

基座激振懸臂樑之模型驗證與振動教學展示

王栢村¹、許淵智¹、李昆達²

¹ 國立屏東科技大學機械工程系

² 金頓科技股份有限公司

摘要

本文主要建構懸臂樑含基座理論模型進行模型驗證，並搭配手提式振動示範機實際激振懸臂樑以作為振動教學示範。文中主要以實驗模態分析技術所求得結構之自然頻率及對應模態振型為依據，並以有限元素分析技術建構有限元素模型，進行有、無加速度規含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑的模型驗證，最後以手提式振動示範機實際激振有、無加速度規懸臂樑並探討其差異。文中所使用實驗方法有聲音量測技術和實驗模態分析技術；在理論分析，首先以有、無加速度規自由樑理論模型進行模型驗證，以確認樑及加速度規之等效材料參數，接著懸臂樑固定邊界理論模型會以「簡化固定邊界」懸臂樑理論模型和「含接觸效應之實際夾持邊界」懸臂樑理論模型，進行邊界和接觸模擬確認。最後以含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑理論模型以簡諧分析進行響應預測，再以實際激振進行響應預測驗證，使之為振動教學示範教案。

關鍵字：模型驗證、簡諧激振、振動教學

1. 前言

結構受一激振頻率且接近於該結構之自然頻率時，會產生較大振幅之振動，該現象稱之為共振，然而共振現象往往會導致結構鬆脫、損裂、破壞，要如何避開結構的共振，為目前學、業界所要探討目標之一。因此振動是值得去探討，因此本文以簡單懸臂樑結構搭配有限元素分析進行振動教學示範，使學習者能輕易了解結構實際振動之情形。

由於現今科技快速發展，各種產品都講求品質與效能，要如何確保產品之品質與效能，往往會在開發設計階段時，運用不同的環境試驗，如衝擊、振動、落下、溫溼度等，以確保產品之品質與效能，因此林[1]文中說明產品不斷的推陳出新，使用者對產品品質

要求也越高，因此在產品量產前，廠商會對產品進行環境應力測試，以確保產品在運送和使用過程中的可靠度。許和廖[2]指出環境應力測試目的為瞭解產品對外在環境所激發出的影響，並在設計階段進行改善，而產品會遭受到的環境因子有振動、衝擊和落下等。

倘若能以電腦軟體模擬分析和實際觀看產品受激振時之響應，如此一來對於振動之特性便能更深入了解。運用電腦軟體模擬振動響應前，往往需要代表實際結構之等效模型，本文模型驗證流程理念主要由Wang et al.[3]得知模型驗證流程和模型更新流程，其為以FEA和EMA所得到之模態參數進行比較驗證，如發現比較結果吻合，則可由模型驗證所得到的等效性模型做更進一步的設計變更或更新。王等人[4]文中說明結合有限元素分析及傳統實驗模態分析，對振動試驗機之垂直輔助平台結構進行模型驗證，得到了垂直平台之等效模型。Hu et al.[5]探討以EMA和FEA取得複合材料的等效性模型，故理論分析模型以質量模型代替加速度規的質量，使其理論分析模型更接近於實際結構，王等人[6]以有限元素分析進行激振器音圈結構模態分析和簡諧分析，求得模態參數以及頻率響應函數，再以FRF及模態參數與實驗所得比較進行模型驗證。接著由以下文獻得知不同邊界設定如本文所進行接觸模擬與夾持邊界探討，如王與陳[7]對垂直輔助平台於理論分析時，以不同邊界理論模型進行模型驗證。王等人[8]以垂直輔助平台的實際結構，在模擬平台實際鎖固於試驗機狀況下，進行理論分析與實驗模態分析並做比較驗證，求得實際固定邊界之等效分析模型。以上文獻分別探討了模型驗證流程，結構模型驗證，以及不同邊界效應下的模型驗證。若只以理論模型進行探討，卻無法實際觀察振動之響應，故王等人[9]先以理論分析進行簡諧響應預測，接著以手提式振動示範機實際激振不同幾何懸臂樑試驗片，並進行響應預測驗證，最後以理論分析結果搭配實際激振進行振動教學示範。由於王等人[10]文中主要為

