

## 不同邊界狀態均勻樑之側向振動模態分析

王柏村 教授

楊清賢 學生

辛介白 學生

蘇鳳全 學生

國立屏東科技大學機械工程系

## 摘要

本文主要是應用 ANSYS 軟體分別對不同邊界條件之均勻樑進行側向振動模態分析。除了對單純樑結構進行有限元素分析，亦以線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構之邊界條件來進行有限元素分析。本文選用二維樑元素及彈簧元素來架構有限元素模型，模擬三種不同樑結構的邊界條件分別為—簡支端、固定端、自由端。且運用 Reduced 求取法計算特徵值，以獲得樑結構之自然頻率與振型，分析結果再與理論解做比對。結果顯示，當彈簧參數  $k$  的值等於  $10^9$  N/m 時，其分析結果相當接近理論解，誤差都在 1% 以內，而當彈簧參數  $k$  等於  $10^{13}$  N/m 時，其分析結果與實際對應邊界條件之樑結構模態分析結果完全相同，故由此可知，以線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構之邊界條件符合其實際情況，並且由本文分析結果可得知，未來對於樑結構各種不同之邊界條件皆可以運用線性彈簧與旋轉彈簧來模擬之。

關鍵字：均勻樑、有限元素分析、模態分析

## 一、前言

樑結構是工程分析中常遇到的問題，如轉子系統、工具機主軸、各種機械轉軸、建築使用之樑等等都可視為一樑結構。樑結構常見之邊界條件可分為四種—簡支端、固定端、自由端、彈簧阻尼端。樑結構之截面特性有如矩形、圓形、工字形、T 字形等。

由於振動對樑結構的影響損害甚巨，且因振動所產生的共振也是最常遇到的問題，因此如何避開樑結構之共振頻率便成為對樑進行分析的首要目的，故樑結構之振動分析也就相對變得很重要。一般樑結構的振動分析有模態分析(modal analysis)、簡諧分析(harmonic analysis)、暫態分析(transient analysis)等，在本文裡是對樑結構進行模態分析，以獲得其自然頻率與振型。

對於有關振動的相關問題國內也有文獻的探討，劉運鴻[1]機械系統之振動，不論是那一個方向的振動，經常在實際的設備中可見，這些振動輕則引起機械運轉不順，維護困難，減少產能；重則引起設備損壞。宮紹華[2]振動最能表現出各式的機械故障，如不平衡、不對心與軸彎曲、滾珠軸承故障、套筒軸承故障、齒輪故障、機械鬆動。李安謙、施元斌[3]由於國內在離心幫浦的設計漸趨高轉速及高性能之要求，迴轉機械的振動問題對幫浦品質漸漸具有決定性的影

響，所以需要一套較完整的理論來準確分析幫浦的振動現象，以免因過度的振動造成機械壽命之減低或突然停機而導致生產上及時的重大損失。陳興[4]當振動減量與振動隔離的技術逐漸成為機械設計中整合技術的一部分時，準確的機械振動量測與機械振動分析的需求就與日遽增了。黃崑峰[5]振動分析法是最常被用來監測機械設備狀態的方法，利用此方法可以量測與分析解機械設備的振動情況，從而達到預知式維護的目的。范逸之、孫德萱、洪春長[6]振動監測系統即是結合預測性維護保養及振動理論，針對重要設備進行長期監測，一方面建立機器之健康記錄，另一方面對重要參數監測其狀況，作為診斷之參考。王柏村[7]對樑結構分別作有限元素分析與實驗模態分析，分別求得樑結構之模態參數，在進行驗證探討有限元素模型的適應性。

本文是應用 ANSYS 軟體於均勻樑之任意尺寸、截面及邊界條件下進行樑之側向振動模態分析，以獲得樑結構之自然頻率與振型，分析所得之結果再與理論解做比對，看是否符合樑結構實際情況。分析之均勻樑結構除了對對應實際之邊界條件架構有限元素模型，亦以線性彈簧與旋轉彈簧來模擬樑結構三種不同的邊界條件——簡支端、固定端、自由端，以進行有限元素分析，分析結果再與理論解做比對。

本文的目的是先以手算求得簡支樑、懸臂樑、兩端固定靜不樑之自然頻率，之後再與有限元素分析所得結果做比對看是否吻合。而在以有限元素對樑結構進行側向振動模態分析，本文是先對實際樑結構之邊界條件進行分析，以獲得其自然頻率與振型，另再以線性彈簧與旋轉彈簧來模擬樑結構之邊界條件進行分析，以獲得其自然頻率與振型，最後對這三個結果進行比對看是否都吻合。

