

轉子系統之模態特性及動態響應

Modal Properties and Dynamic Response of a Simple Rotor System

王栢村¹、劉健烽²

¹ 國立屏東科技大學機械工程系教授

² 國立屏東科技大學機械工程系研究生

摘要

本文主要是建構一轉子系統由主軸、軸承、聯軸器及馬達組成。首先進行系統之模型驗證，分別以有限元素分析及實驗模態分析求取系統之模態參數及頻率響應函數進行比較驗證。在完成模型驗證後，進而由系統之自然頻率進行臨界轉速之驗證。另外，在不同轉速下由有限元素分析及實驗量測進行操作變形振型之比較。本文建立一轉子系統之理論分析與實驗量測分析方法，包括模型驗證、臨界轉速及操作變形振型，有助於了解轉子系統之動態特性。

關鍵字：模型驗證、臨界轉速、操作變形振型

Abstract

This paper presents the rotor system that consists of shaft, bearing, coupling and electric motor. Model verification is performed by adopting finite element analysis (FEA) and experimental model analysis (EMA). By the comparison of modal parameters and frequency response functions, the finite element model can then be validated. The critical speed of the rotor system is also experimentally observed and shown corresponding to the lateral vibration natural frequency of the system. Besides, the operational deflection shapes (ODS) at different operational speeds are also measurement and compared with the predicted ODS from FEA. This work presents the theoretical analysis and experimental measured methodology to study the dynamic behavior of a rotor system. The apparatus is useful for demonstration in vibration class to reveal the concept of model verification and the phenomenon of critical speed and operational deflection shapes.

Keywords: model verification, critical speed, operational deflection shapes

一、前言

轉子系統是工業界中常見之系統，幾乎所有生產機具都有轉子元件的存在，運用範圍小自伺服馬達、交直流電動馬達等，大至泵浦、生產工具機的主軸、渦輪裝置、汽渦輪機、工具機傳動裝置等，用途相當廣泛，也突顯轉子系統的重要性，因此轉子系統之模態特性及動態響應是值得分析了解之課題。

轉子系統重要參數之一為臨界轉速，此臨界轉速對應之頻率為該轉子系統之側向振動自然頻率。欲求得系統之模態參數可由實驗方式進行完整之實驗模態分析或由理論分析，如有限元素法對結構系統進行模態分析。王與陳等人[1] 主要是設計製作一轉子系統教學模型，並利用實驗模態分析[2]及有限元素分析轉子系統有無質塊之轉軸側向振動模態分析比較，並針對模型臨界轉速進行驗證。

轉子系統之操作變形振型亦為重要之動態特性，了解轉子系統於某固定轉速下之變形狀態，亦可解釋為結構於簡諧激振下之簡諧穩態響應。胡[3]主要是在探討多自由度系統於簡諧激振狀態下之模態分析，發展由操作變形振型估測模態振型之方法。運用時域法、頻域法及移轉特性法量測系統之操作變形振型，以估測模態振型。Marscher[4] 主要是在探討轉子系統在操作狀態下之模態測試，使用時間平均的累積進行模態測試之評估。Okubo et al. [5] 探討一機器在操作狀態下外力之預測，分別對樑結構、工具機、汽油引擎和空調設備進行分析。Bai et al. [6] 主要是以模型基礎智能推理運算 (model-based intelligent inference) 來發展線上診斷轉子振動特性之系統，可監測出缺陷的位置與隔離。Khulief and Mohiuddin[7] 主要是在使用模態衰減(modal reduction)方法來探討轉子系統之動態響應分析，此模式可計算迴轉的影響和聯軸器的變形於彎矩及扭矩之間。

