

壓電驅動模式於樑變形與應力分析之評估

Evaluation of Piezoceramic Actuation Model for Beam
Deformation and Stress Analysis王栢村¹ 呂世鑫² 劉健烽³¹ 國立屏東科技大學機械工程系教授^{2,3} 國立屏東科技大學機械工程系研究生

摘要

本文主要是以有限元素分析之熱膨脹分析來模擬樑受壓電材料作用之靜態分析。分別以簡支樑與懸臂樑之不同邊界樑來進行分析。將壓電材料黏貼於樑之上下兩面，施加正負相反電壓使樑產生純彎曲變形，以有限元素分析之熱膨脹分析來模擬壓電材料對樑之影響。依據理論分析與熱膨脹分析之最大位移變形、正向應力及剪應力之情形做比較分析。另外，依據最大位移變形量來分析壓電材料置於樑之不同位置對樑之影響。本文以有限元素分析之熱膨脹分析來模擬樑受壓電材料作用之靜態分析，有助於探討理論分析之合理性。

關鍵詞：熱膨脹分析、壓電材料

1. 前言

當壓電材料的兩端加入一電壓時會使得材料產生變形，而此一變形與壓電材料的特性以及外加的電壓大小有關，因此其壓電效應所產生之變形量隨外加電壓而改變的現象為壓電驅動器之基本工作原理。

當樑上下兩面之壓電材料受一正負電壓差，則樑上面的壓電材料受正電壓會有向兩端膨脹的效果，樑下面的壓電材料受負電壓會有向兩端收縮的效果。而其膨脹收縮的效果也會形成純彎曲之效應。若為熱膨脹效應，則給予樑上面的壓電材料為正的熱膨脹係數，而樑下面的壓電材料為負的熱膨脹係數，再施予溫度差，則亦會發生膨脹收縮的效應，因此可採取熱膨脹分析方式模擬壓電驅動的效果。

國內、外對於壓電材料之分析也有相關的文獻探討如王與曾[1] 應用有限元素分析壓電材料於結構驅動之分析，並考慮具有黏著層情況之驅動分析。Wang

and Rogers[3] 應用複合材料理論，推導壓電材料於複合板及樑之驅動理論分析模式，而樑與板假設為無限長。Clark et al. [4] 運用二維板之理論分析基礎，推導一維樑之壓電材料驅動理論模型分析。Liu et al. [5] 利用壓電材料之基本物理現象，施予電壓作為驅動器來產生力矩，並利用 Hamilton 原理推導出動態方程式，並說明推導壓電材料在不同片數為驅動器及不同位置所產生之力矩大小。

本文目的為使用有限元素分析之熱膨脹分析來模擬樑受壓電材料作用下之變形及應力分析，各別考慮了不同邊界及不同壓電材料位置的情形，探討理論分析之合理性。

2. 問題定義與分析目標

2-1. 問題定義：

考慮樑結構，如圖 1 所示，試建立理念有限元素模型，以有限元素分析之應用，分析壓電材料於樑結構之影響。表 1 為樑之材料性質及幾何尺寸。表 2 為

壓電材料之材料性質。

2-2.分析目標：

考慮壓電材料黏貼於樑上，探討熱膨脹分析來模擬樑受壓電材料作用之靜態分析。分別以簡支樑與懸臂樑之不同邊界樑來進行分析，以探討理論分析之合理性。

3.理論分析

3-1.熱膨脹分析[2]：

假設樑均勻提高溫度 ΔT ，則產生熱變形 δ_{th} 及熱應變 ϵ_{th} ，其關係式如下：

$$\delta_{th} = \alpha L \Delta T \quad (1)$$

$$\epsilon_{th} = \alpha \Delta T \quad (2)$$

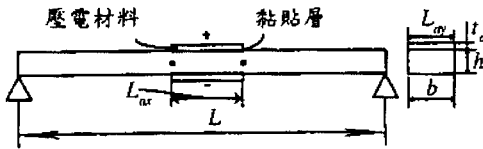


圖 1. 樑黏貼壓電片之實際狀況

表 1. 樑之材料性質及幾何尺寸

材料	鋼
長度 L	0.38 m
寬度 b	0.04 m
厚度 h	0.002 m
密度 ρ	7870 kg/m ³
楊氏係數 E	207 × 10 ⁹ N/m ²
浦松比 ν	0.292

表 2. 壓電材料之材料性質

材料	壓電陶瓷
長度 L_{ax}	0.0635 m
寬度 L_{ay}	0.04 m
厚度 t_a	0.0001905 m
楊氏係數 E_a	63 × 10 ⁹ N/m ²
浦松比 ν	0.28
壓電應變常數 (d_{31} , d_{32})	166 × 10 ⁻¹² m/V

