

應用渦電流位移計於結構之外力預測

王栢村 吳德和 呂世鑫

國立屏東科技大學機械工程系

摘要

本文主要以渦電流位移計為感測器對懸臂樑結構受未知外力型式為衝擊力時，應用外力預測模式以預測未知外力的大小、時間歷程與作用位置。其中衝擊力以三角力型式表示。首先由理論分析及實驗模態分析，可得到結構之模態參數（自然頻率、阻尼比及模態振型）；而當結構受未知外力作用時，量測並記錄其響應；而預測的響應係以外力大小、時間歷程與作用位置的函數來表示。最後架構最佳化問題，定義預測與量測響應的平均平方誤差為目標函數，進而可求得外力大小、時間歷程以及外力位置。結果顯示，以渦電流位移計可成功地預測未知衝擊力，未來亦可推展應用到其他結構。

關鍵字：渦電流位移計、外力預測、懸臂樑

一、前言

一般對於系統的響應，主要有三種不同的分析問題，一為給定輸入及系統參數，決定其輸出，此為正向問題(direct problem)；二為給定輸出及系統參數，決定其輸入，此為復原問題(reconstruction problem)；三為給定輸入及輸出，決定其系統參數，此為系統確認問題(identification problem)。

逆向工程問題(inverse problem)則是由復原與系統確認兩種問題組合而成，藉由已知系統參數以及輸出來反推輸入。外力預測(force prediction)便是在這種理念下，來預測作用於結構上的外力大小、型式及外力位置。外力預測於工程上結構系統的應用也相當的廣泛，如複合材料[8]已廣泛地應用於車輛與飛機結構，所以想瞭解的是複合材料局部所能承受的衝擊外力極限有多少。或是銑削[15]時，藉由操作前先瞭解動態機械受未知衝擊外力的情形，將有助於銑削過程的操作及瞭解刀具的特性。由以上可得知，結構系統外力預測在工程上的重要性。

結構系統之外力預測大致可歸類為幾種類型：第一類為不同的外力預測方法，邱[3]假設外力函數為脈衝(impulse)函數，使用最小平方誤差方法為最佳化演算法則，定義目標函數為預測與實驗響應之平均平方誤差和，進行最佳化分析，最後得到外力大小及一組相關於外力作用位置之模態振型，經與實際結構之模態振型作分析比較後，可得到外力位置。Elliott and Robinson[12]係使用聲學外力激振平板，且於平板上黏貼應變規量測響應，並可得到一應變/外力之頻率響應函數矩陣，再應用奇異值分解技術(Singular-Value Decomposition)於外力預測可減少雜訊(noise)的影響。Daniel and Doyel[10]係以鋼球衝擊平板，並以加速度計量測結構響應，再以光譜元素

(spectral element)方法得知衝擊於平板的外力歷程，此方法係將複雜的結構化為微小相同的元素，藉由勁度矩陣關係式、轉移函數以及加速度響應關係式可推得外力歷程。Avitabile et al.[7]係使用外力估算技術對平板結構與電腦模擬兩個例子進行外力估測。外力估算方法則是利用量測得到系統的操作響應與由有限元素模型所得到的系統轉移函數的關係來推得外力。

第二類為不同形式的感測器，Hillary and Ewins[14]分別以應變規與加速度計為感測器，以激振器來激振懸臂樑結構，並進行外力預測，在已知外力作用位置下，求得頻率域隨機外力大小。吳[2]使用壓電薄膜為感測器應用於簡支樑上進行外力預測，透過預測模式成功地得到外力大小、時間歷程與外力位置。馬和劉[5]提到轉子模型系統，馬達為驅動器，位移計為感測器，搭配訊號分析儀來進行外力預測，並考慮轉子不平衡及軸承鬆動兩種狀況。以位移計量測其位移量，估測其激振外力；並以卡曼濾波器(kalman filter)理論和系統識別技術來驗證外力預測的正確性。

