

應用懸臂樑多軸向振動特性求取材料性質之振動分析

The Use of Multi-dimensional Vibration Characteristics of Cantilever beam in Determining Material Properties

王栢村¹ 徐川洋²¹ 國立屏東科技大學機械工程系教授² 國立屏東科技大學機械工程系研究生

摘要

本文主要是採用有限元素分析配合實驗模態分析，對懸臂樑結構之多軸向振動模態特性進行模型驗證，以求得材料的楊氏係數與滯松比。首先應用 ANSYS 軟體求得懸臂樑結構之側向扭轉軸向振動模態；再以實際懸臂樑結構進行實驗模態分析，求得對應之實驗數值。經由模型驗證分析，可確認得到材料之楊氏係數與滯松比。再進行簡易振動能量量測，分別選取不同的模態組合，由最佳化分析，以探討簡易量測法在求取懸臂樑結構之楊氏係數與滯松比之可行性。

關鍵詞：模型驗證，楊氏係數，滯松比，振動模態

1. 前言

隨著工業日益蓬勃發展，大眾對材料品質的要求也日又嚴格，而瞭解材料的楊氏係數、滯松比、阻尼比與抗振能力等等，都是基本的要求。瞭解材料的楊氏係數與滯松比可以得知材料的剛性為何，進而對材料做最適當的使用與設計；而材料的抗振性也是跟阻尼比有關，瞭解材料的抗振性，可以防止材料的破壞。傳統材料楊氏係數是利用材料的拉伸試驗求得，這種方法誤差大，並浪費材料，所以很不經濟。

利用振動方式來求取材料的楊氏係數與滯松比，國內外學者皆有相關文獻。王與吳[6]是應用振動量測來求取材料的楊氏係數與阻尼比。王[7]則是以壓電材料取代傳統材料來對懸臂樑結構進行振動分析。Bayon[8]等人應用雷射干涉儀來測定材料在磁力場狀況下，量測

到材料的楊氏模數與剪力模數。Hwang and Chang[10]利用利用振動測試配合有限元素分析和最佳化設計來獲得材料的彈性係數。Wang[11]利用 3 種不同的 actuator 與 sensor 去做振動量測分析。Ye[12]等人則是利用靜電力來使懸臂樑薄板產生振動，並以光學儀器量測所產生的位移量，以共振的方式來測得矽板材料的楊氏模數，並且測量殘留應力和疲勞特性，此法與傳統量測法比起來較精確。

本文是將材料模擬成懸臂樑結構，去做振動模態分析，求取材料的楊氏係數與阻尼比。將實驗模態分析所得到之材料自然頻率與有限元素分析得到之自然頻率相互比較，預期得到兩者自然頻率值相近實在有限元素中的楊氏係數。再配合半能量點法求取材料的阻尼比。

2. 問題定義與分析目標

2-1. 問題定義

將材料以懸臂樑結構形式，進行理論與實驗分析，在去做模型驗證，進而求得材料機械性質。懸臂樑結構尺寸及材料性質表如表一所示，而示意圖如圖 1 所示。

2-2. 分析目標：

- (1) 有限元素分析：分別以殼元素(shell 63)及線性立體元素(Solid 45)去架構懸臂樑材料的理論有限元素模型，來對各軸進行個別的理论有限元素分析，並進行收斂性分析，求得懸臂樑結構之側向、扭轉、軸向振動模態。
- (2) 實驗模態分析：將懸臂樑進行完整的模態測試(mode testing)，來求得懸臂樑結構之頻率響應函數及關連性函數，將所得的頻率響應函數去做曲線嵌合(curve fitting)，進而得到結構的模態參數，即自然頻率、阻尼比及振型，來對結構進行模型驗證，探討實驗之頻率響應函數之可信度。
- (3) 模型驗證：一般要求得材料的模態參數，就必須要經由理論分析值跟實際的實驗值進行模型驗證，模型驗證流程如圖 2 所示。藉由理論最佳化分析結果與實驗結果的模型驗證，探進討有限元素模型的正確與否。再將實驗與理論之頻率響應函數與實驗得到之 Synthesize 結果比對，最後再將理論與實驗之振型做 MAC(Modal Assurance Criterion)，探討理論與實驗振型的差異。進而得到可以代表實際懸臂樑結構的理念有限元素模型。
- (4) 評估簡易振動量測法於材料性質測定之可行性。

3. 有限元素分析

本文採用 ANSYS 軟體來進行理論分析，

分別採用(1)殼元素(shell 63)，如圖 3(a)所示；(2)立體元素(solid 45)，如圖 3(b)所示；來架構有限元素模型，再進行元素分割與 MESH，而固定端的位移限制在固定端時必須設定所有的自由度為零，即 x, y, z 方向位移均為零。

4. 實驗模態分析

4-1. 量測點規劃

分別就 x, y, z 軸進行個別的量測點規劃，規劃原則以可以量測到所有模態為主，去求取懸臂樑各軸的模態參數。

- (1) 探討 y 方向之 bending mode 與 x 方向之 torsion mode：將懸臂樑在長度方向劃分為 10 等分，如圖 4(a)所示，分別在兩端進量測，共有 20 個量測點，固定敲擊第 1 點，移動加速度計在長度上每一個分點，當加速度計與衝擊槌都在第 1 點時，將加速度計放置在懸臂樑的下端進行量測。
- (2) 探討 z 方向之 bending mode：將懸臂樑在厚度方向劃分為 5 等分，固定敲擊第 21 號點，移動加速度計在厚度上每一個分點，如圖 4(b)所示。
- (3) 探討 x 之軸向模態：在懸臂樑在寬度方向劃分為 3 等分，固定敲擊第 27 號點，移動加速度計在寬度上每一個分點，如圖 4(c)所示。