本文主要利用實驗模態分析及有限元素分析於轉子系統在靜止與操作狀態下進行分析，包括模型驗證、臨界轉速及操作變形振型，有助於了解轉子系統之動態特性。

二、問題定義與分析目標

2-1.問題定義

考慮一轉子系統，如圖 1 所示，此轉子系統是由一主機座、主軸、軸承、聯軸器及馬達組成，其各主要部位之尺寸如表 1 所示。

2-2.分析目標

- a. 利用有限元素分析的方法求得轉子系統之頻率響應函數及模態參數，與實驗模態分析所求得系統之頻率響應函數及模態參數加以比較驗證，來驗證所架構的有限元素模型的正確性及適用性。
- b. 量測轉子系統在實際運轉下之臨界轉速，將所量得之參數與理論模態分析所

得之模態參數相互驗證。

- c. 利用有限元素分析之簡諧分析與實際實驗所量測得到的結構操作變形振型加以比較驗證，來確認實驗量測方法的適用性及可行性，以了解轉子系統之運轉狀態。

三、研究方法

3-1. 模型驗證

a. 有限元素分析：

在此分析中主要是利用有限元素分析的方法求得轉子系統之頻率響應函數 (FRF) 及模態參數 ($\mathbf{w}_n, \mathbf{f}_n$)。圖 2 為其有限元素模型。選用二維樑元素 (beam3) 模擬主軸、選用彈簧元素 (combin14) 來模擬線性彈簧 (k_y) 與旋轉彈簧 (k_{q_z})，將主軸分為 17 等分，18 個節點，節點 19~24 為彈簧元素與主軸之連接點，節點 19、20、21、22、23、24 設定 $U_x = U_y = \mathbf{q}_z = 0$ ，如圖 2 所示。



圖 1、轉子系統實體圖

表 1、各主要部位之功能尺寸設計

項 目	型 號	功能尺寸說明
馬達	交流式碳刷 單相高速馬達	轉速可達 16000rpm
聯 軸 器	鋁合金吸振型	$\mathbf{f}_{in} = 0.01\text{m}$ $\mathbf{f}_{out} = 0.025\text{m}$
主 軸	鋼質桿	外徑=0.01m，長度=0.8m $E=207\text{e}9\text{ N/m}^2$ ， 密度= 8000 kg/m^3 ， $\nu = 0.3$
軸承	1.0 號之山型軸承兩只 2.自行加工軸承座	軸承內徑要求為 10mm，以 螺絲固定於軸承座
主基座	自行加工	1m×0.15m

b. 實驗模態分析：

本分析項目主要目的是要得到其轉子系統之模態參數。圖 3 為實驗架構圖。其實驗之原理[2]為利用衝擊錘對主軸激振，利用加速度計作感測器，量取結構之響應訊號，經過電荷放大器將訊號傳入雙頻道訊號分析儀，由訊號分析儀對輸入之訊號作快速傅立葉轉換，求得主軸的頻率響應函數和關聯性函數 (coherence)，最後再將所得到的頻率響應函數傳入 CADA-PC 軟體作曲線嵌合 (curve fitting) 工作，則可得到系統之模態參數，即自然頻率、阻尼比和振型等。實驗是採用移動加速度計，固定衝擊錘的敲擊位置量取各點之響應。