第三類為不同的外力型式，已知外力型式為衝擊力，陳[6]以三角力的型式來模擬衝擊外力，對懸臂樑結構進行外力預測，透過預測模式成功地得到外力大小、時間歷程與外力位置。Choi and Chang[9]以壓電材料為感測器，數值模擬使用離散時間域(discrete-time domain)方法來預測響應，並與壓電感測器所量測得到的響應進行比較，使兩者最小化；最後成功地得到外力位置與外力歷程。已知外力型式為簡諧外力，林[4]以簡諧點力型式來模擬簡諧外力，對懸臂樑結構進行外力預測，透過預測模式可準確地預測到外力大小與外力位置。D'Cruz et al.[11]利用至少四個以上的感測器來量測簡支板結構的響應，並架構最佳化問題，以高斯-牛頓(Gauss-Newton)方法來求解，可得到外力大小、外力位置以及相位角。已知外力型式為隨機外力，Varoto and McConnell[17]以激振器來激振自由樑，並量測加

速度響應，再以 pseudo-inverse 方法來預測隨機外力。

本文主要以懸臂樑為結構，渦電流位移計為感測器來發展一外力預測模式，未知外力型式為衝擊力，其中衝擊力以三角力的型式來模擬實際外力。在已知結構系統的模態特性下所發展的外力預測模式，透過此預測模式可預測外力大小、時間歷程與外力位置。

二、懸臂樑響應分析及外力預測

一長度為 L_b 之懸臂樑結構，受一未知外力 $f(x,t)$ 作用，如圖一所示，表 1 為懸臂樑材料性質。根據傳統樑理論，忽略剪力變形及轉動慣量效應，得懸臂樑側向運動方程式通式[1]：

$$E_b I_b \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + C_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

其中， E_b 為懸臂樑的楊氏係數， I_b 為懸臂樑的截面慣性矩， w 為樑之側向位移， ρ_b 為懸臂樑的密度， A_b 為懸臂樑的截面積， C_b 為懸臂樑的阻尼係數。

當外力的型式為衝擊力時且在結構座標 $x = x_j$ 受衝擊外力作用時，如圖二所示，其外力的函數可寫成如下：

$$f(x,t) = \delta(x-x_j) \times \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ F_j \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}, & t_1 < t < t_2 \\ F_j \frac{(t-t_3)}{(t_3-t_2)}, & t_2 < t < t_3 \\ 0, & t > t_3 \end{cases} \quad (2)$$

2.1 位移響應理論分析

當外力型式為三角力且作用於懸臂樑結構，令作用時間 $t_1 = 0$ ，如圖三，利用擴充原理與結構模態振型之正交性關係式，估算位移響應的形式在此僅列出 $0 < t \leq t_2$ 時之位移響應：

當 $0 < t \leq t_2$ 時：

$$\hat{X}_i(t) = w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} (C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t) + \frac{F_j \phi_n(x_j) t}{\omega_n^2 t_2} - \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\xi_n)}{\omega_n^3 t_2} \right\} \quad (3)$$

2.2 位移響應預測模式

當未知衝擊外力作用於懸臂樑結構時，可藉由兩種方法得到在座標系統 $x = x_j$ 位置之位移響應。第一個方法為利用 2.1 節中理論推導之位移響應，如式(3)，位移響應並以 $X_i(t)$ 表示；第二個方法則是以渦電流位移計為感測器來量測得到結構座標系統在 $x = x_j$ 位置之位移響應 $\hat{X}_i(t)$ 。假設懸臂樑結構在座標 $x = x_j$ 位置受到未知衝擊外力（三角力） F_j 作用時，而在不同的量測時間，位移響應有不同的表示方式，當系統座標在 $x = x_j$ 位置之位移響應 $X(t)$ 如式(3)所示。