4-2. 儀器架構與實驗步驟

利用實驗模態分析法可以求得結構的動態特性，主要是利用訊號分析儀快速求得結構之頻率響應函數，在經由曲線嵌合得到結構之模態參數，包括自然頻率、阻尼比、振型等等。

首先要將 BK 3550 訊號分析儀與 CADA-PC 取線嵌合軟體裡的所有設定都設定好，在 BK 3550 方面，頻寬設定為 $0 \sim 3.2\text{KHz}$ ，解析調數為 800 條，為減少訊號的洩漏，實驗的衝擊錘必須加上 Transient 加權函數，感測

器之加速度響應必須加上 Exponential 加權函數。實驗的方式是固定衝擊錘的敲擊位置，移動加速度計，加速度計和點力的振型都是屬於位移振型，所以實驗得到的是位移振型。將實驗部份分為(1)長度方向的量測，(2)厚度方向的量測，(3)X軸向量測，分別做量測探討。

實驗架構情形如圖 5(a)與圖 5(b)所示，使用儀器一覽表則如表二所示，先將衝擊錘用導線接於訊號分析儀之 A 輸入模組，其次再將加速度計用導線經過電荷放大器接於訊號分析儀之輸入模組 B，透過 IEE-488 介面將訊號由訊號分析儀輸入到個人電腦。利用衝擊錘對懸臂樑結構產生激振，以加速度計作為感測器，來量測懸臂樑結構之響應訊號，經過電荷放大器傳輸到頻譜分析儀，進行快速傅立葉轉換，求得懸臂樑結構之頻率響應函數及關連性函數，最後將所得到的頻率響應函數傳到 CADA-PC，去做曲線嵌合，以得到懸臂樑結構之模態參數，即自然頻率、阻尼比及振型等。

5. 結果與討論

5-1. 有限元素模型斂性分析

分別將以殼元素與立體元素架構之懸臂樑分割成 20、40、80 等分，並觀察其自然頻率斂性，如表三所示，表(a)視殼元素斂性情形，表(b)則是立體元素斂性情形。由表中得知兩者的差距極小，所以採用比較接近實體的立體元素來架構元素模型。

5-2. 模型驗證

分別探討懸臂樑試片之實驗與理論之比較結果，包括頻率響應函數、模態參數(即自然頻率、阻尼比及振型)，其中振型比較包含 MAC 的驗證。

5-2-1. y 方向之 bending mode 與 x 方向之 torsion mode 之探討：

- (1) 自然頻率的驗證：本實驗取前 6 個模態，分析前 6 個模態的自然頻率，實驗與理論的前 6 個自然頻率比較如表四(a)所示，由表中可以看出自然頻率百分比誤差在正負間變動，沒有完全偏向正或負，可以判斷出架構懸臂樑的正確性。
- (2) 阻尼比驗證：理論分析並無法求得阻尼比，可以在實驗中進行參數估測求得阻尼比，但因加速度計加上了對數函數之加權函數效應，所以必須加以修正，結果如表五(a)所示；而第一個模態得到的阻尼比較大的原則是動態範圍不足、邊界效應與質量效應所造成。
- (3) 頻率響應函數的驗證：實驗與理論之頻率響應函數(FRF)結果如圖 6(a)所示， $i=1$ 、 $j=20$ ，表示輸入為第 1 點，輸出在第 20 點，其頻率響應函數稱為轉移頻率響應函數(trans FRF)。圖中 3 條曲線分別為理論、實驗及 Synthesize 之頻率響應函數曲線，其中 Synthesize 曲線為曲線嵌合得到的模擬曲線，可以看出前 6 個自然頻率範圍與實驗曲線相當吻合，表示曲線嵌合正確。但實驗頻率響應函數在低頻時與 Synthesize 和理論相比較時，情形就比較差，是因為在做實驗時所產生的雜訊引起，但對整體結果而言，影響並不大。
- (4) 振型的驗證：實驗之振型圖如圖 7 所示，理論振型圖如圖 8 所示。由圖 7 與圖 8 中可知理論與實驗結果相當吻合。實驗振型與理論振型之 MAC 如表六(a)所示。

5-2-2. z 方向之 bending mode 之探討：

- (1) 自然頻率的驗證：在實驗中我們觀察到有 2 個 z 方向之模態，分析其自然頻率如表四(b)所示。由表中得知誤差很大，原因是夾持端的邊界效應。

- (2) 阻尼比驗證：如表五(b)所示
- (3) 頻率響應函數的驗證：頻率響應圖如圖 6(b) 所示；實驗與理論之振型比較圖如圖 9 所示。
- (4) 振型的驗證：實驗振型與理論振型之 MAC 如表六(b)所示。

5-2-3.x 軸向模態之探討：

自然頻率的驗證：實驗過程中無法激出訊號，所以採用 FEA 結果與套用公式的參考值相互比較，自然頻率如表四(c)所示。

5-3. 試片材料性質探討

將試片進行最佳化收斂分析，分別以(1)只考慮 By 與 Tx，(2)只考慮 Bz，(3) By 與 Tx 與 Bz，來個別進行分析，去做試片材料性質探討，所得到結果如表七所示。由表七中結果可以知道，量測的楊氏係數誤差值都在 10% 以內，而蒲松比誤差值更都在 1% 以內，所以日後可以採用簡易量測法來替代完整的實驗模態分析。

