  $a=1.5\text{m}$ ，變化軸徑  $d=0.1\sim 1.0\text{m}$ ，前 6 個自然頻率總表，可觀察得知，各模態順序皆相同，也就是  $f_1$  為第一個對  $y$  軸扭轉模態(1<sup>st</sup>  $y$  torsional)， $f_2$ 、 $f_3$  為第一個  $x$  及  $z$  方向側向彎曲模態，同時可觀察得知當  $a=0.5\sim 0.6\text{m}$  時，存在一最佳的軸徑  $d$ ，使得  $f_1 > 221\text{Hz}$ ，可滿足避免共振條件。

## 6-3、最佳化設計分析

由前述渦輪轉子尺寸對振動特性之影響，本節將以第 5 節建立之最佳化問題，應用 ANSYS 軟體最佳化分析模擬，對軸徑  $d$  及渦輪轉子位置  $a$  進行尺寸最佳化設計，軸徑  $d$  由前節分析令  $0.5\text{m} < d < 0.6\text{m}$ ， $1.0\text{m} < a < 2.9\text{m}$ ，表 5 為原始尺寸與最佳化結果之比較，最後選擇為  $a=2.3388\text{m}$ 、 $d=0.51624\text{m}$ ，目標

函數為  $0.4067 \times 10^{-4}$ ，也就是  $f_1 \approx \frac{f_s}{0.6} = 221\text{Hz}$ ，已達

到避免共振之條件如式(23)。

## 7、結論

本文首先探討立式渦輪轉子系統之振動模態分析，分別以單自由度離散系統，及樑連續系統兩種數學模型，求得轉子系統之振動模態特性，以進行渦輪轉子尺寸之最佳化設計，綜合討論如下：

1. 單自由度系統忽略軸質量下可求得轉子系統之軸向，側向及扭轉振動自然頻率，可適用於快速初步評估。
2. 樑之連續系統可包含軸質量效應，可較精確，可得系統振動模態，如第 2 個  $x$  及  $z$  方向側向彎曲模態。
3. 軸質量效應對軸向及側向振動頻率，有約 20% 之差異，故設計分析應納入考慮。
4. 為避免轉子系統之共振，軸徑由 0.3m 加大至 0.51m，渦輪位置由  $a=1.5\text{m}$  移至  $a=2.33\text{m}$ 。

5. 本文建立了結構系統基於振動考慮之設計分析流程，未來可應用於其他結構。

## 8、參考文獻

1. 王栢村，2001，「ANSYS 有限元素分析應用實例」，屏東科技大學。
2. 王栢村，2001，「電腦輔助工程分析之實務與應用」，全華科技股份有限公司，台北。
3. 王栢村，蘇威全，辜永吉，楊清賢，1998，轉子系統教學模型之設計製作與臨界轉速之驗證，專題報告，屏東科技大學。
4. 王栢村，楊清賢，辜永吉，蘇威全，1998，應用 ANSYS 於均勻樑之側向振動模態分析，專題報告，屏東科技大學。
5. 李安謙，施元斌，1995，「離心幫浦之旋轉機械振動分析」，*機械工業*，146 期，第 165-178 頁。
6. 陳興，1995，「振動量測」，*機械月刊*，第 21 卷。第 11 期，第 184-202 頁。
7. 吳明川，黃世欽，1993，「具橫向裂縫轉子系統之動態響應與穩定性分析」，*中國機械工程學會第十屆學術研討會*，第 601-608 頁。
8. 潘育文，崔兆棠，1995，「含裂縫的轉子系統之動態分析」，*中國機械工程學會第十二屆學術研討會*，第 549-557 頁。
9. Ku, D. M, and Chen, L. W., 1994, "Stability And Whirl Speeds Of Rotating Shaft Under Axial Loads", Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol 9, pp. 111-123.
10. Steidel, Jr., 1989, "An Introduction to Mechanical Vibrations", John Wiley & Sons .
11. 章少衡，簡明溫、林正彥、洪春長、謝其懋，1997，「簡易單級直立式泵轉軸軸裂模擬及振動測試」，*台電工程月刊*，第 584 期，第 104-109 頁。
12. 王栢村，劉健烽，2002，「轉子系統之模態特性及動態響應」，*中華民國音響學會第十五屆學術研討會*，論文編號 E1-4。
13. 小栗富士雄，小栗達男，共著，張兆豐主編，1984，*標準機械設計圖表便覽*，改新增補 2 版，台隆書店，第 5-3 頁。