式(3)之 $\phi_n(x_j)$ 表示第 n 個模態振型矩陣中之第 i 個元素， $\phi_n(x_j)$ 與 $\phi_{n,i}$ 具有相同的物理意義。為配合實驗結果之應用，故只取前 $N = 4$ 個模態，並且將模態振型函數改變成向量的型式。系統結構之模態參數，如自然頻率、模態阻尼比與模態振型，可經由理論推導或是實驗模態分析的方式得到。因此對於式(3)中的模態參數 ω_n 、 ξ_n 、 $\phi_{n,i}$ 與 $\omega_{d,n}$ 均為已知，而結構受未知衝擊外力作用，式(3)中未知數包含三角力大小 F_j 、作用力時間歷程 t_2 和 t_3 以及作用力位置 x_j 。

由於式(3)為多變數方程式，欲求得未知變數 F_j 、 t_2 和 t_3 與 $\phi_{n,i}$ ，故以最佳化方式來求解，並使得式(3)中理論推導之位移響應 $X_i(t)$ 與實驗量測所得之位移響應 $\hat{X}_i(t)$ 相等或是誤差最小化，即可預測出三角力大小 F_j 、作用力時間歷程 t_2 和 t_3 以及作用力位置 x_j 。因此定義目標函數 Q_i 為由 N_i 個時間點之 $X_i(t)$ 與 $\hat{X}_i(t)$ 之平均平方誤差和，其中未知變數為 F_j 、 t_2 和 t_3 與 x_j ，而定義 s_2 為 $t_3 - t_2$ 。而式(4)之最佳化分析問題的設計方向在於使目標函數為零或是最小值，進而求得 F_j 、

t_2 、 s_2 與 $\phi_n(x_j)$ 。因此最佳化分析問題定義如下：

$$\text{目標函數： } Q_i = \sum_{l=1}^{N_i} [X_i(t_l) - \hat{X}_i(t_l)]^2 \quad (4)$$

設計變數： F_j 、 t_2 、 s_2 、 $\phi_{n,i}$ ， $n=1, 2, \dots, N$

當求解最佳化問題後可得到三角力大小 F_j 、作用力時間歷程 t_2 和 s_2 、 t_3 可由 $t_2 + s_2$ 求得，以及一組模態振型 $\{A\}_j$ ，如式(5)所示：

$$\{A\}_j = [\hat{\phi}_{1,j} \quad \hat{\phi}_{2,j} \quad \dots \quad \hat{\phi}_{N,j}]^T \quad (5)$$

式(5)之上標 T 代表對矩陣作轉置(transpose)運算，由式(5)可得知 $\{A\}_j$ 為所有模態振型向量在位置為 x_j 所組成之向量，定義結構模態振型矩陣如下式：

$$\{\Phi\} = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \dots \quad \{\phi\}_N] = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{N,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{N,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,m} & \phi_{2,m} & \dots & \phi_{N,m} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{bmatrix} [B]_1 \\ [B]_2 \\ \vdots \\ [B]_m \end{bmatrix}$$

其中，

$$\{B\}_i = [\phi_{1,i} \quad \phi_{2,i} \quad \dots \quad \phi_{N,i}] = \{A\}_i^T \quad (7)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

式(6)中的 N 為模態數， m 為懸臂樑結構進行實驗模態分析之分割點數。

MAC (Modal Assurance Criterion) 為評估實驗與理論所得振型之相關性指標，定義如下[13]：

$$MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = \frac{|\{\phi\}_p^T \{\phi\}_x|^2}{(\{\phi\}_p^T \{\phi\}_p) (\{\phi\}_x^T \{\phi\}_x)} \quad (8)$$

其中， $\{\phi\}_x$ 為實驗分析所得之模態振型向量， $\{\phi\}_p$ 為理論分析所得之模態振型向量， $\phi_{x,j}$ 為 $\{\phi\}_x$ 中第 j 個元素， $\phi_{p,j}$ 為 $\{\phi\}_p$ 中第 j 個元素，* 為共軛(conjugate)運算。

當 $\{\phi\}_p = \{\phi\}_x$ ，即理論與實驗所得之模態振型完全相同時，則 $MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = 1$ ；不過在實