6. 結論

1. 將實驗模態分析所求得材料的實際模態參數，與理論分析求得之模態參數比較後，得到結果算是相當吻合，表示所架構的有限元素模型是正確的。
2. 本次實驗頻寬設為 6.4kHz，在 Z 方向 bending mode 只能看到兩個 mode，所以厚度方向的楊氏係數與阻尼比也個只有兩個模態，以後可以試著將頻寬變大，比較多一點模態，可提高數值的可信度。
3. 實驗振型圖固定端歪斜同邊的原因為夾持時微量歪斜與敲擊點微量偏移問題所產生。
4. x 軸向應力方向量測並沒有振型圖的產生。
5. 阻尼比在低頻模態時比較高，其原因是

動態範圍不足與邊界效應的影響。

6. 由表七結果得知，簡易量測法的可行性很高。

7. 參考文獻

1. 王栢村，2001，電腦輔助工程之實務與應用，全華科技圖書股份有限公司。
2. 王栢村，2001，ANSYS 有限元素分析應用實例，國立屏東科技大學機械工程研究所。
3. 王栢村，2001，振動學，全華科技圖書股份有限公司。
4. 王栢村，1998，實驗模態分析實習，國立屏東科技大學機械工程研究所。
5. 王栢村，1998，實驗模態分析，國立屏東科技大學機械工程研究所。
6. 王栢村，吳建德，1998，「應用振動量測於材料楊氏係數與阻尼比之測定」，實驗模態分析課程講義，第 299-313 頁。
7. 王重杰，1995，應用壓電材料於結構之實驗模態分析，國地屏東科技大學機研所碩士論文。
8. Bayon, A., Chicharro, J. M., and Salazar, F., 2000, "Simultaneous Measurement of Field Dependence of Elastic Moduli by Laser Interferometry." *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* Vol. 219 pp. 229-235.
9. Ebersbach, P., and Irretier, H., 1989, "On the Application of Modal-parameter Estimation Using Frequency-domain Algorithms," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 4, pp.109-116.
10. Hwang, S. F., and Chang, C. S., 2000, "Determination of Elastic Constants of Materials by Vibration Testing." *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 183-190.

11. Wang, B. T., 1998, "Structural Modal Testing with the Use of Various Forms of Actuators and Sensors," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol.12, No.5, pp. 627-639.
12. Ye, X. Y. and Z. Y. Zhou and Y. Yang and J. H. Zhang and J. Yao, 1996, "Determination of the Mechanical Properties of Microstructures," *Sensors and Actuators Vol. 54A*, pp. 750-754.
13. Yang, J, and Cheng, J, 2002, "Determination of the Elastic Constants of a Composite Plate Using Wavelet Transforms and Neural Networks," *Acoustical Society of America*, Vol. 111, No. 3, pp. 1245-1250.
14. Fällstöm, Karl-Evert., Olofsson, K., Saldner, H. O., and Schedin, S., 1996, "Dynamic Material Parameters in an Anisotropic Plate Estimated by Phase-Stepped Holographic Interferometry," *Optics and Lasers in Engineering*, Vol. 24, pp. 429-454.

表一、懸臂樑的尺寸及材料性質表

材料全長 (mm)	248.8
實驗量測長度 L (mm)	200
寬度 B (mm)	39.00
厚度 H (mm)	3.22
密度 ρ (kg/m^3)	8039.86
重量 (g)	251.2

表二、使用儀器表

儀器名稱	型號
訊號分析儀	BK3550
衝擊錘	BK8202
加速度計	PCB 352A10
電荷放大器	PCB 480E09

表三、有限元素模型之收敛分析

(a) 殼元素

分割數 f	20	40	80	模態特性
f_1	60.19	60.23	60.129	1 st - By
f_2	377.92	378.95	376.57	2 nd - By
f_3	609.34	604.06	604.63	1 st - Tx
f_4	726.10	724.41	722.51	1 st - Bz
f_5	1020.50	1027.50	1012.50	3 rd - By
f_6	1878.10	1848.10	1853.00	2 nd - Tx
f_7	2102.00	2131.20	2080.70	4 th - By

(b) 立體元素

分割數 f	20	40	80	模態特性
f_1	60.76	60.44	60.18	1 st - By
f_2	388.91	387.33	378.49	2 nd - By
f_3	642.75	610.68	599.79	1 st - Tx
f_4	731.72	731.26	726.00	1 st - Bz
f_5	1103.40	1096.70	1027.70	3 rd - By
f_6	2101.00	1922.80	1847.10	2 nd - Tx
f_7	2442.70	2426.7	2143.50	4 th - By

表四、懸臂樑結構之理論分析與實驗分析所得自然頻率與誤差百分比

(a) By 與 Tx 模態之自然頻率

模態數	實驗值 (Hz)	理論值 (Hz)	誤差百分比 (%)
1	60.062	60.182	-0.200%
2	372.010	378.490	-1.742%
3	616.000	599.790	2.631%
4	1040.000	1027.700	1.183%
5	1880.000	1847.100	1.750%
6	2040.000	2143.500	-5.074%

(b) Bz 模態之自然頻率

模態數	實驗值 (Hz)	理論值 (Hz)	誤差百分比 (%)
1	609.375	690.760	-13.355%
2	3725.000	4322.507	-16.040%

(c) x 軸向模態之自然頻率

模態數	參考值 (Hz)	理論值 (Hz)	誤差百分比 (%)
1	6250.000	6535.500	-4.568%

表五、懸臂樑結構之實驗阻尼比與其修正值

(a) By 與 Tx 模態之阻尼比

模態數	實驗值	修正值
1	4.54%	3.75%
2	0.66%	0.53%
3	0.37%	0.29%
4	0.42%	0.37%
5	0.17%	0.14%
6	0.25%	0.23%