L ：結構長度

α ：材料熱膨脹係數

3-2.Wang and Rogers[3] 之理論分析：

考慮一樑將壓電材料黏貼於樑之上下表面，施加正負相反之電壓差使樑產生純彎曲變形。圖 2 為壓電材料系統圖。圖 3 為其理論正向應力及剪應力分佈圖。根據[3]，壓電材料特性及所產生之等效彎曲力矩如下：

$$\Lambda = \frac{d_{31} V}{t_a} \quad (3)$$

$$\psi = \frac{t E}{t_a E_a} \quad (4)$$

$$M = \frac{t^2 E}{6 + \psi} L_{ay} \Lambda \quad (5)$$

Λ ：壓電應變

d_{31} ：壓電常數

ψ ：壓電材料和樑之物理性質純量比

L_{ay} ：壓電材料寬度

M ：壓電材料兩端之彎曲力矩

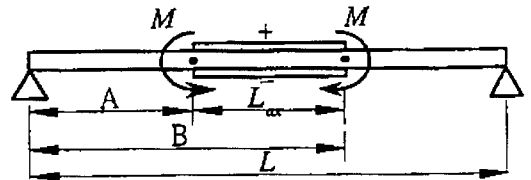


圖 2. 壓電材料系統圖

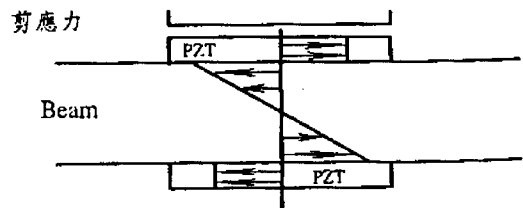


圖 3. Wang and Rogers[3] 理論正向應力及剪應力分佈圖

3-3. Clark et al. [4] 之理論分析：

假設壓電材料之正向應力為線性分佈，而樑正向應力及剪應力為線性分佈，如圖 4 所示。其壓電材料所產生之等效彎曲力矩如下：

$$M = m_x L_{py} \quad (6)$$

$$m_x = c_o \Lambda \quad (7)$$

m_x ：所產生之彎曲力矩

c_o ：壓電材料樑之拘束參數

4. 有限元素分析

4-1. 純彎曲力矩理論：

4-1-1. Wang and Rogers[3] 之彎曲力矩：

a. 元素形式：採用樑元素 Beam3。

b. 元素分割：將元素分成四等分，並考慮壓電材料位置。如圖 5 所示。

c. 位移限制：考慮簡支樑(model A₁)與懸臂樑(model B₁)結構。

d. 外力負荷：以理論之線力矩表示。

4-1-2. Clark et al. [4] 之彎曲力矩：

a. 元素形式：採用樑元素 Beam3。

b. 元素分割：將元素分成四等分，並考慮壓電材料位置。

c. 位移限制：考慮簡支樑(model A₂)與懸臂樑(model B₂)結構。

d. 外力負荷：以理論之線力矩表示。

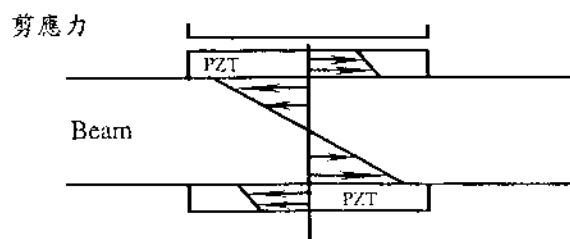


圖 4. Clark et al.[4] 理論正向應力及剪應力分佈圖

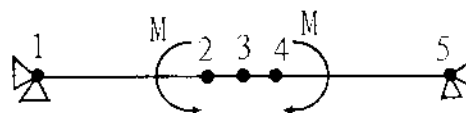


圖 5. 純彎曲理論有限元素模型

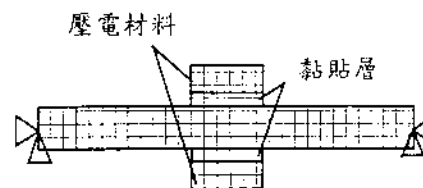


圖 6. 簡支樑有限元素模型

4-2. 熱膨脹理論：

4-2-1. 簡支樑結構(model A₃)：

a. 元素形式：採用平面元素 Plane 42。

b. 元素分割：樑上分為兩個區域，一為壓電材料夾層區，另一為非壓電材料夾層區。在水平方向設 $m=40$ 等分，壓電材料與黏貼層垂直方向設 $n_1=4, n_2=2$ 等分。