理論分析和實際基座激振，故本文將進行有、無加速度規懸臂樑含基座之模型驗證，進行簡諧基座激振，並搭配實際激振作為振動教學示範。

本文以實驗模態分析技術求得結構之自然頻率及對應模態振型為依據，並以有限元素分析技術建構有限元素模型，進行有、無加速度規含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑的模型驗證，最後以手提式振動示範機實際激振有、無加速度規懸臂樑並探討其差異。

2. 模型驗證理念與分析流程

2.1 模型驗證理念

模型驗證主要目的為確認理論模型的合理性、正確性，使其理論模型可代表實際結構進行設計變更或響應預測等。

如圖 1 模型驗證流程圖所示，模型驗證分為理論分析與實驗分析，首先理論分析採用有限元素分析技術進行模態分析求得模態參數，而實驗部份則藉由實驗模態分析技術得到結構的頻率響應函數，再以模態參數擷取軟體 ME'scopeVES 進行求算結構模態參數，最後以實驗所求得之模態參數為依據，並比較驗證理論分析所求得之模態參數，如誤差在容許範圍內，則此理論模型可視為等效於實際結構，後續可以此理論模型進行結構之響應預測分析或設計變更，以減少開發與資源的損耗。

2.2 分析流程

本文分析目標為進行圖 2 中的懸臂樑固定基座之響應預測和驗證，並進行實際簡諧激振搭配理論分析，以作為振動教學示範。其分析流程，如圖 2 所示：

- (1) 首先以有、無加速度規自由樑理論模型進行模型驗證，確認樑和加速度規之材料參數。
- (2) 接著進行有、無加速度規簡化固定邊界懸臂樑理論模型模型驗證，確認夾持邊界的可行性。
- (3) 最後加入基座模型，但較接近實體結構之有、無加速度規含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑理論模型進行模型驗證，以確認模擬接觸效應和夾持邊界的正確性。
- (4) 接著以有、無加速度規含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑理論模型進行響應預測，並以實際簡諧激振之情形做為響應預測驗證。

3. 自由樑模型驗證

模型驗證主要以實驗所得之模態參數為依據，並和理論分析所得模態參數比較驗證，以確認理論模型的等效性。以下為有、無加速度規自由樑模型驗證所進行實驗模態分析和有限元素分析介紹，其目的為確認樑和加速度規之材料參數。

3.1 實驗模態分析

圖 3 為實驗量測點示意圖，點數規劃由右至左共 12 點量測點。圖 4(a)為樑實驗儀器架設示意圖，其實驗方法共有聲音量測和實驗模態分析兩種實驗。

聲音量測主要為量測無加速度規樑結構，量測方法為頻寬 1000 Hz，解析頻率為 1 Hz，以麥克風為感測器置於靠近量測點第 6 點，以棍棒敲擊樑產生聲音，經由聲音量測程式擷取聲音資料，並進行傅立葉轉換成自身功率頻譜密度函數。

實驗模態分析主要進行量測含加速度規樑結構，實驗架設示意圖如圖 4(a)所示，頻寬取 1000 Hz，解析頻率為 0.313 Hz，以加速度規為輸出，固定於量測點第 10 點，移動衝擊錘為輸入，共 12 個敲擊量測點，每個點共敲擊 3 次取平均，再經由頻譜分析儀進行傅立葉轉換得到頻率響應函數，接著帶入曲線嵌合軟體進行取得結構之模態參數。

3.2 有限元素分析

本文建構如圖 5 有、無加速度規自由樑理論模型，主要進行模態分析求取模態參數，並以實驗結果為依據進行比較驗證，驗證成功後可獲得樑和加速度規之等效理論模型，以下為建構理論模型說明，首先以實際結構進行假設為數學模型，其幾何為有、無加速度規樑，其中樑之楊氏係數為 1.7054×10^{11} (N/m²)，蒲松比 0.3、密度為 10550.513 (Kg/m³)，而加速度規之楊氏係數為 6.5×10^9 (N/m²)、蒲松比 0.3、密度為 4715.972 (Kg/m³)，其邊界條件，因為與自由邊界實驗比較，故無設定。接著以數學模型進行建構有限元素模型，其元素選用為三維立體元素(SOLID45)，元素分割以每元素 0.0001mm 進行 free-mesh，而在加速度規與樑接合處，以 NUMMRG 進行接合，位移限制無設固定邊界，負荷條件則因進行模態分析，故無設外力負荷。