## 二、問題定義與分析目標

### (一) 問題定義：

本文所分析之鋼質樑結構，如圖 1(a)至(c)所示，長  $L = 0.6 \text{ m}$ ，直徑  $d = 0.01 \text{ m}$ ，

楊氏係數  $E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ，截面積  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 7.854 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ，截面慣性矩

$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 4.909 \times 10^{-10} \text{ m}^4$ ，密度  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ ，高度  $H = d$ 。

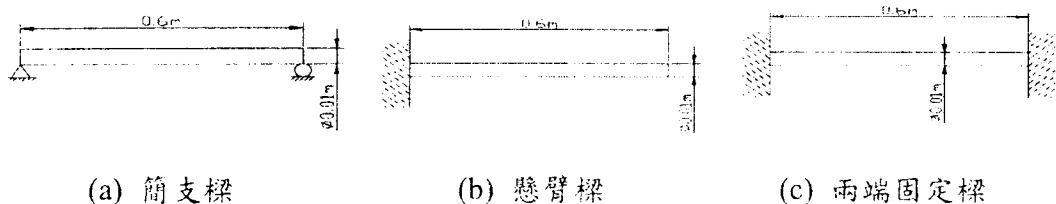


圖 1. 不同邊界條件均勻樑之示意圖

### (二) 分析目標：

## 1. 模態分析(modal analysis)

- (1) 本文選用二維樑元素(beam 3)來架構樑結構之有限元素模型，以獲得其自然頻率與振型。
- (2) 應用線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構之邊界條件來進行有限元素分析，分析所得之解再與理論解和單純樑結構模態分析之解做比對看是否吻合。

## 三、理論分析

## (一) 模態分析(modal analysis)

## 1. 簡支樑

$$\text{自然頻率： } f = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (n\pi) \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\text{模態振型函數： } \phi_n(x) = A_n \sin \alpha_n x$$

## 2. 懸臂樑

$$\text{自然頻率： } f = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$\omega_n = (\alpha_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad \alpha_1 L = 1.875 \quad \alpha_2 L = 4.694 \quad \alpha_3 L = 7.855 \quad \alpha_4 L = 10.995 \dots$$

$$\text{模態振型函數： } \phi_n(x) = \sin \alpha_n x - \sinh \alpha_n x + \left( \frac{\sin \alpha_n L + \sinh \alpha_n L}{\cos \alpha_n L + \cosh \alpha_n L} \right) (\cos \alpha_n x - \cosh \alpha_n x)$$

## 3. 兩端固定樑

$$\text{自然頻率： } f = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$\omega_n = (\alpha_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad \alpha_1 L = 4.730 \quad \alpha_2 L = 7.853 \quad \alpha_3 L = 10.995$$

$$\alpha_4 L = 14.137 \dots$$

$$\text{模態振型函數： } \phi_n(x) = C_n [\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x + \alpha_n (\cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x)]$$

上式中， $f$  單位為 Hz； $\omega_n$  單位為 rad/sec

## 四、有限元素分析

本文所分析之簡支樑、懸臂樑、兩端固定樑，選用二維樑元素來模擬樑，以實體模型法(solid modeling)架構樑結構之有限元素模型，如圖 2 所示，且運用 Reduced 求取法計算特徵值，以獲得樑結構之自然頻率與振型。對樑結構進行分割，本文採用四倍原則，因考慮看五個模態振型圖，故將樑結構分割成 20 等分，並在無外力負荷的情況下進行有限元素分析。

樑結構之邊界條件：

1. 簡支端：如圖 2 (a)，節點 1 及 2， $u = 0$ 、 $v = 0$ ，即  $x$  及  $y$  方向位移為零。
2. 固定端：如圖 2 (b)，在固定端節點 1， $u = 0$ 、 $v = 0$ 、 $\theta_z = 0$ ；自由端節點 2， $u$ 、 $v$ 、 $\theta_z$  都不為零，即  $x$ 、 $y$  及  $z$  方向位移不為零。
3. 兩端固定端：如圖 2(c)，節點 1 及 2， $u = v = \theta_z = 0$ ，即  $x$ 、 $y$  及  $z$  方向位移為零。

除了以對應實際邊界之簡支樑、懸臂樑、兩端固定靜不定樑架構其有限元素模型進行側向振動模態分析外，亦考慮應用線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑樑之邊界條件，且同樣以二維樑元素模擬樑，其物理結構圖如圖 3 所示。

本文考慮應用線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑之邊界條件，其有限元素模型如圖 4 所示，分析元素選用二維樑元素模擬樑、選用彈簧元素(combination 14)模擬線性彈簧與旋轉彈簧以進行樑之側向振動模態分析，獲得其自然頻率與振型。分割原則採用四倍原則，因考慮看五個模態振型圖，故將樑結構分割成 20 等分。在進行有限元素分析時，本文在節點 1 及 22、24 與節點 2 及 23、25 間各加入一個彈簧元素，並且試著以 10 的倍數來改變彈簧參數  $k$  的值，以獲得樑結構之自然頻率與振型。