(b) Bz 模態之阻尼比

模態數	實驗值	修正值
1	1.11%	1.02%
2	0.902%	0.88%

表六、實驗振型與理論振型之 MAC

(a) By 與 Tx 模態之 MAC

Mode	1 st By	2 nd By	1 st Tx	3 rd By	2 nd Tx	4 th By
1 st By	0.99556	0.00871	0.00966	0.00968	0.00283	0.00306
2 nd By	0.01073	0.98598	0.00097	0.00061	0.01010	0.00638
1 st Tx	0.01081	0.00181	0.95199	0.00748	0.00924	0.00280
3 rd By	0.01135	0.00116	0.00292	0.99406	0.00053	0.00134
2 nd Tx	0.00241	0.01058	0.00632	0.00327	0.98482	0.00195
4 th By	0.00321	0.00038	0.00057	0.00015	0.00402	0.99603

(b) Bz 模態之 MAC

Mode	1 st Bz	2 nd Bz
1 st Bz	0.7042	0.1894
2 nd Bz	0.1215	0.6278

表七、試片材料性質探討

	E	ν
1 st By+2 nd By	$187.57 \times 10^9 (N/m^2)$	0.29972
1 st By+2 nd By+1 st Tx+2 nd Tx	$192.36 \times 10^9 (N/m^2)$	0.3005
1 st Bz+2 nd Bz	$178.77 \times 10^9 (N/m^2)$	0.2991
By+Tx+Bz	$186.13 \times 10^9 (N/m^2)$	0.2998

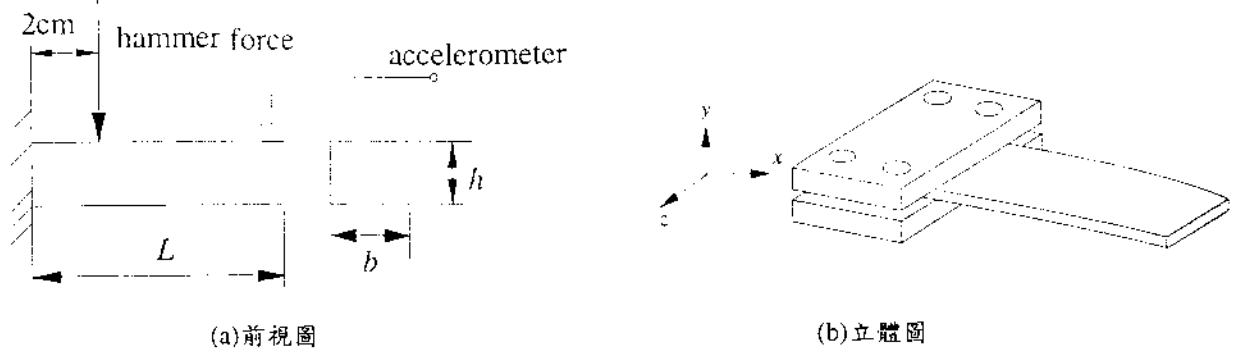


圖 1、試片夾持於固定端的實際情形

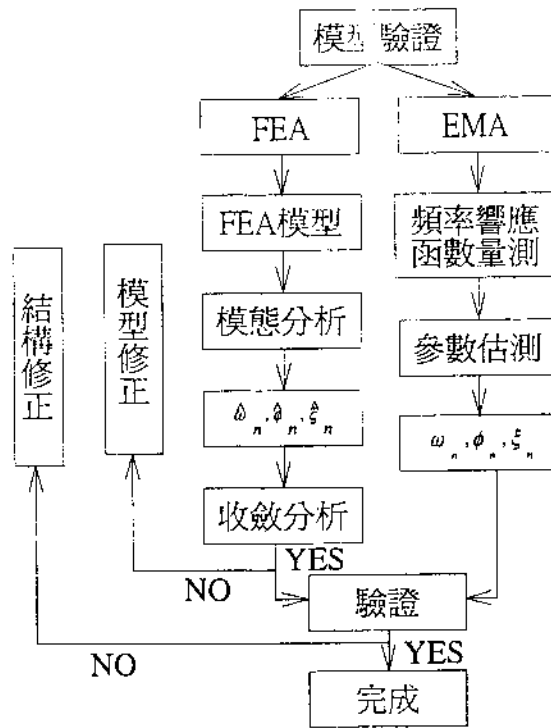
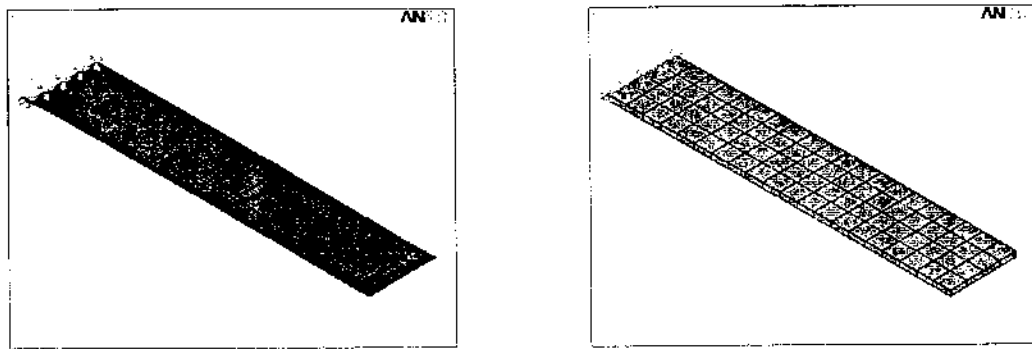


