

應用旋轉角加速度計於實驗模態分析  
The Use of Rotational Accelerometer for Structural Modal Testing

王栢村/國立屏東科技大學機械工程系 陳柏宏/國立屏東科技大學機械工程系

內容摘要

本文主要是應用衝擊錘配合旋轉角加速度計，從事懸臂樑之實驗模態分析。首先由理論分析推導出一懸臂樑結構受到點力激振之旋轉角加速度的頻率響應函數通式，其中，點力對應之特徵函數為結構之位移振型，而旋轉角加速度則為斜率振型，對懸臂樑而言，旋轉角加速度計所得之斜率振型與位移振型呈微分關係。本文藉由移動旋轉角加速度計以量測得頻率響應函數，再經曲線嵌合可得到結構之模態參數，包含自然頻率、阻尼比及振型。本文證明了旋轉角加速度計可以確實應用在實驗模態分析上，並得到有意義之斜率振型，未來可應用在破壞檢測及其他振動量測問題。

關鍵字：懸臂樑、旋轉角加速度計、實驗模態分析、斜率振型

1. 前言

利用實驗模態分析，可求得實際結構之模態參數[8]，如自然頻率、阻尼比及模態振型，傳統之方法是以衝擊錘為驅動器，搭配加速度計為主。王和陳[6]，王和梁[5]，邱、王及吳[7]是以衝擊錘為驅動器，加速度計為感測器，分別對簡支板、懸臂樑及簡支樑來進行實驗模態分析。Worden *et al.*[12]則使用了激振器為驅動器，搭配加速度計為感測器，來對結構進行實驗模態分析。為了避免加速度計本身重量影響，王等人[3]應用了衝擊錘搭配了渦電流位移計為感測器，對懸臂樑進行實驗模態分析。

在結構破壞檢測方面，Salawu[10]說明了利用自然頻率的改變，可判斷結構是否有破壞之產生，Pai and Young[9]利用操作狀態下之實驗模態分析，並以壓電片作為驅動器，非接觸式雷射為感應器進行破壞檢測，王和梁[4]應用智慧型材料之斜率振型差之特性，探討樑結構之非破壞檢測。

為驗證應用不同感應器對於同一結構之模態參數擷取的結果，王和王[2]便應用衝擊錘、壓電片、加速度計及壓電薄膜感應器四種不同轉換器，並求得配合理論模式，成功的應用在實驗模態分析上，並求得其模態參數。Wang[11]也推導利用不同之驅動器及感測器來擷取模態參數的理論架構。

本文目的主要是應用旋轉角加速度計作為感測器，並利用實驗模態分析的方法量測樑結構之頻率響應函數，再由曲線嵌合得到結構之模態參數，包含自然頻率、阻尼比、模態振型等，並配合理論分析驗證其可行性，未來可以應用在結構破壞診斷及其他結構之量測。

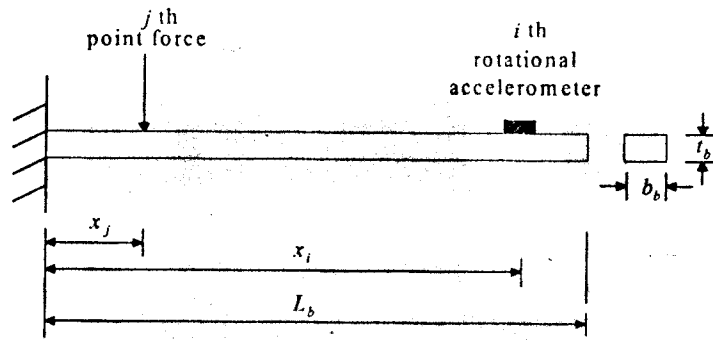


圖 1、懸臂樑之簡諧外力作用位置圖

## 2. 理論分析

### 2.1 自由振動分析

考慮一樑結構長度為  $L_b$ ，得到其系統運動方程式[1]如式(1)：

$$E_b I_b \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + C_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

邊界條件如下：

$$w(x=0,t) = 0 \quad \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$EI \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L_b} = 0 \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L_b} = 0 \quad (3)$$