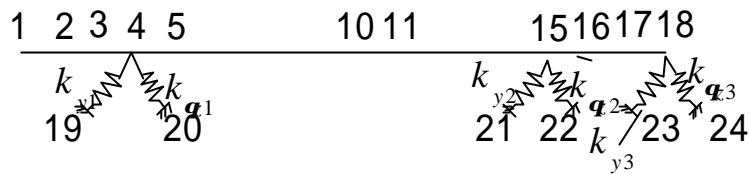


圖 2、轉子系統之有限元素模型

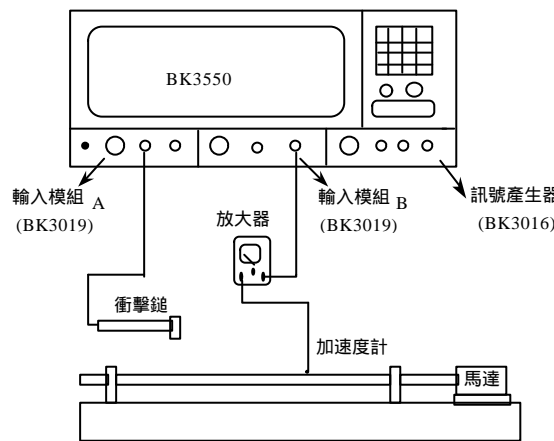


圖 3、模型驗證實驗架構圖

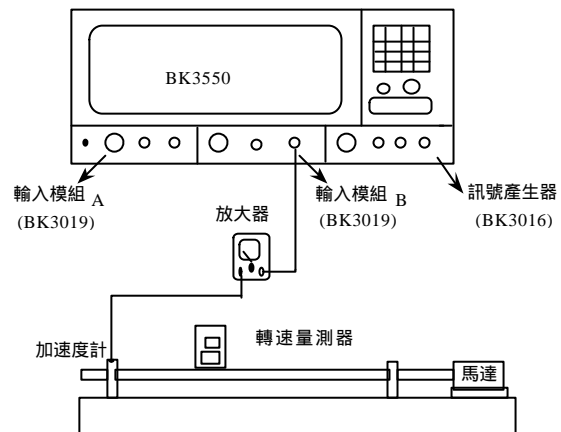


圖 4、臨界轉速驗證架構圖

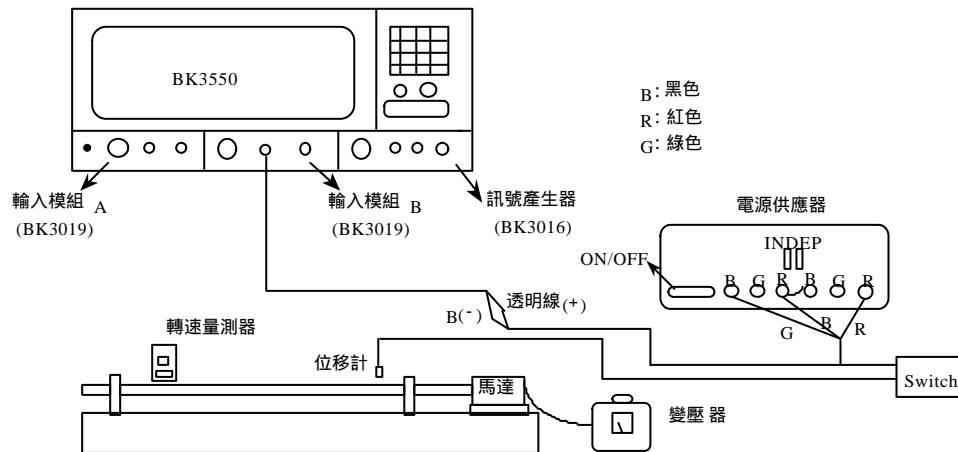


圖 5、操作變形振型實驗架構圖

3-2. 臨界轉速

臨界轉速可定義為主軸側向振動自然頻率對應之轉速，當主軸在此臨界轉速下運轉會有共振現象，亦即轉子系統會有異常增大之振動。為驗證臨界轉速現象，圖 4 為實驗架構圖。將馬達設定於不同轉速下運轉，以加速度計置於軸承座上度量加速度振幅，由振幅之大小可藉以判斷該系統之臨界轉速。

3-3. 操作變形振型

a. 有限元素分析：

在進行完模態分析之後接著進行簡諧分析(harmonic analysis)，可求得系統之操作變形振型(ODS)，此 ODS 可定義為簡諧激振下系統穩態響應。

b. 實驗模態分析：

本分析項目是在分析一轉子系統在操作狀態下之操作變形振型。其實驗之原理[2]為利用轉子在操作狀態下之動態行為，配合非接觸式渦電流位移計作為感測器，量取結構各點之響應訊號。將變壓器調至某轉速，使轉子在某一頻率下運轉，進而進行操作變形振型之量測，其實驗架構如圖 5 所示。