3.3 結果與討論

以自由樑進行實驗和理論分析所得之自然頻率及對應之模態振型比較驗證後，得到以下之結果：

圖 6 為樑以聲音量測程式，所得之自身功率頻譜密度函數圖，從圖中得知樑結構自然頻率分別為 88 Hz、238 Hz、469 Hz、585 Hz、774 Hz、886 Hz。

表 1 為無加速度規樑實驗和理論分析之自然頻率比較表，表中分別敘述實驗所得之自然頻率，理論分析所得自然頻率以及對應之模態振型及振型物理意義，並以實驗自然頻率為依據，與理論分析比較驗證，其誤差皆為容許誤差(±5%)內，故由此可判斷圖 5(a)樑理論模型為等效於實際結構之等效分析模型。

表 2 為含加速度規樑實驗和理論分析之模態振型比較表，Em-1 為含加速度規自由樑的第一個模態，FRm-1 為理論分析所求得之第一模態，依此類推。又由表中得知實驗與理論分析所得之模態振型出現順序多為對應，且自然頻率皆在容許誤差(±5%)內，唯有 Em-4 和 FRm-5 模態物理意義相同，但第一扭轉模態，出現順序不同。故若 Em-4 和 FRm-5 不計，加速度規幾何材料正確性。

4. 懸臂樑固定邊界模型驗證

本文懸臂樑固定邊界模型驗證主要以「簡化固定邊界」懸臂樑理論模型和「含接觸效應之實際夾持邊界」懸臂樑理論模型，與實驗結果比較驗證進行邊界和接觸模擬確認。

4.1 實驗模態分析

圖 4(b)為懸臂樑固定邊界聲音量測和實驗模態分析實驗儀器架設示意圖，其實驗方法與實驗儀器架設與 3.1 節相同，不同之處唯獨結構之邊界條件。

4.2 有限元素分析

本文懸臂樑固定邊界模型驗證，首先以圖 7 較為簡單之有、無加速度規「簡化固定邊界」懸臂樑理論模型進行夾持邊界確認，接著以較為複雜但與實際結構相似之模型，如圖 8 有、無加速度規「含接觸效應之實際夾持邊界」懸臂樑理論模型進行實際夾持邊界模擬與接觸效應的確認。在建構有限元素模型前，需先經數學模型假設，其數學模型幾何為樑、懸臂樑含基座，材料參數與 3.2 節所敘述相同，其邊界假設，

因樑之圓孔處與基座固定位置為鎖固，因此分析時以接觸元素進行模擬鎖固情形，於基座底面設定固定邊界。有限元素分析，元素選用三維立體元素(SOLID45)和樑之圓孔處與基座固定位置以 toger170、contact174 進行建構有限元素模型如圖 8，其接觸元素設定在接觸表面設定為 bonded(always)。元素分割則以每元素 0.0001mm 進行 free-mesh，在加速度規與樑接合處，以 NUMMRG 進行接合，位移限制處因實際為鎖固於基座上，故基座底面設為固定。負荷條件則因為進行模態分析，故無設外力負荷。

4.3 結果與討論

懸臂樑固定邊界模型驗證，其理論分析主要有、無加速度規「簡化固定邊界」懸臂樑理論模型，以及含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑理論模型進行理論分析，並以實驗結果為依據，得以下之結果：

圖 9 為懸臂樑之自身功率頻譜密度函數圖，由圖中可得知懸臂樑之自然頻率為 15 Hz、101 Hz、273 Hz、532 Hz、以及 879 Hz。

表 3 為無加速度規實驗和理論分析之自然頻率比較表，表中主要有聲音量測所得到之自然頻率、簡化固定邊界理論模型、含接觸效應之實際夾持邊界理論模型之自然頻率與對應之模態振型，以及模態振型之物理意義。表中第一側向模態和第一扭轉模態，於聲音量測時，並無激發出。

由表 4 無加速度規懸臂樑實驗和理論分析自然頻率誤差表，簡化固定邊界懸臂樑理論模型與實驗自然頻率誤差在第 2 模態時誤差較大，其原因為簡化邊界設定不能等效於實際結構，而含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑與實驗自然頻率比較，發現在第一模態時誤差較大，但其相差頻率為 1Hz 故此誤差為容許。