其中， $E_b$  為樑之楊氏係數， $I_b$  為截面積慣性矩， $w$  為樑之側向位移， $C_b$  為樑之阻尼係數， $\rho_b$  為樑的密度， $A_b$  為樑的截面積。懸臂樑之特徵方程式 可得如下：

$$1 + \cos \alpha L_b \cosh \alpha L_b = 0 \quad (4)$$

利用數值方法求解上式得到以下特徵值

$$\alpha_1 L_b = 1.875104$$

$$\alpha_2 L_b = 4.694091$$

$$\alpha_3 L_b = 7.854757$$

自然頻率為

$$\omega_r = (\alpha_r L_b)^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b A_b L_b^4}} = (\alpha_r)^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b A_b}} \quad (5)$$

模態振型函數為

$$\phi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho_b A_b L_b}} [\cosh \alpha_r x - \cos \alpha_r x - \sigma_r (\sinh \alpha_r x - \sin \alpha_r x)] \quad (6)$$

其中

$$\sigma_r = \frac{\sinh \alpha_r L_b - \sin \alpha_r L_b}{\cosh \alpha_r L_b + \cos \alpha_r L_b} \quad (7)$$

### 2.2 簡諧分析

當外力的型式為簡諧力時且在結構座標  $x = x_j$  受簡諧外力作用時，其外力的型式可寫成如下式：

$$f(x, t) = F_j \delta(x - x_j) e^{i\omega_s t} \quad (8)$$

其中， $F_j$  為簡諧外力大小， $x_j$  為外力作用位置， $\omega_s$  為簡諧激振頻率

由於輸入為簡諧激振，所以輸出亦為簡諧響應，由擴充原理可假設系統位移響應如下：

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) Q_r e^{i\omega_s t} \quad (9)$$

將式(9)代入式(1)並代入結構模態振型函數之正交性關係式，可推導得：

$$Q_r = \frac{F_j \phi_r(x_j)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (10)$$

$$w(x_i, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x_i) Q_r e^{i\omega_s t} = e^{i\omega_s t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_r(x_j) \phi_r(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (11)$$

$$\theta(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = e^{i\omega_s t} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_r(x_j) \phi_r'(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} = \Theta_i e^{i\omega_s t} \quad (12)$$

由頻率響應函數定義可得：

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\Theta_i}{F_j} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^f(x_j) \phi_r^o(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (13)$$

其中

$$\phi_r^f(x_j) = \phi_r(x_j) \quad (14)$$

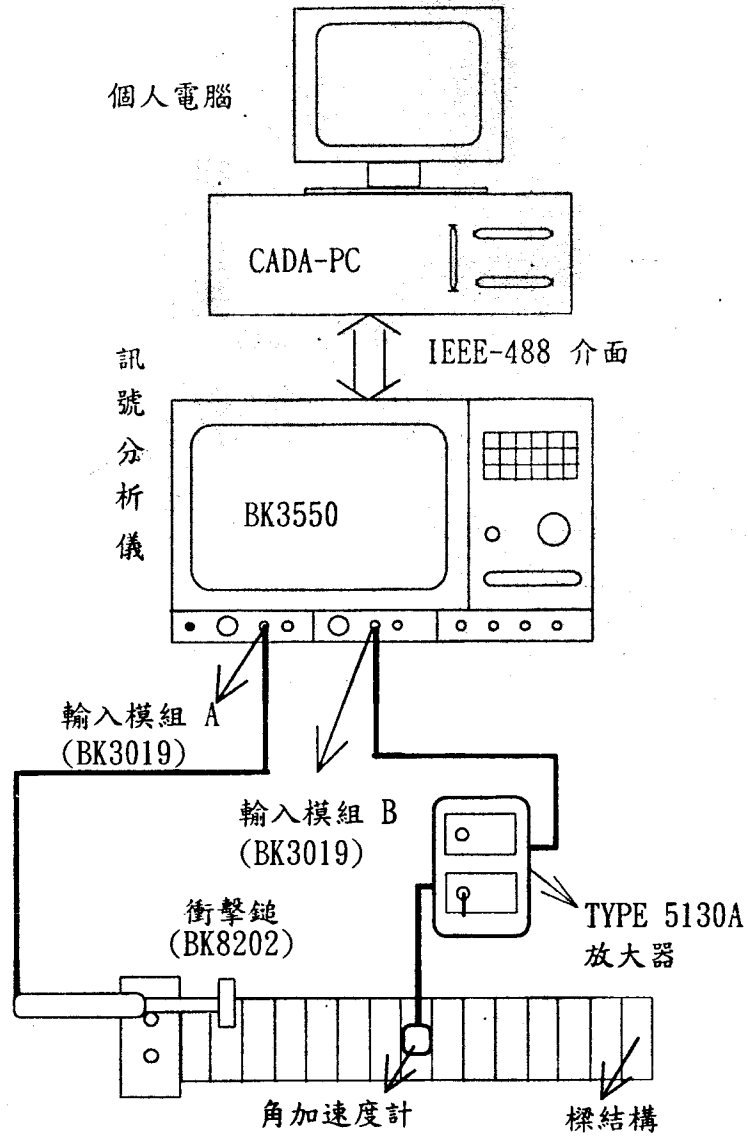
$$\phi_r^o(x_i) = \phi_r'(x_i) \quad (15)$$