四、結果與討論

4-1. 模型驗證

a. 頻率響應函數：

圖 6 為實驗與理論之頻率響應函數比較，圖 6(a)中輸入點為第 5 點($j=5$)，輸出點為第 5 點($i=5$)，而此頻率響應函數稱為同點頻率響應函數(point FRF)，可觀察各共振點間均有一反共振點出現。圖 6(b)中輸入點為第 5 點($j=5$)，輸出點為第 18 點($i=18$)，而此頻率響應函數稱為轉移頻率響應函數(transfer FRF)。在圖中共有 3 條線，分別代表實驗、理論及曲線嵌合得到之合成(synthesize)頻率響應函數曲線，可觀察出實驗與理論之頻率響應函數相當吻合。

圖 7 為對應圖 6 之關聯性函數圖形。關聯數函數越接近 1 表示量測結構之頻率響應函數可靠性越好。在圖 6 中之關聯性函數大致都有接近於 1，只是在頻率較低或反共振點的位置有較低的情形，那是因為響應較小而導致關聯性偏低。

b. 模態參數之驗證：

表 2 為理論與實驗自然頻率之比較，由表 2 可觀察出其有限元素分析之自然頻率與實驗之自然頻率相差不大，誤差值約在-3.327%~4.275%之間，故所建立之有限元素模型可代表實際結構之模型。

表 3 為經最佳化分析之各彈簧常數之值。在轉子系統中之軸承及聯軸器位置是以線性彈簧和旋轉彈簧來模擬其特性，在有限元素分析中找出最佳之彈簧常數值來代表軸承及聯軸器之特性，進而架構出正確之有限元素模型來代表實體之模

型。

在進行實驗時，由於要量測加速度響應而加了對數加權函數(Exponential Window)，所以量得之響應會有阻尼加重之效應，而其值並不真正的阻尼比，故必須加以修正。表 4 為實驗與修正後之值，可觀察得知阻尼比約在 0.7~1.2%間略高於一般鋼材 0.1~0.5%，此可推測係來自軸承及聯軸器之阻尼效應。

圖 8 為理論模態振型與實驗模態振型之比較，由圖可觀察出其模態振型大致相同，主要是第五個振型較有差異。綜合而言，理論與實驗各模態振型特性之節點及形狀相當吻合。表 5 為實驗與理論振型之 MAC。在實驗中因為有誤差的產生，所以所得之振型與理論之振型不可能完全一致，因此 MAC 會介於 0 與 1 之間，若實驗與理論之振型有良好相關性其 MAC 會大於 0.9。由表 5 可觀察出 MAC 矩陣前三個對角線值大於 0.9，顯示理論與實驗之吻合性。而第 4、5 個模態振型約為 0.6914 和 0.1229 代表吻合性較差，也就是實驗與理論振型之相關性比較低，可能是在實驗時的誤差所造成之結果。

綜合以上討論，系統模態參數包括自然頻率、模態振型，理論分析與實驗量測結果相當吻合，驗證了有限元素模型之合理性。

4-2. 臨界轉速：

表 6 與圖 9 為臨界轉速驗證表與在不同轉速下之變形量。當轉子系統進行臨界轉速驗證時，其理論模態振型圖相互比對可得知各自然頻率所對應的模態振型圖是十分相似的，由表 6 與圖 9 之關係圖可知轉速在 3850.8rpm 與 12094.4rpm 時有最大的振動量與模型驗證之結果比對相似。