表 5 為含加速度規懸臂樑實驗和理論分析之模態振型比較表，其實驗與理論模態振型比較結果發現，實驗於第一側向模態和第一扭轉模態並無得到，其原因判斷為，因實驗量測時，衝擊錘敲擊方向為 Z 軸向敲擊，故無法得到懸臂樑之側向模態，第一扭轉模態無法取得之原因判斷，由表 5 理論模態振型發現，第一扭轉模態有結線產生處，為實驗量測點位置，故無法取得其模態振型。

5. 懸臂樑固定基座簡諧激振

由文中自由樑模型驗證至懸臂樑固定邊界模型驗證，皆以確認其樑、加速度規之材料參數，以及含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑接觸和邊界模擬，接著以下會以此模型進行簡諧響應分析，並實際基座激振響應預測驗證。

5.1 實際基座激振

本文實際基座激振方法以手提式振動試驗機激振，首先將懸臂樑含基座鎖固於振動示範機，如圖 2，接著以手動微調激振頻率進行簡諧激振，並搭配閃頻儀，以尋找懸臂樑之自然頻率及對應模態振型。

5.2 有限元素分析

懸臂樑固定基座簡諧激振，主要以含接觸效應之實際夾持邊界理論模型進行簡諧分析，其模型為含接觸效應之實際夾持邊界理論模型，元素選用、元素分割與 4.2 節之設定相同，而位移限制則會在基座底面設 X、Z 自由度為 0，Y 方向為激振方向。最後為負荷條件設定，因為進行簡諧分析固在基座底面中心點設 1 單位向上的力，以模擬激振力。

5.3 結果與討論

懸臂樑固定基座簡諧激振，由實際簡諧激振觀察到之自然頻率和模態振型，與理論分析簡諧激振所得到之頻率響應函數比較，其結果如下：

表 7 無加速度規實際激振與理論分析之模態振型比較結果，表中理論頻率響應函數之前三個峰值所出現位置，與實際激振所得到之自然頻率處差接在容許範圍 ($\pm 5\%$) 內。

表 8 含速度規實際激振與理論分析之模態振型比較發現，實際激振與理論分析所得之自然頻率於第一模態時誤差大，但相差 1Hz 內，故此現象是為容許。

6. 結論

本文經由實驗與理論分析比較驗證，得到了加速度規與樑之材料參數，也確認了基座與懸臂樑之接觸模擬和夾持邊界模擬，最後以懸臂樑含基座進行實際簡諧激振，與理論分析進行驗證，得到以下之結論：

1. 以聲音量測程式量測無加速度規樑之自然頻率，並與理論分析比較驗證，得到樑之材料參數。

2. 由含加速度規自由樑進行 EMA 與理論分析之結果比較驗證，得到加速度規之等效材料參數。
3. 以懸臂樑固定邊界實驗結果與理論分析結果進行比較驗證，得到理論接觸效應模擬與實際夾持邊界模擬。
4. 由實驗與理論分析比較驗證，所得之有、無加速度含接觸效應之實際夾持邊界懸臂樑等效模型與實際基座激振，搭配進行振動教學示範。

7. 參考文獻

1. 林壯昶，環境條件與環境試驗之國際標準，工業財產權與標準，第 95~100 頁，1998。
2. Wang, B. T., Chen, Y. C., Huang, H. H., and Chen, Y. C., Model Verification and Structural Stiffness Evaluation for Utility Vehicle Frame Structure, The 25th World Battery Hybrid and Fuel Cell Electric Vehicle Symposium & Exhibition, Shenzhen, Paper No.: K57HGP01, 2010.
3. 許凱超、廖建義，產品研發之環境輪廓及效應分析，品質管制月刊，第三十二卷，第八期，第 70~74 頁，2002。
4. 王栢村，陳志成，振動試驗機垂直輔助平台之模型驗證，中國機械工程學會第二十一屆全國學術研討會論文集，高雄、台灣，第 2423-2436 頁，2004。
5. Hu, H. W., Wang, B. T., Lee, C. H., and Wang, J. M., Model Verification of Finite Element Analysis for Free Vibration of Composite Laminates, Proceedings of the 29th National Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Hsinchu, Paper No.: H042, 2005.
6. 王栢村，林政煌，李昆達，激振器音圈結構之實驗模態分析與模型驗證，中國機械工程學會第二十屆全國學術研討會，台北，第 529-536 頁，2004。
7. 王栢村，陳志成，夾持邊界下垂直輔助平台之模型驗證，中國航太學會/中華民國航學會第四十六屆全國聯合學術研討會，台中，論文編號：13-1，2004。
8. 王栢村，莊豐榮，李昆達，肋補強垂直輔助平台平坦度性能指標之分析與驗證，中國機械工程學會第二十三屆全國學術研討會，台南，論文編號：C3-028，2006。
9. 王栢村，湯昀哲，李昆達，應用手提式振動試驗機與 CAE 軟體於振動教學示範，中華民國振動與噪音工程學會第 19 屆學術研討會，彰化，論文編號：D-10，2011。