$\phi_r^f(x_j)$  為點力之特徵函數，其物理意義為位移振型， $\phi_r^o(x_i)$  為旋轉角加速度之特徵函數，其物理意義為斜率振型。

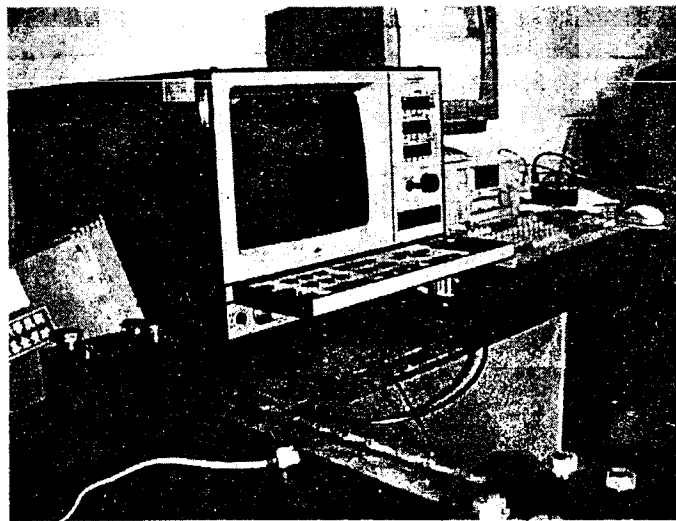
### 3. 實驗分析

實驗儀器示意圖如圖 2(a) 所示，實驗儀器設備連線之實體照片如圖 2(b)。並使用旋轉角加速度計量測其響應訊號，透過 BK3550 系統來接收輸入訊號及響應訊號，並求得系統之頻率響應函數，再透過曲線嵌合的分析，得到自然頻率、模態振型、阻尼比。

本實驗主要再求得懸臂樑之前四個模態，故將懸臂樑在長度方向分成 15 等分，量測點數規劃如圖 3 所示，以移動旋轉角加速度計並固定衝擊錘敲擊第 2 格中點之量測，由角加速度計量得結構之響應，再經由訊號放大器(增益比為一)傳入 BK3550 訊號分析儀作分析，如此可以得到 15 組頻率響應函數。為避免洩漏之現象產生，所以在 channel A 與 B 分別加了 Transient 及 Exponential 加權函數。



(a) 示意圖



(b) 實體照片

圖 2、實驗儀器架構

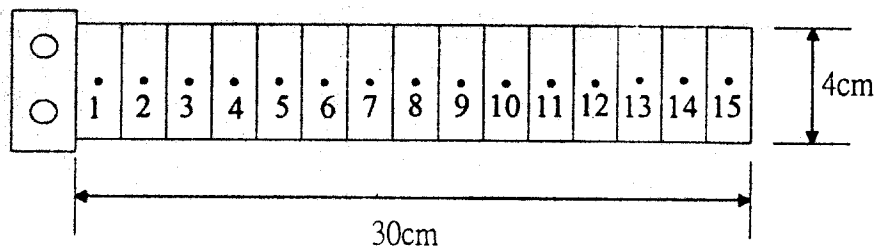


圖 3、懸臂樑之編號及分割情形

#### 4. 結果與討論

本文採用之懸臂樑幾何形狀及材料性質整理如表 1，本節將分別由頻率響應函數及模態參數探討理論與實驗分析比較驗證之結果。

##### 4.1 頻率響應函數比較

圖 4(a)及 4(b)分別為  $i=2, j=2$  及  $i=15, j=2$  之頻率響應函數， $i=j$  代表衝擊鏈輸入與旋轉角加速度計量測位置均在第 2 點，所得為同點之頻率響應函數，可看出各共振點間均有一反共振點，而  $i \neq j$  時，則無此現象。實驗與實驗合成之頻率響應函數曲線相當吻合，表示曲線嵌合之正確性，理論與實驗之頻率響應函數有等比例誤差，有待進一步釐清，但可知其曲線形狀相似。圖 5(a)及 5(b)為對應圖 4(a)及 4(b)之關連性函數，可以看出除反共振點外，其餘關連性函數值均趨近於 1，顯示實驗量測之可靠性。