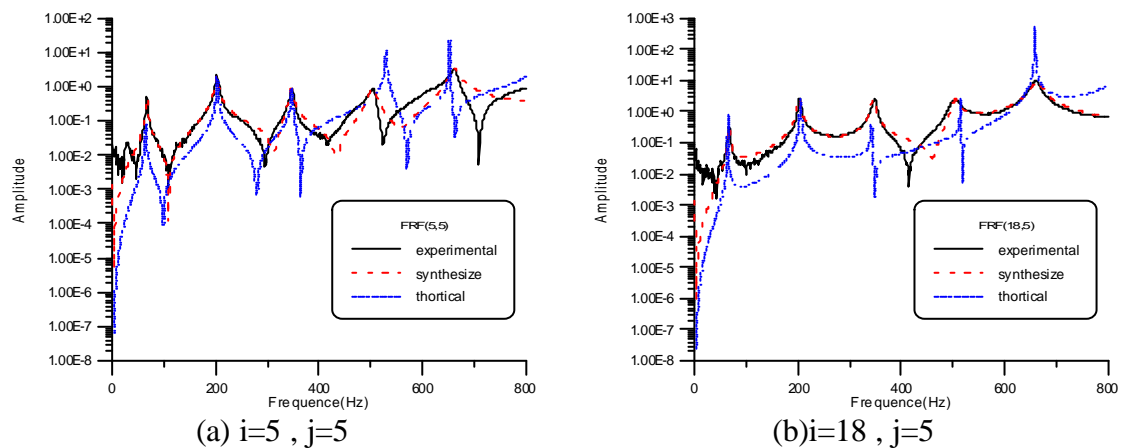


圖 6、實驗與理論之頻率響應函數比較

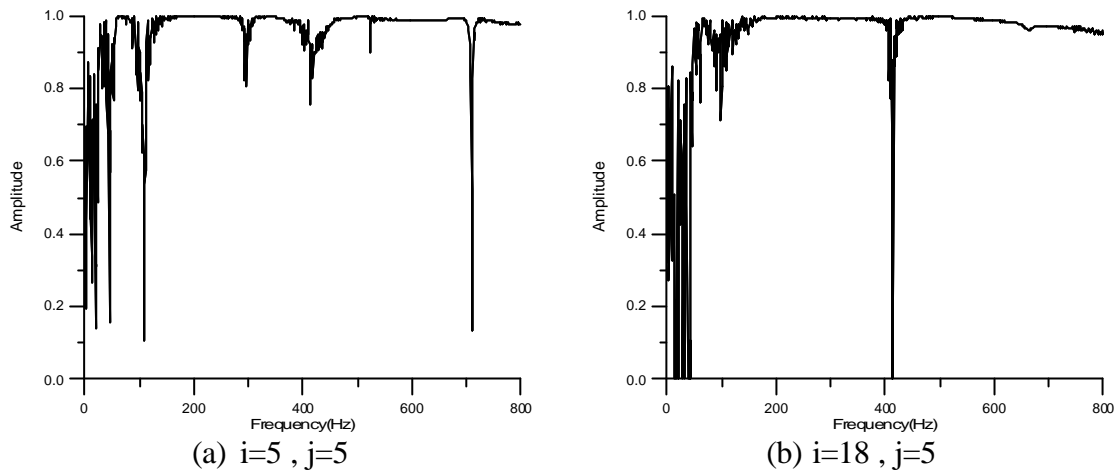


圖 7、關聯性函數之圖形

表 2、自然頻率之比較

	理論值(Hz)	實驗值(Hz)	誤差(%)
Mode 1	65.658	65.309	0.534
Mode 2	205.60	200.726	2.428
Mode 3	333.12	344.586	-3.327
Mode 4	524.09	502.602	4.275
Mode 5	659.98	660.717	-0.112

表 3、各彈簧常數之值

k 值	彈簧常數(N/m)
k_{y1}	0.28021E+7
k_{qz1}	1.1956
k_{y2}	0.13711E+7
k_{qz2}	1.2647
k_{y3}	954.30
k_{qz3}	954.77

表 4、阻尼比及其修正值

	實驗值(%)	修正值(%)
Mode 1	1.49	0.752
Mode 2	1.1	0.859
Mode 3	0.86	0.720
Mode 4	1.08	0.984
Mode 5	1.26	1.187