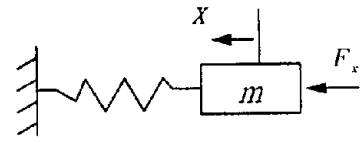
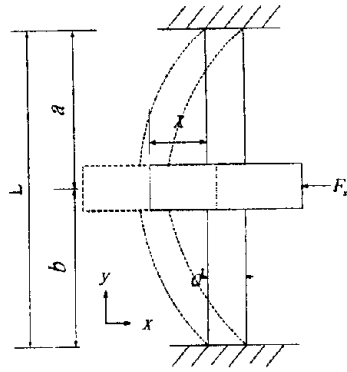
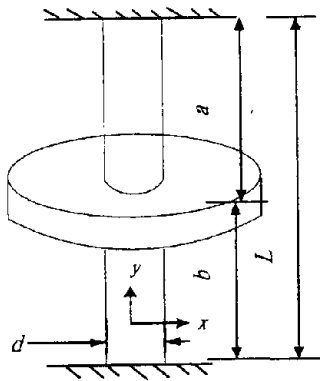
## Vibration Modal Analysis and Design of Vertical Rotor System

**Bor-Teuen Wang, Chao-Chien Lin**  
Department of Mechanical Engineering National  
Pingtung University of Science and Technology

### Abstract

This paper presents the structural modal analysis for a typical vertical rotor system by using finite element method. The axial, lateral and torsional vibration modal parameters, including natural frequencies and mode shapes, of the rotor system are to be determined. First, the SDOF mathematical model for the tri-axial vibration of the rotor is constructed to obtain their natural frequencies. By the adoption of ANSYS software, the 3D beam elements are used to build the continuous rotor model for modal analysis. Both SDOF theoretical analysis and finite element analysis results are compared and discussed for the differences between them. Finally, the theoretically validated finite element model is adopted to perform optimum design analysis for shaft dimensions and the rotor location. The design objective is to avoid resonance operating condition, i.e. operating in critical speed of the rotor system. The developed analytical method can be applied to the design analysis of rotor system for vibration consideration.

Key words: Modal analysis, Natural frequencies, Optimum design, Critical speed

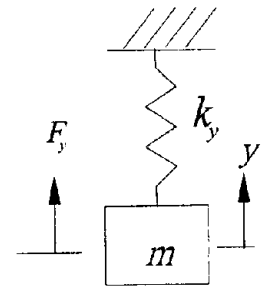
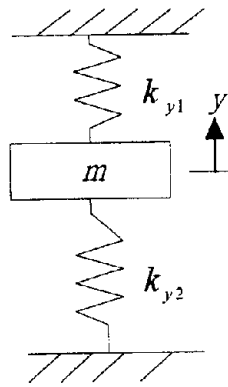
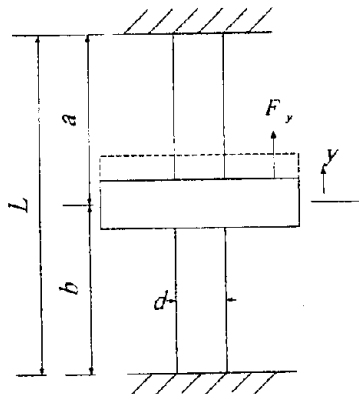


(a)立式渦輪轉子之側向振動

(b)質塊彈簧等效系統

圖 1、立式渦輪轉子系統示意圖

圖 3、單自由度側向振動系統模擬示意圖

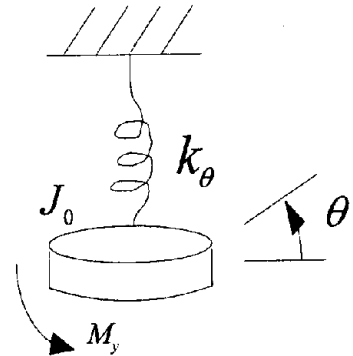
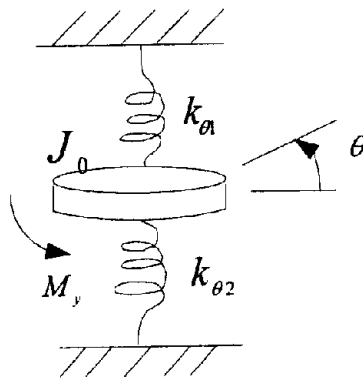
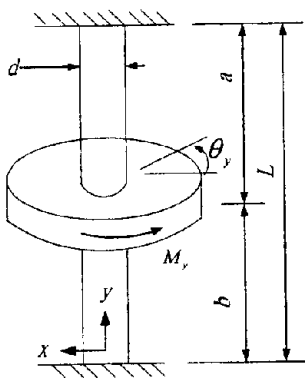