c. 位移限制：在固定端設定 $U_x = U_y = 0$ 。因為要和樑元比較，所以將位移限制設定於中間部分，如圖 6 所示。

d. 外力負荷：壓電材料位置施加溫度效應 100°C 。

4-2-2. 懸臂樑結構(model B₃)：

a. 元素形式：採用平面元素 Plane 42。

b. 元素分割：與熱膨脹理論分析之簡支樑相同。

c. 位移限制：在固定端設定 $U_x = U_y = 6_z = 0$ 。

d. 外力負荷：壓電材料位置施加溫度效應 100°C 。

5. 結果與討論

5-1. 簡支樑：

5-1-1. 位移變形：

比較 model A₁、model A₂ 及 model A₃ 之壓電材料於不同位置之位移變形量，如表 3 所示。誤差 I 為 model A₁ 與 model A₃ 之比較，誤差 II 為 model A₂ 與 model A₃ 之比較。圖 7 為有限元素分析之結果，圖 8 為變形圖之比較。由表 3 得知，在誤差 I 方面，其誤差約在 0.8~2.38% 左右，而誤差 II 約在 1.21~3.49% 左右，其兩種理論分析與熱膨脹分析之結果誤差均不大，故有限元素分析之熱膨脹分析可模擬理論分析之位移變形之結果。

5-1-2. 正向應力之比較：

取壓電材料截面 1、2、3、4 觀察正向應力 σ_x 分佈情形，截面 I、II、III 觀察剪應力 τ_{xy} 分佈情形，如圖 9 所示，分析後，壓電材料與黏貼層之截面積應力分佈。圖 10 為簡支樑壓電材料之截面 1、2、3、4 之 σ_x 分佈情形。由圖 10 可觀察出熱膨脹分析之正向應力分佈與 Wang and Rogers[3]及 Clark et al.[4]理論之正向應力分佈相似，唯在樑處呈現非線性分佈與黏貼層的部分有應力轉向之現象，此與理論分析假設線

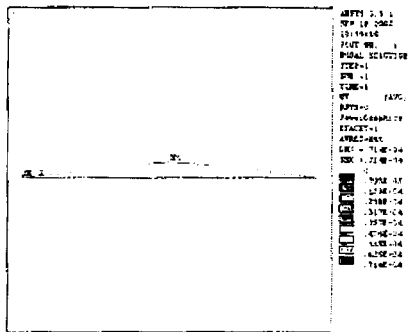
性分佈不同。

5-1-3. 剪應力之比較：

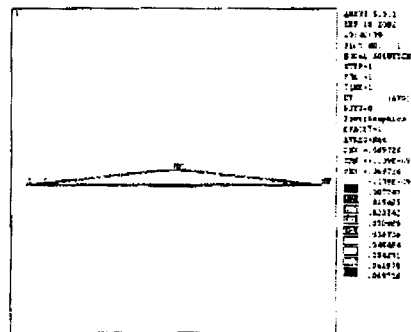
圖 11 為簡支樑壓電材料之截面 1、II、III 觀察剪應力 τ_{xy} 分佈情形。在 Wang and Rogers[3]及 Clark et al.[4]理論假設中，在理想黏著狀況下，剪應力會集中於壓電材料兩端(如圖 3、4 上方所示之剪應力分佈)，由圖 11 可觀察出在左邊之剪應力分佈並無集中之現象，其剪應力呈負值與理論之假設不同。

表 3. 壓電材料在簡支樑上不同位置之位移量(m)

壓電材料距左端距離(m)	model A ₁	model A ₂	model A ₃	誤差 I (%)	誤差 II (%)
40%	0.69247E-4	0.71093E-4	0.68697E-4	0.8	3.49
50%	0.71377E-4	0.73312E-4	0.69726E-4	2.38	2.37
60%	0.69247E-4	0.71093E-4	0.67817E-4	2.11	2.11
70%	0.62761E-4	0.64433E-4	0.62010E-4	1.21	1.21