驗的過程中都有些許的誤差，而造成實驗所得振型與理論所得振型完全相同的可能性很低；一般而言， $0 \leq MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) \leq 1$ ，當 MAC 值大於 0.9，則表示實驗所得振型與理論所得振型有良好的相關性與吻合性；而當 MAC 值小於 0.05，則表示兩組振型毫無相關性或稱兩者具有正交性。

當以 MAC 來評估最佳化所得到之模態振型 $\{\hat{A}\}_l$ 與懸臂樑結構模態振型 $\{A\}_l$ 的相關性指標，可表示

$$MAC_{jl}(\{\hat{A}\}_l, \{A\}_l), l=1,2,\dots,m \quad (9)$$

式(9)為最佳化所得到的一組模態振型與由模態分析所得之模態振型矩陣中每一列矩陣進行比對，依其相關性指標 MAC_{jl} 大小，可判斷得知未知外力作用位置；當 MAC_{jl} 值趨近於 1 時，表示 $\{\hat{A}\}_l$ 與 $\{A\}_l$ 有良好的相關性，亦代表 $x_j = x_l$ ，因此可判斷未知衝擊外力（三角力）作用在 x_l 位置上。

三、外力預測分析結果與討論

實驗分析所得模態參數搭配實驗量測所得響應

本節內容為以實驗模態分析所得之模態參數估算之響應搭配實驗量測之響應進行外力預測，主要目的為進行實驗驗證分析。

3.1 外力作用在不同位置之影響

本節主要考慮在外力作用在不同位置的條件下進行外力預測；即固定量測懸臂樑上第 2 點之響應，時間歷程 t_2 為 2.441 毫秒， s_2 為 0.977 毫秒，因此考慮的分析組合有下列幾種：外力分別作用於結構上的第 2 點、第 3 點、第 7 點以及第 11 點，探討在外力作用在不同位置的條件下，此外力預測模式的適應性。

表 2 為不同外力作用位置下預測外力大小與時間歷程之結果，四種組合預測得到的外力大小與實際值相比較，誤差算是蠻小的，皆在 9.56% 以內；在時間歷程方面，前三種組合所預測得到

的時間歷程 s_2 誤差偏大，不過仍可得知其大略範圍。表 3 為不同外力作用位置下之衝擊能量；而由表 3 的結果得知除了第 4 種組合 $(i,j) = (2,11)$ 預測誤差為 16%，其餘組合則在 11% 以下；圖四(a) 為預測外力大小與時間歷程圖，圖四(b) 為預測外力作用位置圖，雖然第二種組合 $(i,j) = (2,3)$ 無法預測得知外力作用位置，不過可大略得知外力作用位置，其餘三種組合可藉由 15 個點之 MAC 相對極大值來判斷外力作用位置。

3.2 不同響應量測位置之影響

表 4、5 分別為在不同響應量測位置下，預測外力大小、時間歷程與衝擊能量之結果，由結果可得知四種組合預測之外力大小誤差皆在 15.76% 以下，而在時間歷程方面，除了 $(i,j) = (11,2)$ 外，其餘組合皆有較大的誤差；就能量觀點，由結果可發現 $(i,j) = (7,2)$ 時，預測誤差為 25.74% 較為偏大，其餘組合皆在 13.42% 以下。圖五(a) 為不同響應量測位置下預測外力大小與時間歷程圖，實線為四種組合之外力大小與時間歷程的實際值，虛線為四種組合之外力大小與時間歷程的預測值；圖五(b) 為預測外力作用位置圖，雖然在 $(i,j) = (3,2)$ 與 $(15,2)$ 的組合無法預測得知外力作用位置，不過所預測得到 MAC 極大值皆在第二點附近，可藉此得知外力作用的大概位置。

3.3 不同外力大小之影響

此節內容主要是考慮在不同的外力大小之條件下進行外力預測，探討此外力預測模式於不同外力大小的可行性。表 6、7 分別為預測外力大小、時間歷程與衝擊能量之結果，圖六(a) 為預測外力大小與時間歷程圖，圖六(b) 為預測外力作用位置圖。就外力大小方面，預測值與實際值相比，誤差尚在可接受的範圍內；而在時間歷程方面，雖然四種組合皆有較大的誤差，不過仍可藉此得知大略範圍，因此本外力預測模式適用於不同的外力大小。