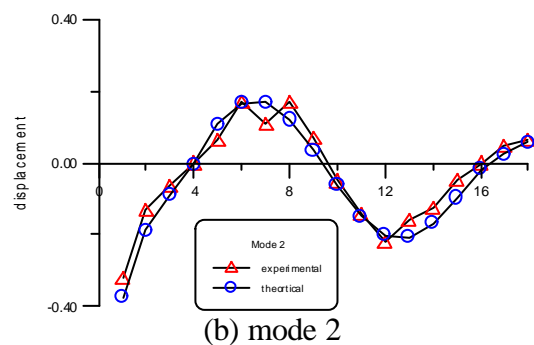
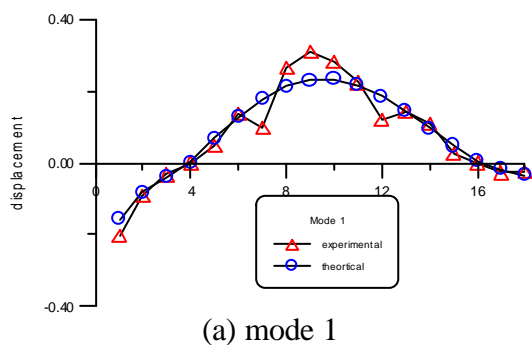


圖 8、實驗之振型與理論之振型比較

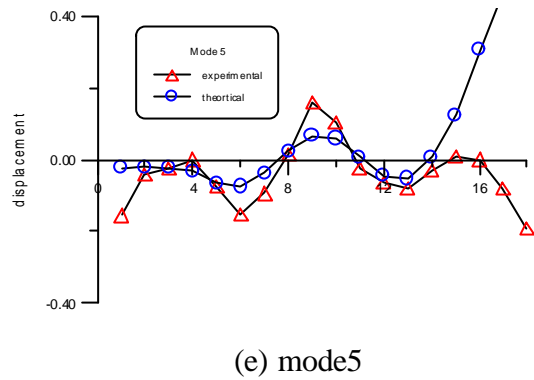
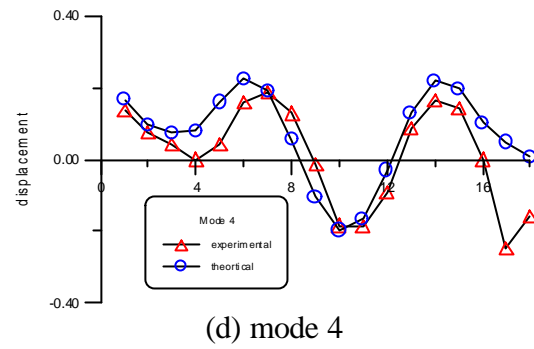
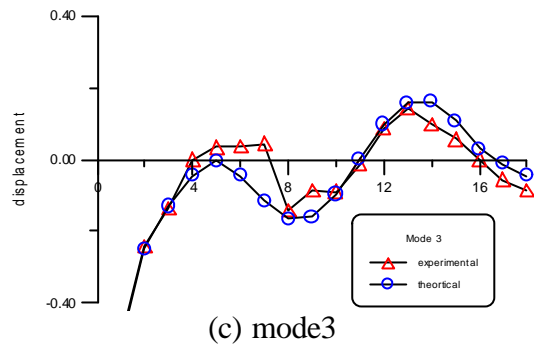


圖 8、實驗之振型與理論之振型比較 (續)

表 5、實驗振型與理論振型之 MAC

		實 驗 值				
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
理 論 值	Mode 1	0.9653	0.0191	0.0183	0.0118	0.0007
	Mode 2	0.0131	0.9609	0.1093	0.0199	0.0227
	Mode 3	0.0421	0.0764	0.9278	0.0100	0.0360
	Mode 4	0.0143	0.0150	0.1122	0.6914	0.1643
	Mode 5	0.0034	0.0091	0.0061	0.5087	0.1229

表 6、臨界轉速驗證

	模型驗證		臨界轉速驗證	
	Hz	rpm	Hz	rpm
Mode1	65.309	3918.54	63.43	3805.8
Mode2	220.726	12043.56	201.57	12094.4
Mode3	344.586	20675.16	X	X
Mode4	502.602	30156.12	X	X
Mode5	660.717	39643.02	X	X