(a) 理論之變形圖



(b) 熱膨脹之變形圖

圖 7. 簡支樑有限元素分析結果

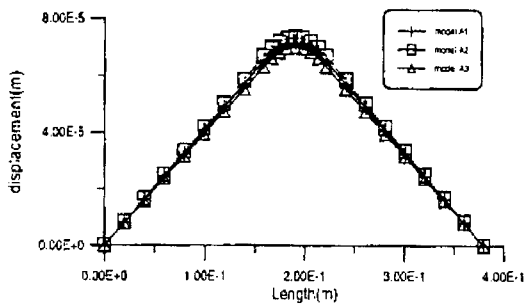


圖 8. 簡支樑變形圖之比較

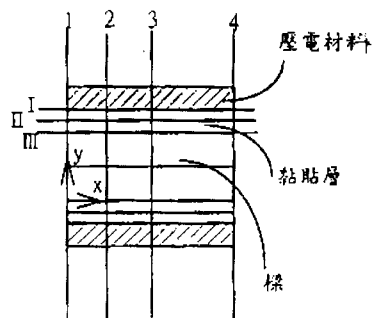


圖 9. 壓電材料之截面圖

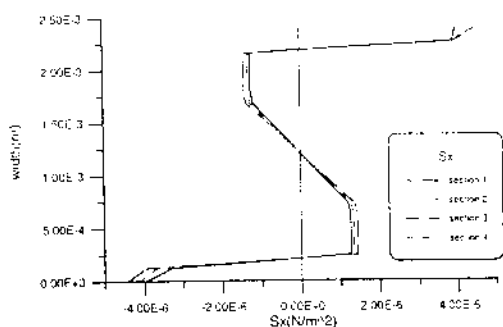


圖 10. 簡支樑正向應力分佈

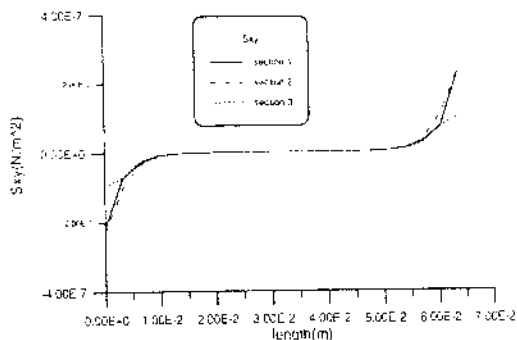


圖 11. 簡支樑剪應力分佈

5-2 懸臂樑：

5-2-1. 位移變形：

比較 model B₁、model B₂ 及 model B₃ 之壓電材料於不同位置之位移變形量，如表 4 所示。誤差 I 為 model B₁ 與 model B₃ 之比較，誤差 II 為 model B₂ 與 model B₃ 之比較。圖 12 為有限元素分析之結果，圖 13 為變形圖之比較。在誤差 I 之誤差約在 3.17~3.21% 左右，誤差 II 約在 5.93~5.97% 左右，其兩種理論分析與

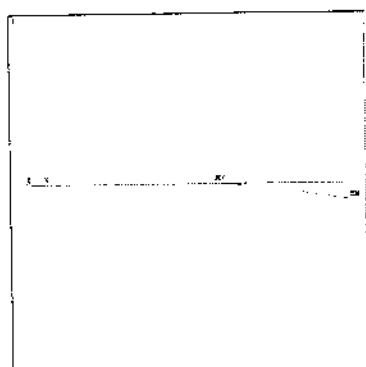
熱膨脹分析之結果誤差均不大。

5-2-2. 正向應力之比較：

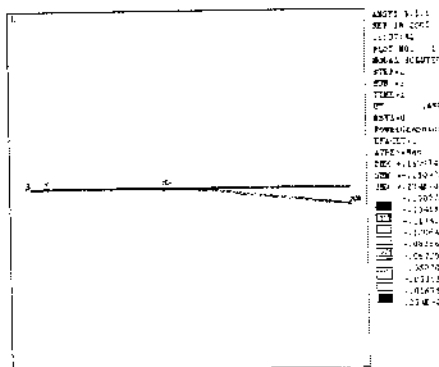
圖 14 為懸臂樑壓電材料之截面 1、2、3、4 之正向應力 σ_x 分佈情形。由圖 14 可觀察出正向應力分佈與 Wang and Rogers[3] 及 Clark et al.[4] 理論之正向應力分佈相似，但其截面 1 之值較小，主要是變形量較小之緣故。

表 4. 壓電材料在懸臂樑上不同位置之位移量 (m)

壓電片距左端距離 (m)	model B ₁	model B ₂	model B ₃	誤差 I (%)	誤差 II (%)
40%	0.1818E-3	0.18664E-3	0.17615E-3	3.21	5.96
50%	0.15577E-3	0.15999E-3	0.15097E-3	3.18	5.97
60%	0.12988E-3	0.13334E-3	0.12588E-3	3.17	5.93
70%	0.10392E-3	0.10669E-3	0.10072E-3	3.18	5.93