四、結論與建議

本文以懸臂樑為結構，透過陳[6]所發展之外力預測模式探討其受衝擊力作用時之外力預測，考慮不同外力作用位置、不同響應量測位置以及不同外力大小三種情形，並對上述各種情況進行外力預測，因此以非接觸式位移計成功地取代傳統上以加速度計為感測器對結構進行外力預測。未來可以應用不同感測器（如壓電薄膜）於此外力預測模式。

1. 在響應量測方面，以渦電流位移計量測結構之響應時，可考慮於渦電流位移計加上一層擋板，如此可以減少量測時渦電流自身效應的影響。
2. 量測結構之響應時，渦電流位移計放置應距離待測結構表面適當處，若距離太近則容易量測到不佳的訊號。
3. 文中量測響應時頻寬只取 800Hz，故可取較大的頻寬範圍以增加外力預測的準確性。
4. 本文使用非接觸式位移計為感測器，由預測結果顯示透過兩種預測模式可成功地預測到外力大小、時間歷程與外力位置，未來可以應用非接觸式位移計於其他結構之外力預測，如轉子系統。
5. 目前只進行非線上(off-line)外力預測，未來可搭配 LabVIEW 進行線上(on-line)即時顯示外力預測。

參考文獻

1. 王栢村，1996，*振動學*，全華科技圖書股份有限公司，台北。
2. 吳建德，1999，*智慧型材料結構系統應用於未知衝擊外力之預測*，碩士論文，國立屏東科技大學。
3. 邱俊賢，1998，*未知衝擊外力作用於任意結構之預測*，碩士論文，國立屏東科技大學。
4. 林冠元，2001，*結構受簡諧激振之外力預測*，碩士論文，國立屏東科技大學。
5. 馬志高、劉瑞榮、龔一中、林東成，2000，「旋轉機件激振力估測及驗證」，*中國造船暨輪機工程師學刊*，第十九卷，第三期，第 43-51 頁。
6. 陳重彰，2000，*懸臂樑結構系統之未知外力預測*，碩士論文，國立屏東科技大學。
7. Avitabile, P., Piergentili, F., and Lown, K., 1999, "Generation of Input Forcing Functions Through the Use of Measured Response and System Transfer Relations," *Proceeding of The 17th International Modal Analysis Conference*, Vol. 1, pp. 309-315.
8. Chang, C., and Sun, C. T., 1989, "Determining Transverse Impact Force On a Composite Laminate by Signal Deconvolution," *Experimental Mechanics*, pp. 414-419.
9. Choi, K., and Chang, F. K., 1996, "Identification of Impact Force and Location Using Distributed Sensors," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 1, pp. 136-143.
10. Daniel, A. N., and Doyel, J. F., 1994, "Force Identification on Folded Plate Structure," *Proceeding of the 1994 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, pp. 760-767.
11. D'Cruz, J., Crisp, J. D. C., and Ryall, T. G., 1992, "On the Identification of a Harmonic Force on a Viscoelastic Plate From Response Data," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 722-729.
12. Elliott, K. B., Juang, J. N., and Robinson, J., 1988, "Force Prediction Using Singular-Value Decomposition," *Proceeding of The 6th International Modal Analysis Conference*, Vol. 1, pp. 1582-1588.
13. Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire, England.
14. Hillary, B., and Ewins, D. J., 1984, "The Use of Strain Gauges In Force Determination and

- Frequency Response Function Measurement," *Proceeding of the 2nd International Modal Analysis Conference*, pp. 627-634.
15. Huang, H., Pan, J., and McCormick, P. G., 1997, "Prediction of Impact Forces In AVibratory Ball Mill Using An Inverse Technique," *International Journal Impact Engineering*, Vol. 19, No. 2, pp. 117-126.
16. IMSL Problem-Solving Software System, 1989, Math / Library Fortran Subroutines for Mathematical Applications, IMSL, Inc.
17. Varoto, P. S., and McConnell, K. G., 1997, "Predicting Random Excitation Forces Form Acceleration Response Measurements," *Proceeding of The 15th International Modal Analysis Conference*, Vol. 1, pp. 1-7.