圖 2、模型驗證之流程圖



(a)以 shell 63 架構之 FE model

(b)以 solid 45 架構之 FE model

圖 3、有限元素模型示意圖

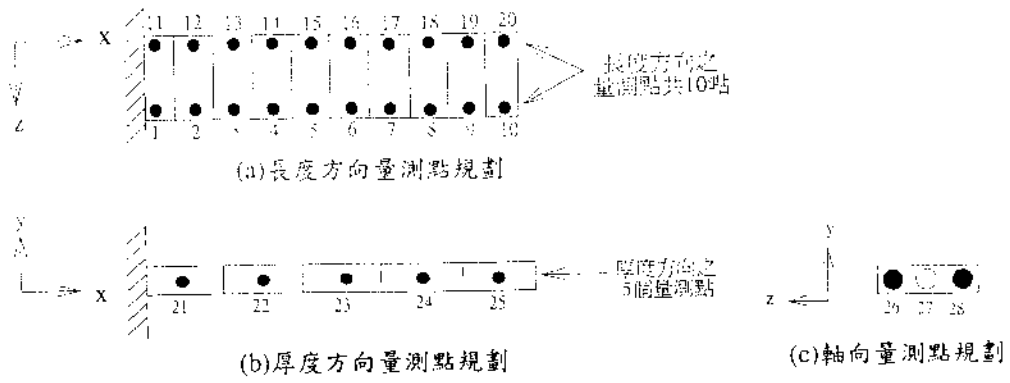
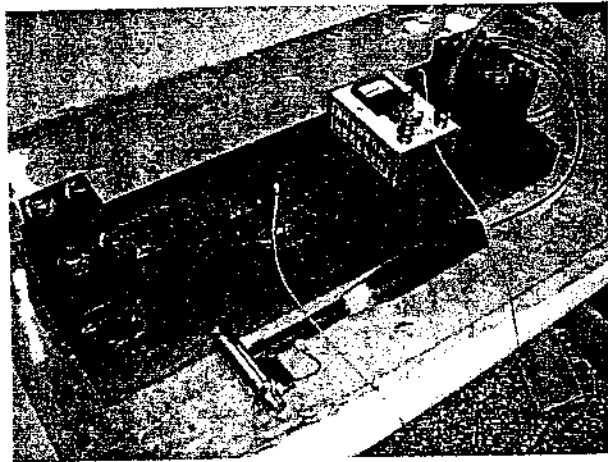


圖 4、懸臂樑的等分情形



(a)實際懸臂樑之架構情形

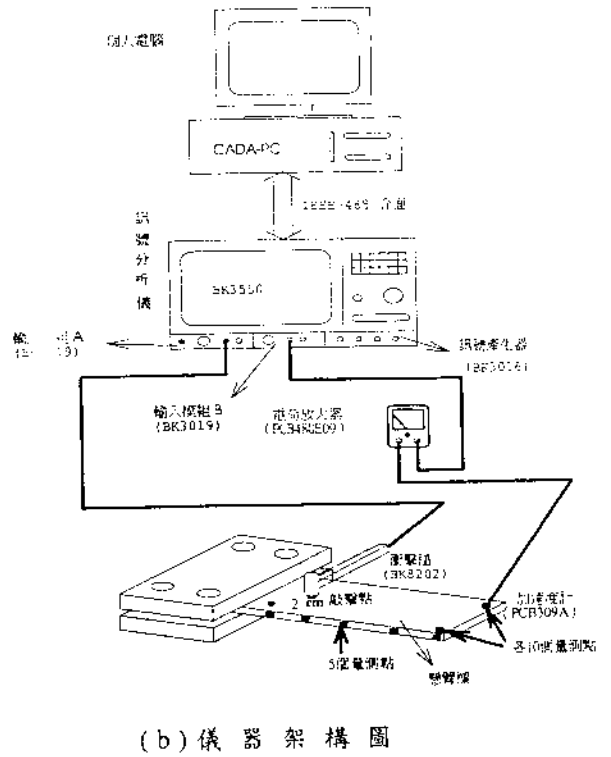
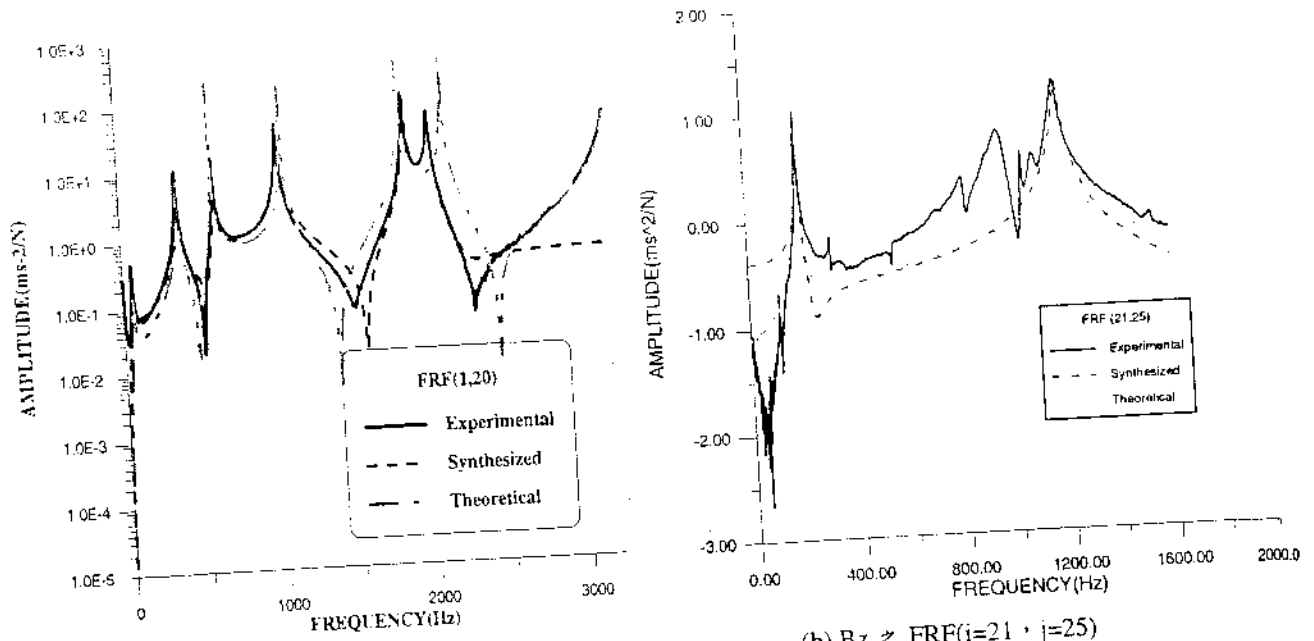