(a) 理論之變形圖



(b) 熱膨脹之變形圖

圖 12. 懸臂樑有限元素分析結果

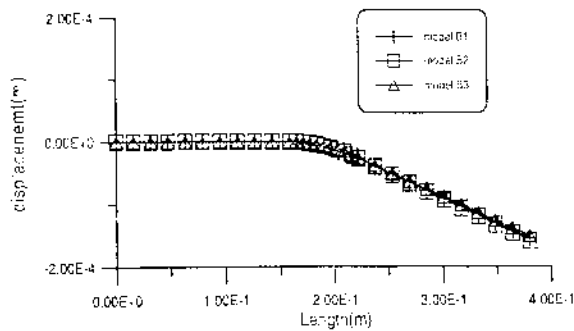


圖 13. 懸臂樑變形圖之比較

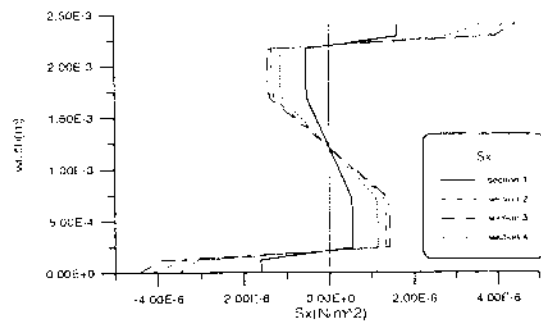


圖 14. 懸臂樑正向應力分佈

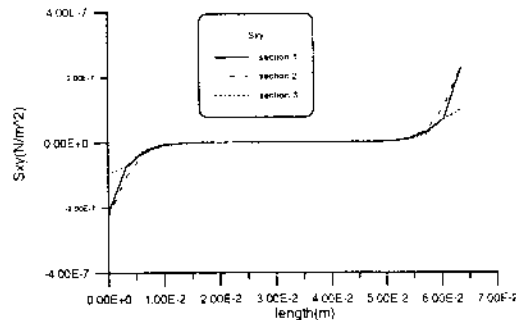


圖 15. 懸臂樑剪應力分佈

移變形之結果。

2. 在正向應力比較方面，熱膨脹分析之結果與理論分析之假設相似。主要是在樑處呈現非線性分佈與黏著層有較明顯的應力轉向現象。
3. 在剪應力比較方面，熱膨脹分析之結果與理論分析之假設不同。主要是壓電材料左邊之剪應力為負值，所以與理論分析假設不同。

未來可將壓電材料置於其他結構上進行分析，確定理論分析之彎曲力矩可代替壓電材料之效應。

5-2-3. 簡應力之比較：

圖 15 為簡支樑壓電材料之截面 I、II、III 觀察剪應力 τ_{xy} 分佈情形。由圖 15 可觀察出其剪應力分佈與簡支樑相同，皆在左邊剪應力之分佈並無集中之現象，其剪應力呈負值與理論之假設不同。

6. 結論

本篇報告主要是以有限元素分析之熱膨脹分析來模擬樑受壓電材料作用之靜態分析。考慮樑分別為簡支樑及懸臂樑，將壓電材料黏貼於樑之上下兩面，施加正負相反電壓使樑產生純彎曲變形，分析壓電材料對樑之靜分析，包括位移變形、正向應力及剪應力，主要結論如下：

1. 在簡支樑理論分析與熱膨脹分析之位移變形量比較，其誤差在 0.8-3.49% 左右，懸臂樑之位移變形量比較誤差在 3.17-3.21% 左右，誤差不大，故有限元素分析之熱膨脹分析可模擬理論分析之位

7. 參考文獻

1. 王栢村、曾文鏡，1996，「壓電材料樑之靜態響應分析」，*技術學刊*，第十一卷，第四期，第 495-500 頁
2. 王栢村，2001，「電腦輔助工程分析之實務與應用」，*全華科技圖書*，第 8-10-8-11 頁
3. Wang, B. T., and Rogers, C. A., 1991, "Modeling of Finite-Length Spatially-Distributed Induced Strain Actuators for Laminate Beams and Plates," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 2, pp. 38-58.
4. Clark, R. L., Fuller, C. R., and Wicks, A.,

- 1991, "Characterization of Multiple Piezoelectric Actuators for Structural Excitation." *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 90, pp.346-357.
5. Liu, Y. T., Fung, R. F., and Huang Y. C., 2000, "Dynamic Formulation of the Distributed Piezoelectric Bending Actuator," *Proceedings of The 17th National Conference of The Chinese Society of Mechanical Engineers*, Vol. 3, pp. 955-961.