表 1、懸臂樑材料性質

材料	懸臂樑(鋼)
長度(L)	0.3m
寬度(b)	0.04m
厚度(h)	0.0016m
密度(ρ)	7870 kg/m ³
楊氏係數(E)	199 × 10 ⁹ Gpa

表 2、不同外力作用位置下預測外力大小與時間歷程之結果

組合 (i, j)	外力大小 $F_j(N)$			時間歷程 (毫秒)			
				$t_2(2.441)$		$s_2(0.977)$	
	實際值	預測值	誤差 (%)	預測值	誤差 (%)	預測值	誤差 (%)
(2,2)	0.956	0.959	0.313	2.313	-5.24	0.828	-15.25
(2,3)	0.45	0.482	7.11	2.393	-1.96	1.152	17.91
(2,7)	0.941	1.031	9.56	2.178	-10.77	0.752	-23.02
(2,11)	0.841	0.771	-8.32	2.162	-11.42	0.964	-1.33

表 3、不同外力作用位置下之衝擊能量

組合(i, j)	實際值	預測值	誤差(%)
(2,2)	1.633	1.506	-7.81
(2,3)	0.769	0.854	11.09
(2,7)	1.608	1.510	-6.07
(2,11)	1.437	1.205	-16.15

表 4、不同響應量測位置下預測外力大小與時間歷程之結果

組合 (i, j)	外力大小 $F_j(N)$			時間歷程 (毫秒)			
				$t_2(2.441)$		$s_2(0.977)$	
	實際值	預測值	誤差 (%)	預測值	誤差 (%)	預測值	誤差 (%)
(3,2)	0.503	0.493	-1.98	1.906	-21.91	1.113	13.92
(7,2)	0.458	0.397	-13.31	2.129	-12.78	0.799	-18.21
(11,2)	0.597	0.646	8.20	2.513	2.94	1.059	8.39
(15,2)	0.222	0.257	15.76	2.005	-17.86	0.854	-12.58

表 5、不同響應量測位置下之衝擊能量

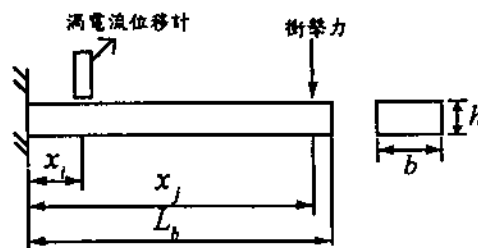
組合 (i, j)	實際值	預測值	誤差 (%)
(3,2)	0.859	0.744	-13.42
(7,2)	0.782	0.581	-25.74
(11,2)	1.020	1.153	13.08
(15,2)	0.379	0.367	-3.16

表 6、不同外力大小下預測外力大小與時間歷程之結果

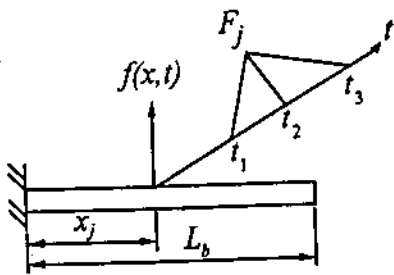
組合 (i, j)	外力大小 $F_j(N)$			時間歷程 (毫秒)			
				$t_2(2.441)$		$s_2(0.977)$	
	實際值	預測值	誤差 (%)	預測值	誤差 (%)	預測值	誤差 (%)
(2,7)	0.941	1.031	9.56	2.178	-10.77	0.752	-23.02
(2,7)	0.325	0.28	-13.84	2.052	-15.93	1.028	5.22
(15,2)	0.222	0.257	15.76	2.005	-17.86	0.854	-12.58
(15,2)	0.687	0.652	-5.09	1.970	-19.29	0.836	-14.43