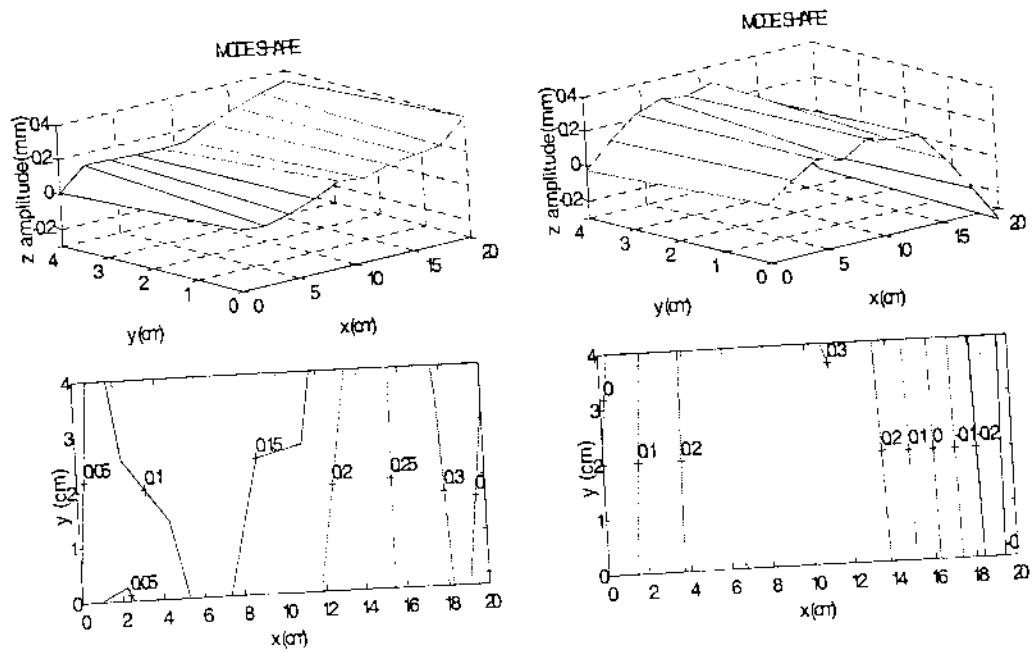
圖 5、實驗設備架構圖



(a) By 與 Tx 之 FRF(i=1, j=20)

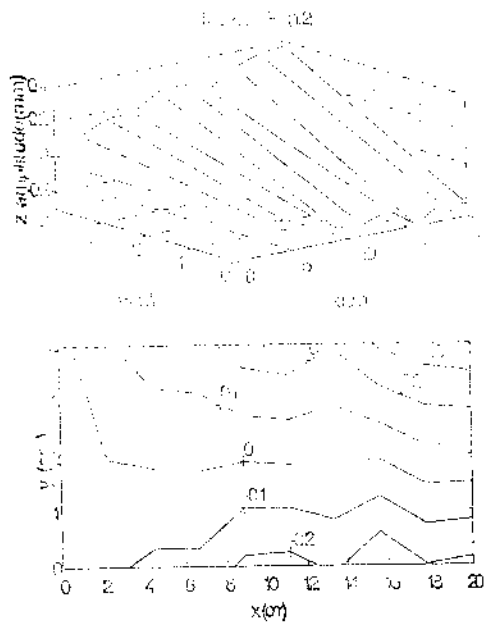
(b) Bz 之 FRF(i=21, j=25)

圖 6、實驗與理論之頻率響應函數比較圖

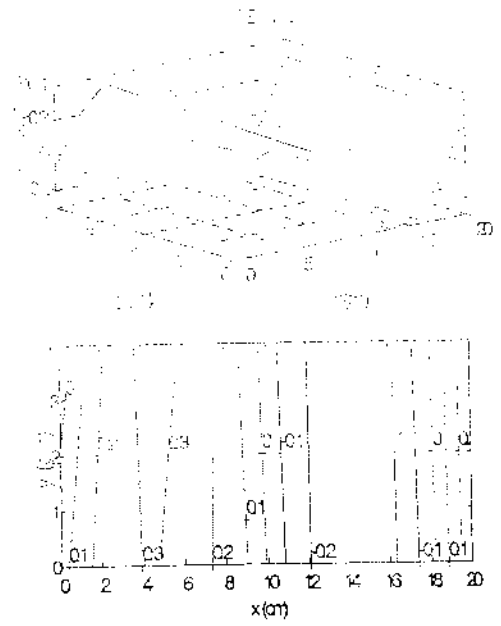


(a) 第一個頻率之振型(1st-By)