(a)立式渦輪轉子之軸向振動

(b)質塊及雙彈簧等效系統

(c)質塊彈簧等效系統

圖 2、單自由度軸向振動系統模擬示意圖



(a)立式渦輪轉子之扭轉振動

(b)質塊及雙扭轉彈簧等效系統

(c)質塊扭轉彈簧等效系統

圖 4、單自由度扭轉振動系統模擬示意圖

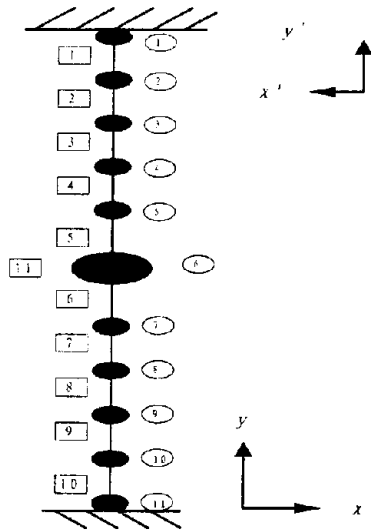


圖 5、立式渦輪轉子有限元素模型示意圖

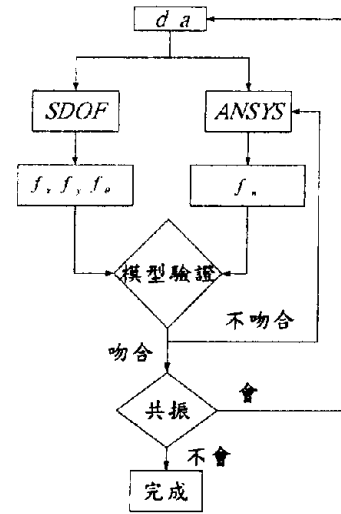
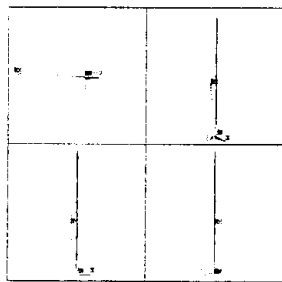
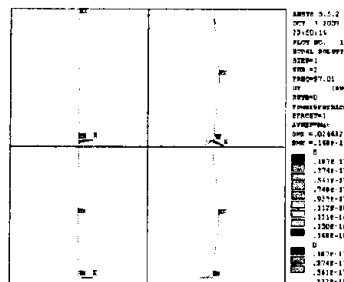


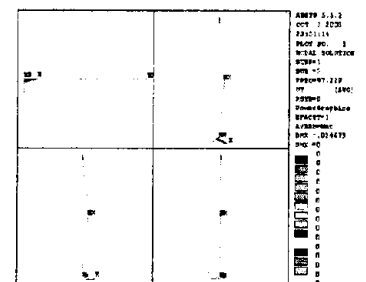
圖 6、設計分析流程



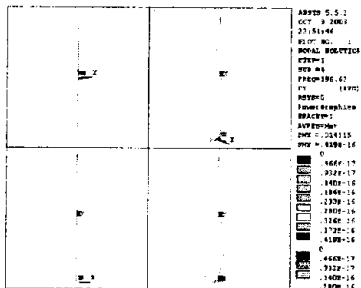
(a) mode 1: 1<sup>st</sup> y-torsional mode



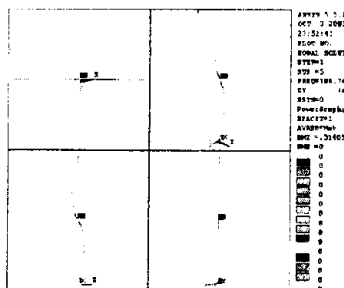
(b) mode 2: 1<sup>st</sup> x-bending mode



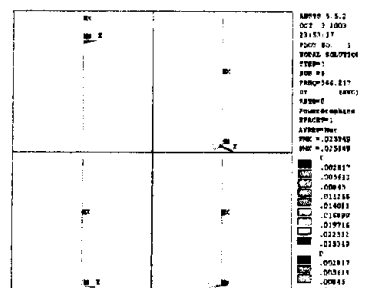
(c) mode 3: 1<sup>st</sup> z-bending mode