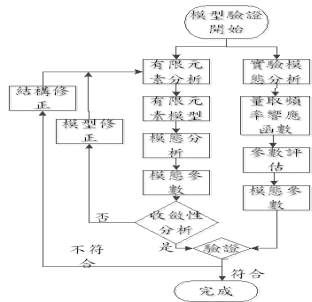


圖 1 模型驗證流程

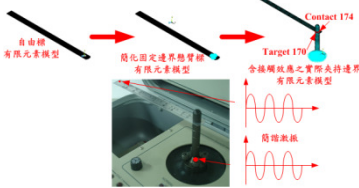


圖 2 分析流程示意圖



圖 3 實驗量測點示意圖



(a) 樑 (b) 懸臂樑固定邊界

圖 4 實驗儀器架設示意圖

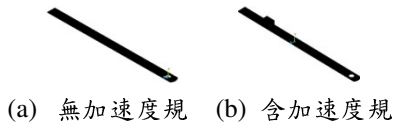


圖 5 樑加速度規理論模型

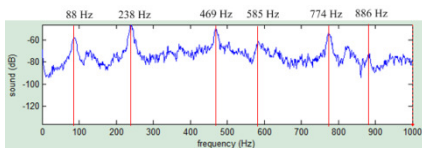


圖 6 樑之自身功率頻譜密度函數圖

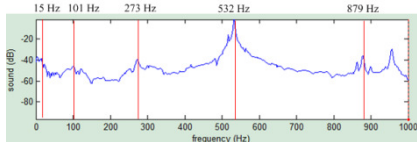


圖 9 懸臂樑自身功率頻譜密度函數圖

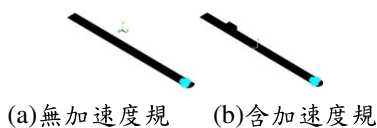
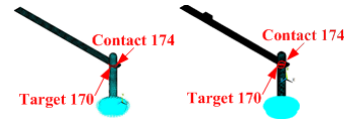


圖 7 懸臂樑簡易有限元素模型



(a) 無加速度規 (b) 含加速度規

圖 8 懸臂樑完整有限元素模型

表 1 無加速度規樑自然頻率比較表

自然頻率(Hz)	理論分析				物理意義
	模態數	模態振型	自然頻率(Hz)	誤差(%)	
88	FR-1		88.00	0.00	第二模態
238	FR-2		241.84	1.61	第三模態
469	FR-3		470.54	0.33	第四模態
774	FR-4		773.54	-0.06	第五模態
886	FR-5		915.56	3.34	第一扭轉

表 2 含加速度規樑模態振型比較表

模態數/自然頻率(Hz)	模態振型	模態數/自然頻率(Hz)	模態振型	誤差(%)	物理意義
Em-1 86.69		FRm-1 88.35		1.91	第二模態
Em-2 237.74		FRm-2 237.533		-0.09	第三模態
Em-3 447.61		FRm-3 455.609		1.79	第四模態
Em-4 534.03		--	--	--	第一扭轉
Em-5 752.27		FRm-4 752.249		0.00	第五模態
--	--	FRm-5 842.459		--	第一扭轉

表 3 無加速度規懸臂樑實驗和理論自然頻率比較表

自然頻率(Hz)	模態數/自然頻率(Hz)	模態振型	模態數/自然頻率(Hz)	模態振型	物理意義
15	FF-1 15.1		FB-1 15.71		第一模態
101	FF-2 95.92		FB-2 98.39		第二模態

--	FF-3 245.16		FB-3 244.00		第一側向
273	FF-4 267.31		FB-4 276.62		第三模態
--	FF-5 448.26		FB-5 489.32		第一扭轉
532	FF-6 524.18		FB-6 539.88		第四模態
879	FF-7 861.59		FB-7 891.75		第五模態