表 7、不同外力大小下之衝擊能量

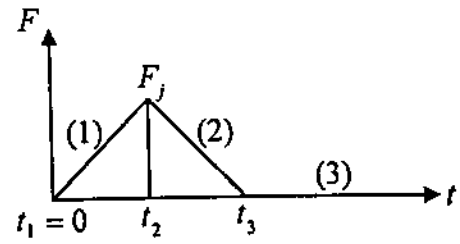
組合 (i, j)	實際值	預測值	誤差 (%)
(2,7)	1.608	1.510	-6.07
(2,7)	0.555	0.431	-22.36
(15,2)	0.379	0.367	-3.16
(15,2)	1.174	0.914	-22.08



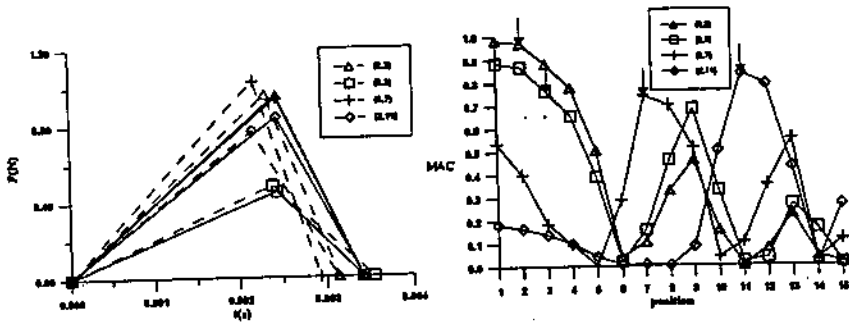
圖一、懸臂樑尺寸及未知外力作用位置圖



圖二、懸臂樑受三角力作用示意圖

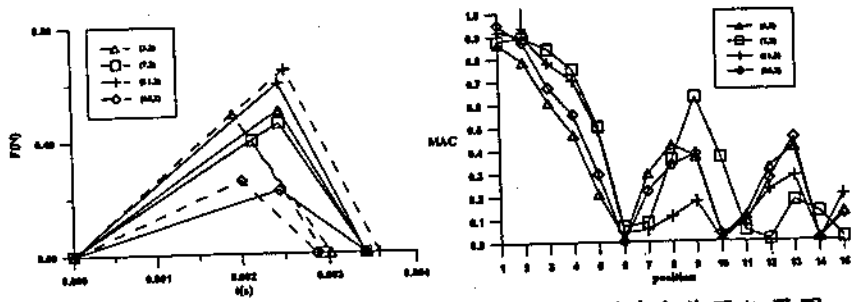


圖三、三角力作用於懸臂樑之時間歷程圖



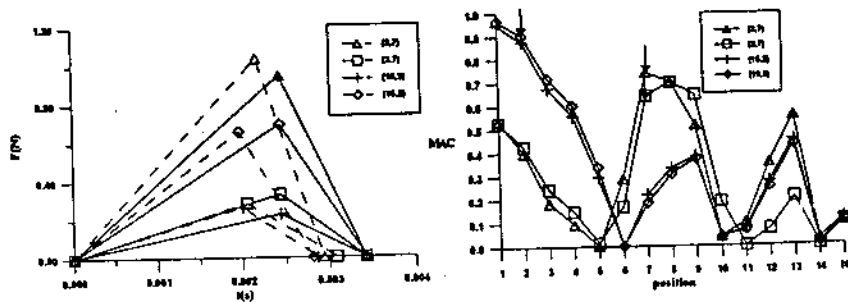
(a)預測外力大小與時間歷程圖 (b)預測外力作用位置圖

圖四、不同外力作用位置下之結果



(a)預測外力大小與時間歷程圖 (b)預測外力作用位置圖

圖五、不同響應量測位置下之結果



(a)預測外力大小與時間歷程圖 (b)預測外力作用位置圖

圖六、不同外力大小下之結果