##### 4.2 模態參數比較

表 2 為實驗與理論所得之前 4 個模態自然頻率比較，可以看出，除第 1 個模態因為頻率低，所以相對誤差較大，其餘誤差均在 3% 以下，由誤差皆為正值，可知感測器之質量對實驗模態分析有影響，而對第一個模態影響較大。

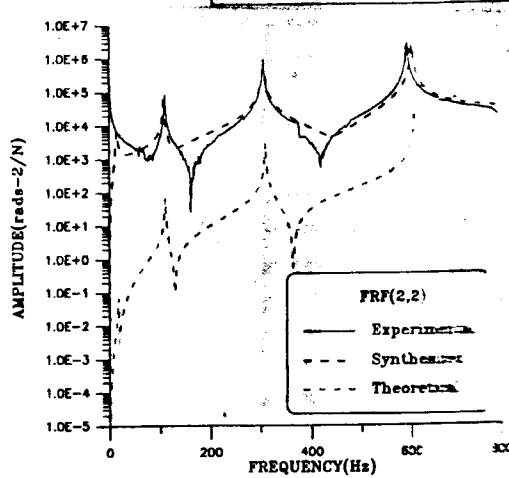
在圖 6(a)-6(d)中，為前 4 個模態振型之比較，在此需注意的是，此模態振型實際物理意義為如式(15)所示樑之斜率模態振型。由圖 6 可觀察得知，第 1 個模態比對較差而第 2、3 模態，除部分點不佳外，可以說均顯示了斜率振型之特性，此外也證實以旋轉角加速度計取代傳統加速度計進行實驗模態分析，將有別於所得之位移振型。

表 3(a)及 5(b)分別為理論與實驗振型之 MAC 與 MSF 比較表，理想之實驗結果，對 MAC 與 MSF 之對角線元素將趨近於 1，代表其振型吻合性，而非對角線元素將趨近 0，此表示振型之正交性，本實驗因有局部點之實驗誤差，以第 2、3 個模態較吻合理論振型。

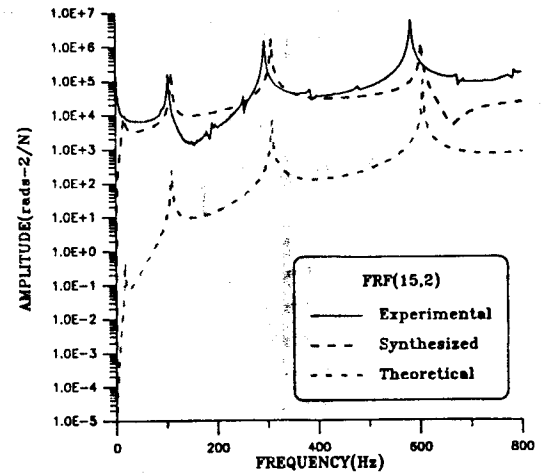
表 4 為各個模態之阻尼比，除第 1 個模態為 3.4%，其餘均在 0.1% 左右，與一般鋼材阻尼比值相近，可知以旋轉角加速度計進行實驗模態分析對量測阻尼比有一致之結果，為第 1 模態因為動態範圍不足，而有較高阻尼比。

表 1 懸臂樑之材料性質

材料	鋼
長度	300mm
寬度	40mm
厚度	2mm
楊氏係數	$193 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
密度	$7953 \text{ kg/m}^3$
浦松比	0.3