(d) mode 4: 2<sup>nd</sup> x-bending mode



(e) mode 5: 2<sup>nd</sup> z-bending mode



(f) mode 6: 1<sup>st</sup> y-axial mode

圖 7、立式渦輪轉子系統模態振型圖

表 1、單自由度 SDOF 系統與樑連續系統自然頻率比較:

系統	$f_{\theta y}$ (Hz)	$f_x$ (Hz)	$f_y$ (Hz)
SDOF	65.5529	122.34	706.364
Beam(無軸質量)	65.5529	122.34	706.364
error	0%	0%	0%
Beam(有軸質量)	65.146	97.01	566.220
error	0.62%	20.70%	19.8%

表 2、樑連續系統有無軸質量系統自然頻率比較:

mode	Beam(有無質量)頻率 Hz		差異 error(%)	物理意義
	無質量	有質量		
1	65.553	65.146	0.62%	1 <sup>st</sup> y torsional
2	122.34	97.010	20.70%	1 <sup>st</sup> x bending
3	122.34	97.229	20.52%	1 <sup>st</sup> z bending
4	211.91	196.630	7.21%	2 <sup>nd</sup> x bending
5	211.91	196.740	7.16%	2 <sup>nd</sup> z bending
6	706.34	566.220	19.8%	1 <sup>st</sup> y axial



表 3、軸徑  $d=0.3\text{m}$ ，不同渦輪位置  $a$  之系統自然頻率(Hz)

$a$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
1.00000	69.0972	102.486	102.676	232.420	232.857	395.834
1.10000	67.5933	100.442	100.643	217.984	218.252	433.552
1.20000	66.4891	98.9716	99.1879	208.147	208.471	480.158
1.30000	65.7330	97.8302	98.0311	201.614	201.747	534.523
1.40000	65.2914	97.2719	97.4854	197.910	197.969	567.479
1.50000	65.1465	97.0100	97.2290	196.630	196.740	566.220
1.60000	65.2914	96.0662	97.0185	197.706	198.000	567.479
1.70000	65.7327	96.7161	96.7429	201.227	201.341	545.108
1.80000	66.4892	97.8818	97.8818	207.396	207.396	492.479
1.90000	67.5931	99.4973	99.5058	216.665	216.668	443.452
2.00000	69.0973	101.555	101.594	229.997	230.020	403.671
2.10000	71.0793	104.089	104.092	248.823	248.982	371.739
2.20000	73.6574	107.142	107.142	275.251	275.251	342.516
2.30000	77.0117	110.689	110.732	307.469	307.472	325.274
2.40000	81.4300	114.675	115.117	295.313	297.182	373.094
2.50000	87.3988	120.127	120.151	279.569	282.205	459.541
2.60000	95.8159	126.804	126.920	270.350	271.778	585.193
2.70000	108.567	134.400	134.799	262.060	263.300	560.705
2.80000	130.562	143.426	143.904	265.636	266.173	531.959
2.90000	152.349	152.397	181.396	311.526	312.475	493.537

表 4、渦輪位置  $a=1.5\text{m}$ ，不同軸徑  $d$  之系統自然頻率(Hz)

$d$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
0.100000	7.28309	13.1476	13.1476	23.3579	23.3579	206.318
0.200000	29.0987	48.0969	48.0981	91.1698	91.1719	421.660
0.300000	65.1465	97.0100	97.2290	196.630	196.740	566.220
0.400000	114.294	151.068	151.891	329.470	329.647	667.810
0.500000	173.787	207.475	207.475	477.424	477.424	737.922
0.600000	238.795	264.252	264.252	630.142	630.142	771.337
0.700000	302.966	318.566	319.624	778.522	779.298	802.115
0.800000	360.039	372.751	372.751	834.267	920.019	920.019
0.900000	406.775	424.416	425.918	836.457	1050.60	1050.94
1.00000	440.558	477.537	483.854	864.251	1104.25	1172.39

表 5、渦輪位置  $a$  與軸徑  $d$  之最佳化結果

	$a(\text{m})$	$d(\text{m})$	$f_s$ (Hz)	$1^{st}$ $y$ torsional	$1^{st}$ $x$ bending	$1^{st}$ $z$ bending	$2^{nd}$ $x$ bending	$2^{nd}$ $z$ bending	$1^{st}$ $y$ axial
條件	$1 < a < 2.9$	$0.01 < d < 1$	$\text{rpm}/60$	$f_n$ 不可介於 95-221Hz 之間					
原始	1.5	0.3	133	65.1465	97.0100	97.2290	196.630	196.740	566.220
最佳化	2.3388	0.51624	133	221.653	234.328	235.557	604.777	615.670	736.930