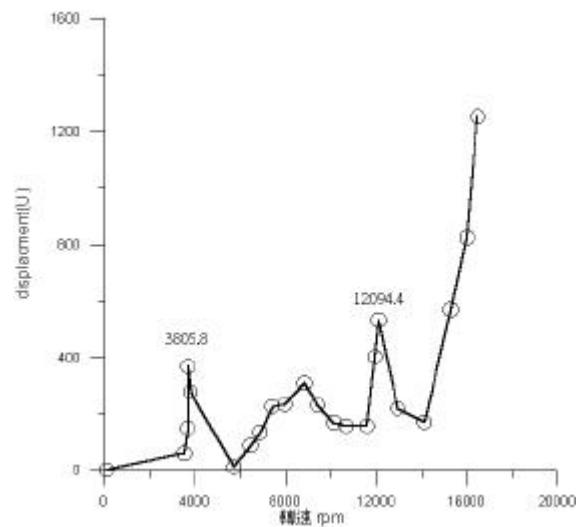


圖 9、在不同轉速下之變形量

4-3.操作變形振型：

本文實驗設定 2 個轉速為 4800rpm 與 7200rpm，其對應頻率分別是 80Hz 與 120Hz 亦即介於第 1 與第 2 個自然頻率(65.309Hz~200.726Hz)之間的頻率。量取各個所設定頻率（轉速）下之振型亦即操作振型變形，以下為各轉速下之探討：

a. 頻率為 80Hz，轉速為 4800rpm 之振型：

將頻率設定為 80Hz，轉速為 4800rpm 下量取在操作狀態下之振型。本文僅使用一個渦電流計所以無法量測出其相位角，僅以位移振幅表示，故所量得之數據皆為正值。在此報告是將理論值之數據取絕對值，以便與實驗值相比較。圖 10 為理論值與實驗值振型之比較，由圖可觀察出其振型大致相同，因為 80Hz 接近第一個模態，所以相近於第一個模態振型形狀。

b. 頻率為 120Hz，轉速為 7200rpm 之振型：

將頻率設定為 120Hz，轉速為 7200rpm 下量取在操作狀態下之振型。將理論值取絕對值，圖 11 理論值與實驗值振型之比較，由圖可觀察出在第 9、10、11 及 14 點有較低之現象，因為 120Hz 約在 1、2 模態中間，故 ODS 呈一、二模態之組合，由圖 11(b)可知實驗之 ODS 第二個模態效應顯著。