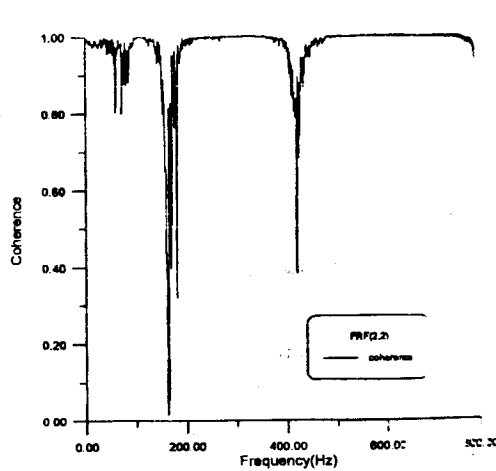


(a)  $i=2, j=2$

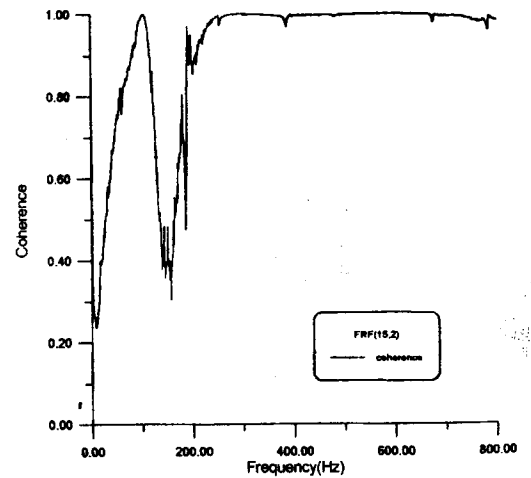


(b)  $i=15, j=2$

圖 4、頻率響應函數比較



(a)  $i=2, j=2$

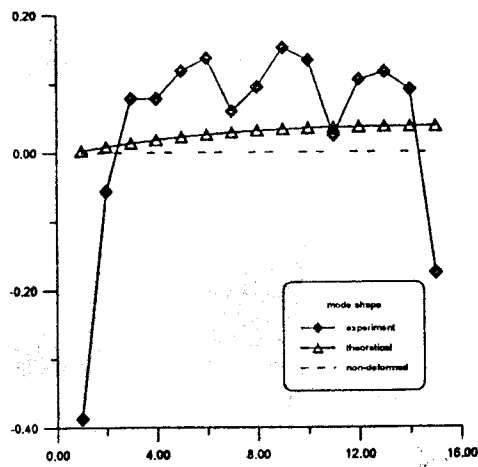


(b)  $i=15, j=2$

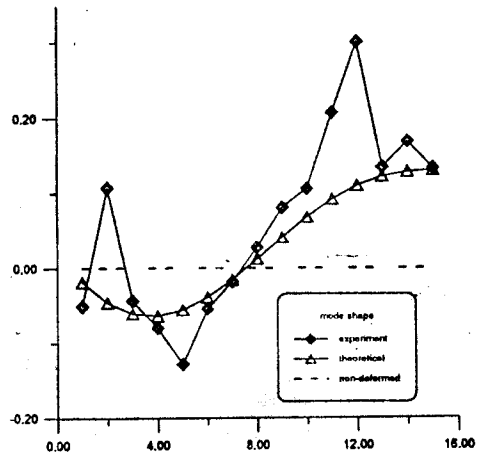
圖 5、關連性函數

表 2 理論與實驗之自然頻率比較表

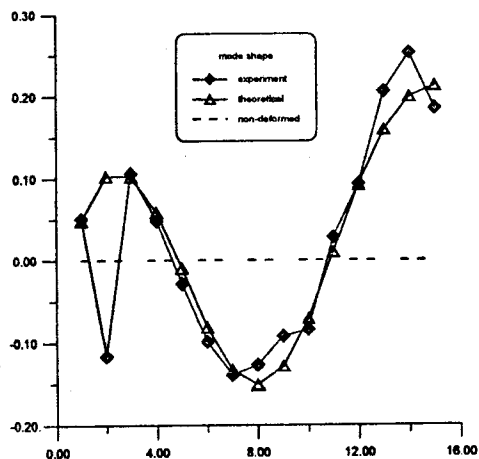
自然頻率(Hz)	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
實驗值	15.03	107.00	305.55	600.62
理論值	17.690	110.00	309.75	606.73
誤差百分比(%)	15%	2.727%	1.355%	1.008%