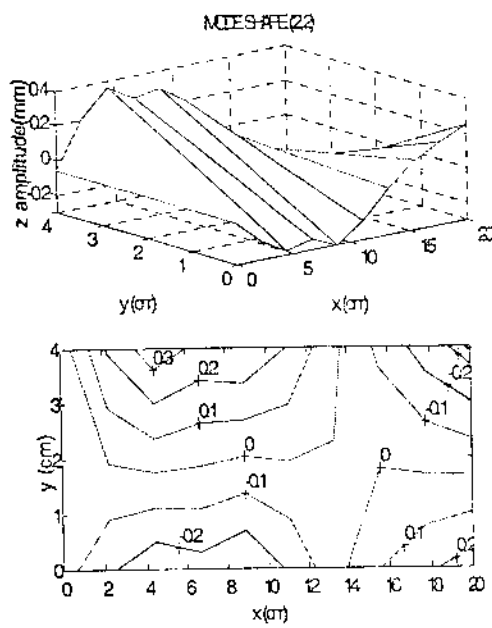
(b) 第二個頻率之振型(2nd-By)



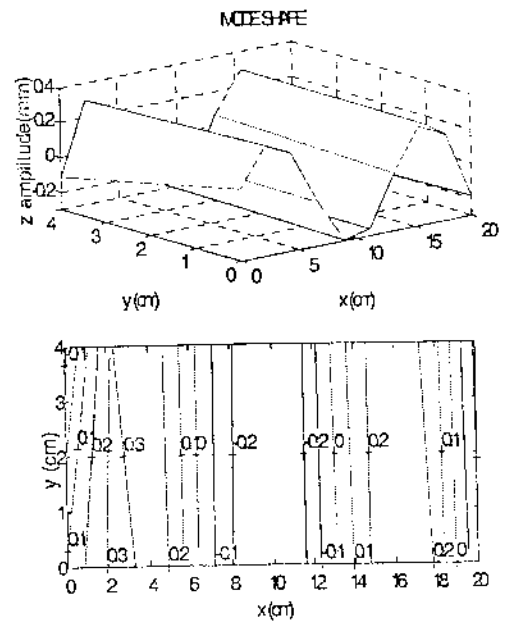
(c) 第三個頻率之振型(1st-Tx)



(d) 第四個頻率之振型(3rd-By)

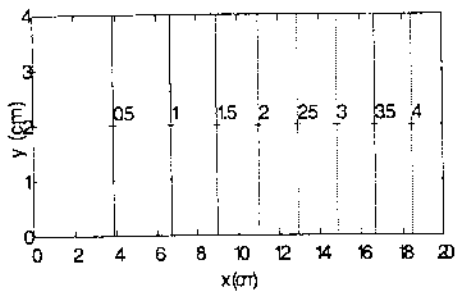
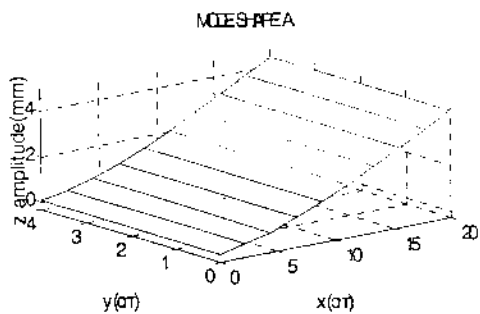


(e) 第五個頻率之振型(2nd-Tx)

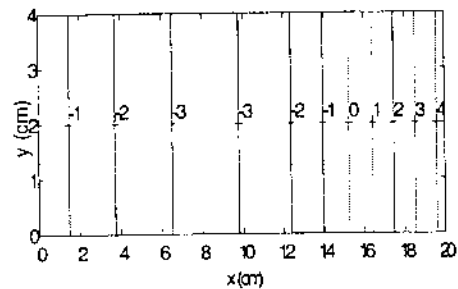
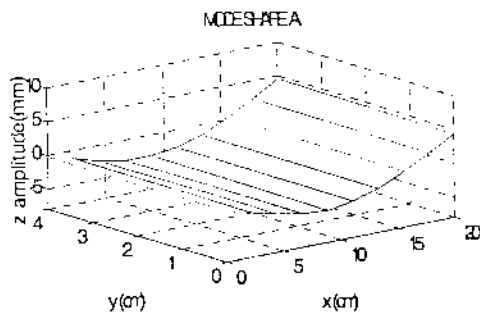


(f) 第六個頻率之振型(4th-By)

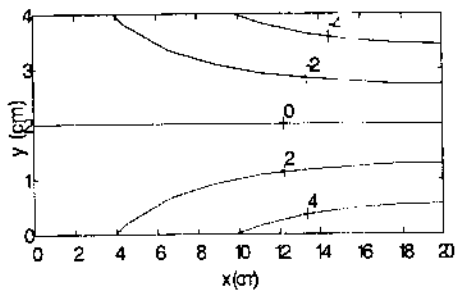
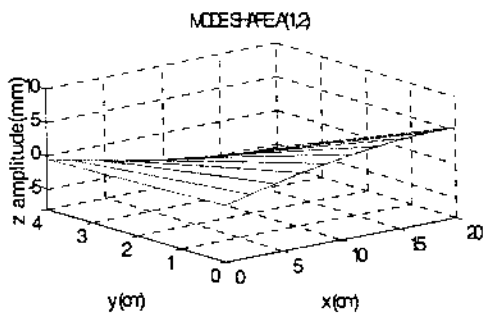
圖 7、By 與 Tx 之實驗之振型圖