表 4 無加速度規懸臂樑自然頻率誤差

自然頻率 Hz			誤差 (%)		
(I)聲音量測	(II)簡化固定邊界	(III)含接觸效應之實際夾持邊界	II-I (%)	III-I (%)	II-III (%)
15	15.1	15.71	0.67	4.73	-3.88
101	95.92	98.39	-5.03	-2.58	-2.51
--	245.16	244.00	--	--	0.48
273	267.31	276.62	-2.08	1.33	-3.37
--	448.26	489.32	--	--	-8.39
532	524.18	539.88	-1.47	1.48	-2.91
879	861.59	891.75	-1.98	1.45	-3.38

表 5 含加速度規懸臂樑模態振型比較表

實驗模態分析		簡化固定邊界理論模型		含接觸效應之實際夾持邊界理論模型		
模態數/自然頻率 (Hz)	模態振型	模態數/自然頻率 (Hz)	模態振型	模態數/自然頻率 (Hz)	模態振型	物理意義
EBm-1 13.45		FFm-1 13.89		FBm-1 13.78		第一模態
EBm-2 101.01		FFm-2 99.55		FBm-2 98.61		第二模態
		FFm-3 223.56		FBm-3 213		第一側向
EBm-3 265.36		FFm-4 269.61		FBm-4 267.6		第三模態
		FFm-5 408.66		FBm-5 405.53		第一扭轉模態
EBm-4 504.25		FFm-6 534.07		FBm-6 528.3		第四模態
EBm-5 846.6		FFm-7 879.58		FBm-7 871.27		第五模態

表 6 含加速度規懸臂樑之自然頻率比較表

自然頻率 Hz			誤差 (%)		
(i)實驗模態分析	(ii)簡化固定邊界	(iii)含接觸效應之實際夾持邊界	ii-i (%)	iii-i (%)	ii-iii (%)
13.45	13.89	13.78	3.27	2.45	0.80
101.01	99.55	98.61	-1.45	-2.38	0.95
--	223.56	213.00	--	--	4.96
265.36	269.61	267.60	1.60	0.84	0.75
--	408.66	405.53	--	--	0.77
504.25	534.07	528.30	5.91	4.77	1.09
846.60	879.58	871.27	3.90	2.91	0.95

表 7 無加速度規實際激振與理論模態振型比較表

理論 頻率響應函數			
模態數	P-1	P-2	P-3
自然頻率(Hz)	15.1	98.3	271.6
實際激振			
自然頻率(Hz)	15.71	98.39	276.62
FEA			
頻率誤差	4.04	0.09	1.85

表 8 含加速度規實際激振與理論模態振型比較表

理論 頻率響應函數			
模態數	P-1	P-2	P-3
自然頻率(Hz)	13.2	98.1	265.0
實際激振			
自然頻率(Hz)	13.78	98.61	267.6
FEA			
頻率誤差	4.39	0.52	0.98

Model Verification of Base Excitation Cantilever Beam and Vibration Teaching Demonstration

Bor-Tsuen Wang¹, Yuan-Zhi Xu¹, David Lee²

¹ Department of Mechanical Engineering,
National Pingtung University of Science and
Technology, Pingtung

² King-Design Company, Taipei

Abstract

This work aims to perform model verification for the cantilever beam that is subjected to base excitation. The portable vibration shaker system is used to demonstrate vibration phenomenon suitable for vibration class instruction aids. Structural natural frequencies and their corresponding mode shapes obtained from experimental modal analysis (EMA) are considered as referred data. Finite element analysis (FEA) is then adopted to build FE models, including both with and without accelerometer on the cantilever beam in practical boundary with contact effect, for model verification. The portable vibration shaker system is demonstrated to show the vibration phenomenon of the beam structure under harmonic excitation. Both sound measurement method and EMA are, respectively, used to identify the structural resonances and modal parameters. The free boundary beam model is first validated to calibrate the mass effect of accelerometer as well as the material mechanical properties of the beam. The simplified fixed boundary FE model is also constructed to simulate the practical beam subject to clamped boundary with the base structure. The FE model for the beam in practical clamped boundary with contact effect between the beam and fixtures is finally established and validated for the contact conditions and boundary effects. The harmonically base excitation cantilever beam is then shown and compared with the theoretical prediction. The analysis approaches and experimental demonstrations can be suitable for vibration instruction aids.

Keywords : model verification, harmonic excitation,
vibration instruction