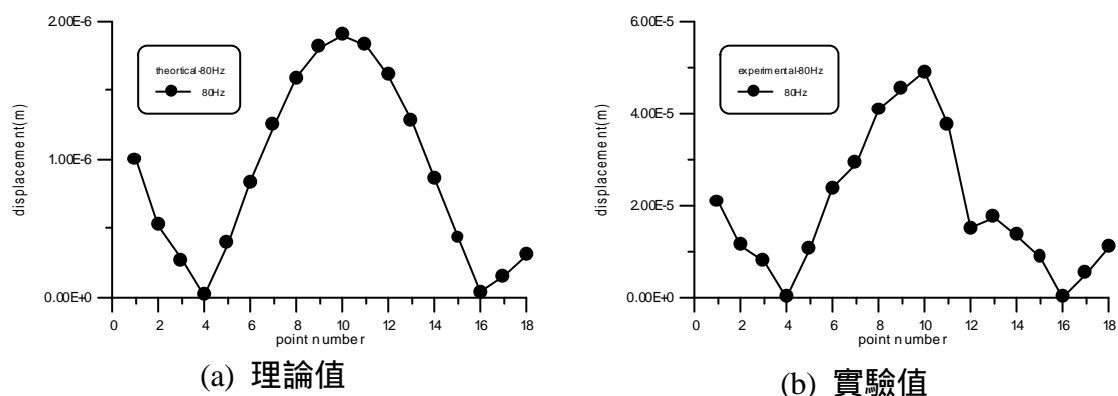


圖 10、80Hz 理論值與實驗值振型之比較

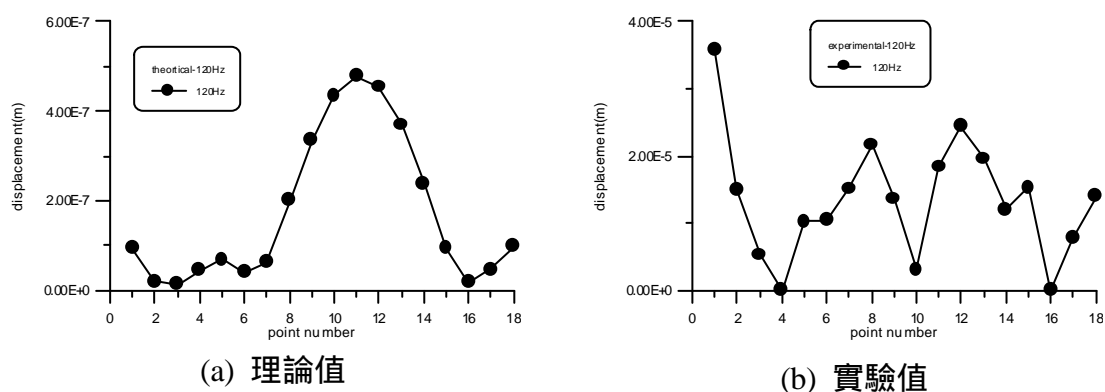


圖 11、120Hz 理論值與實驗值振型之比較

五、結論

本文以自製一可共振動探討教學用之轉子系統實體模型，首先以有限元素分析及實驗模態分析進行模型驗證，測得之系統側向振動自然頻率及振型，藉以驗證轉子臨界轉速與不同轉速下轉子之操作變形振型，主要結論如下：

1. 在模型驗證中可觀察出其實驗模態參數大致與理論值相同，主要是在第 4 及第 5 個模態之振型及 MAC 有較大之差異。
2. 在轉子系統臨界轉速之觀察驗證，第一、二個臨界轉速明確對應於第一、二個系統自然頻率。第三個臨界轉速則因為轉速太高，不易觀察。
3. 本文以一個渦電流位移計量測轉子之 ODS，可得知運轉中主軸之變形狀態。但無法明確得知相位角關係，未來可使用二個位移計以改善 ODS 量測。
4. 本文以線性及旋轉彈簧模擬軸承座及聯軸器，並以最佳化分析求得其彈簧常數。經模型驗證之有限元素模型可進行如本文所示之操作變形振型預測，更可進一步進行其他如轉子壽命評估等應用分析。

六、參考文獻

1. 王 村、陳永龍、廖韓攸、2001，轉子系統具轉盤質塊之模型驗證與臨界轉速驗證，專題報告，屏東科技大學
2. Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire, England.
3. 胡華良，2001，結構系統與操作狀態下之模態分析，碩士論文，屏東科技大學機械研究所
4. Marscher, W. D., 1999, "Modal Testing of Rotating Machinery while It Is Operating," *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, pp. 263-269.
5. Okubo, N., Tanabe, S., and Tatsuno, T., 1985, "Identification of Force Generated by A Machine Under Operating Condition," *Proceedings of the 3th International Modal Analysis Conference*, pp. 920-927.
6. Bai, M. S., Hsiao, I. I., Tsai, H. M., and Lin, C. T., 2000, "Development of An On-Line Diagnosis System for Rotor Vibration via Model-Based Intelligent Inference," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol.107, No.1, pp.315-323.
7. Khulief, Y. A., and Mohiuddin, M. A., 1997, "On The Dynamic Analysis of Rotor Using Modal Reduction," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 26, pp. 41-55.