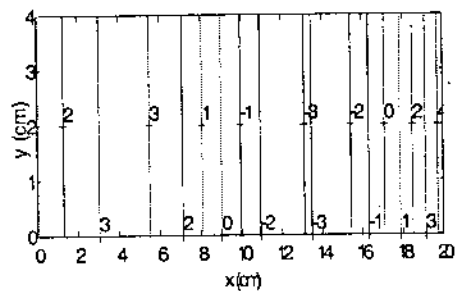
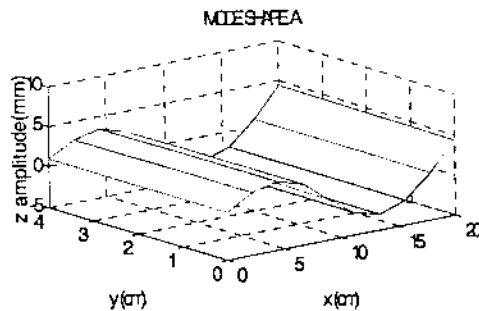
(a) 第一個頻率之振型(1st-By)



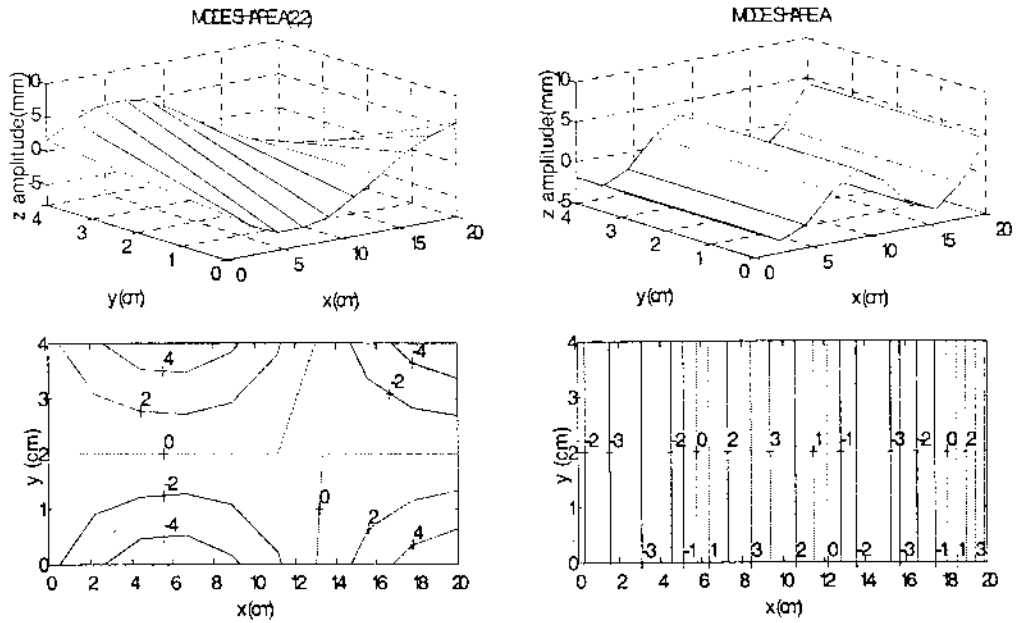
(b) 第二個頻率之振型(2nd-By)



(c) 第三個頻率之振型(1st-Tx)



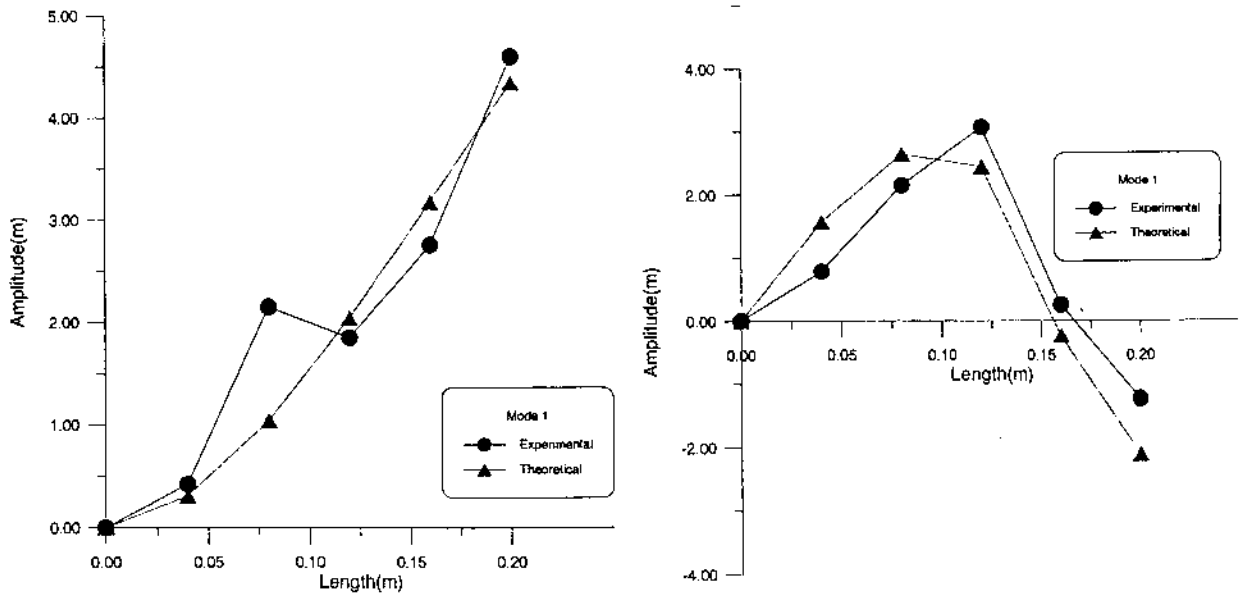
(d) 第四個頻率之振型(3rd-By)



(e) 第五個頻率之振型(2nd-Tx)

(f) 第六個頻率之振型(4th-By)

圖 8 · By 與 Tx 之理論之振型圖



(b) Mode 1

(c) Mode 2

圖 9 · Bz 之理論與實驗振型比較圖