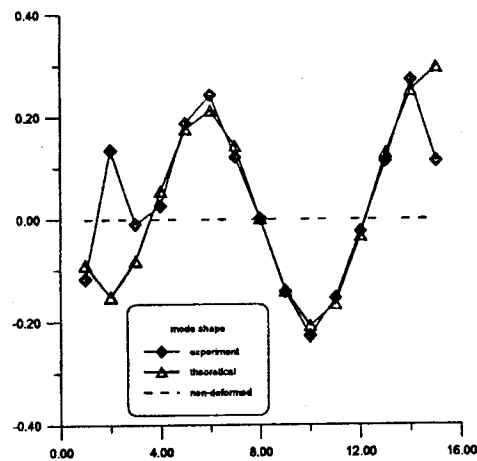
(a) 第一模態



(b) 第二模態



(c) 第三模態



(d) 第四模態

圖 6、理論與實驗振型圖

表 3、理論與實驗振型之比較

(a) MAC

mode	1	2	3	4
1	<b>0.21651</b>	0.011810	0.051631	0.058139
2	0.43073	<b>0.85164</b>	0.21397	0.025553
3	0.017026	0.26937	<b>0.76260</b>	0.15772
4	0.029880	0.0054130	0.098869	<b>0.57867</b>

(b) MSF

mode	1	2	3	4
1	<b>0.46514+i0.01218</b>	0.10742+i0.016514	-0.22457-i0.034638	0.22819-i0.077887
2	0.65617-i0.013133	<b>0.92244-i0.027165</b>	0.46208-i0.021152	0.11141-i0.11463
3	-0.11416-i0.06319	-0.51804-i0.031641	<b>-0.87325+i0.00614</b>	-0.39709-i0.00628
4	0.16290+i0.05783	-0.06585+i0.03280	0.30734+i0.066423	<b>0.75032+i0.12526</b>

表 4 實驗分析之阻尼比

阻尼比	旋轉角加速度計/衝擊鏈
	阻尼比
$\xi_1$	3.405
$\xi_2$	0.174
$\xi_3$	0.164
$\xi_4$	0.111

## 5. 結論

本文為驗證不同感測器於結構實驗模態分析之影響，以移動旋轉角加速度計搭配衝擊鏈，進行實驗模態分析，成功的解釋與一般傳統實驗模態分析之現象及差別，主要結論如下：

1. 自然頻率、阻尼比均能有效正確地由實驗量測，所呈現誤差係來自感測器之重量，或動態範圍不足之影響。
2. 模態振型以旋轉角加速度計可得到樑之斜率振型，有別於以加速度計為感測器之傳統實驗模態分析所得到為位移振型。
3. 本文之實驗模態分析方法所得到之斜率振型將有助於破壞檢測有更好之評估，亦可應用於其他結構。

## 6. 參考文獻

1. 王栢村，1997，*振動學*，二版，全華科技圖書股份有限公司，台北，第 7-37~7-47 頁。
2. 王栢村、王重杰，1995，「應用應用壓電材料之實驗模態分析」，碩士論文，國立屏東科技大學，屏東。
3. 王栢村、呂世鑫、林冠元，2001，「應用渦電流位移計於結構之實驗模態分析」，中華名國第二十五屆全國力學會議，第 2171-2182 頁。
4. 王栢村、梁偉光，1997，「智慧型材料結構系統於非破壞檢測應用」，碩士論文，國立屏東科技大學，屏東。
5. 王栢村、梁偉光，2001，「基於模態參數之結構缺陷預測」，*檢測科技*，第十八卷，第六期，第 204-214 頁。
6. 王栢村、陳榮亮，1997，「簡支板之實驗模態分析」，*國立屏東科技大學學報*，第六卷，第四期，第 273-281 頁。
7. 邱俊賢、王栢村、吳德和，1998，「簡支樑之製作與模態特性驗證」，*中國機械工程學會第 15 屆全國學術研討會論文集*，第 291-298 頁。
8. Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire England.
9. Pai, P. F., and L. G. Young, 2001, "Damage Detection of Beams Using Operational Deflection Shapes," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 3161-3192



10. Salawu, O. S., 1997, "Detect of Structure Damage Through Changes in Frequency: a Review," *Engineering Structures*, Vol. 19, No., 9, pp. 718-723.
11. Wang, B. T., 1998, "Structural Modal Testing With Various Actuators and Sensors," *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 12 No. 5 pp. 627-639.
12. Worden, K., J. R. Wright, M. A. Al-Hadid, and K. S. Mohammdd, 1994, "Experimental Identification of Multi Degree-of-Freedom Nonlinear Systems Using Restoring Force Methods," *The Internal Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 9, No. 1, pp. 35-55.