以線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑之邊界條件應如表 1 所示，如簡支端  $u = 0$ 、 $v = 0$ ，即  $x$  及  $y$  方向位移為零，因此彎矩也為零，由於可以轉動，所以  $\theta_z$  不為零，剪力也不為零，故  $k_y = \infty$ 、 $k_{\theta_z} = 0$ 。

1. 簡支端： $k_{y_1} = k_{y_2} = 10^4 \sim 10^9 \text{ N/m}^2$ ， $k_{\theta_{z_1}} = k_{\theta_{z_2}} = 0$ 。
2. 固定端： $k_{y_1} = k_{y_2} = k_{\theta_{z_1}} = k_{\theta_{z_2}} = 10^4 \sim 10^9 \text{ N/m}^2$ 。
3. 自由端： $k_{y_2} = k_{\theta_{z_2}} = 0$ 。

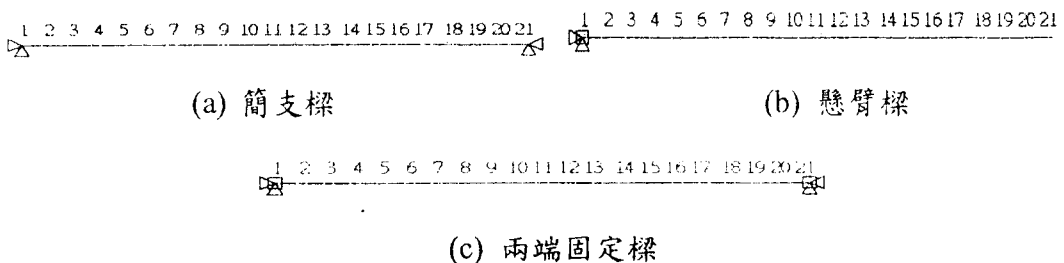


圖 2 對應實際邊界條件之二維樑有限元素模型

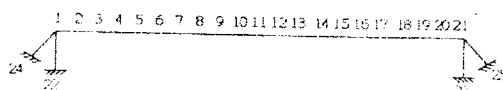
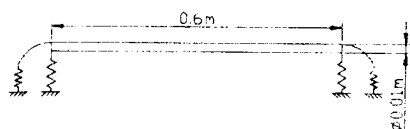


圖 3 線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑邊界條件之物理結構圖

圖 4 線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑邊界條件之有限元素模型

表 1 樑結構邊界條件之物理意義

名稱 邊界 條件	彈簧參數 -k 值		物理意義			
	$k_y$	$k_{\theta_z}$	位移	斜率 $\theta_z$	彎矩 $M_z$	剪力 $v$
簡支端	$\infty$	0	0	--	0	--
固定端	$\infty$	$\infty$	0	0	--	--
自由端	0	0	--	--	0	0

### 五、結果與討論

#### (一) 簡支樑、懸臂樑、兩端固定樑之分析結果

本文分析元素選用二維樑元素來架構簡支樑、懸臂樑、兩端固定樑之有限元素模型以進行側向振動模態分析，獲得樑結構之自然頻率與振型，其結果如表 2(a)至(c)所示，並再與理論解做比對。由結果表 2 所示，以有限元素對簡支樑、懸臂樑、兩端固定樑進行側向振動模態分析所得結果與理論解相當吻合，誤差都在 1% 以內，並且由模態振型圖觀看，如圖 5(a)至(d)、圖 6(a)至(d)、圖 7(a)至(d)所示，可發覺其圖形也都非吻合，故以有限元素分析樑結構符合傳統樑理論分析。

#### (二) 線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構邊界條件之分析結果

本文應用線性彈簧與旋轉彈簧來模擬樑結構之邊界條件以進行有限元素分析，分析元素選用二維樑模擬樑、選用彈簧元素模擬線性彈簧與旋轉彈簧架構樑結構之有限元素模型，以獲得樑結構之自然頻率與振型，並再與理論解及單純樑結構模態分析之解做比對。由分析結果如表 3 所示，當彈簧參數  $k$  的值以 10 的倍數慢慢增加到  $10^9$  (N/m) 時，其分析結果也就越接近理論解及單純樑結構模態分析之解，誤差都在 1% 以內；而當彈簧參數  $k$  的值等於  $10^{13}$  (N/m) 時，其分析結果與單純樑結構模態分析之解已經完全吻合，誤差為 0%，除此之外本文還將所得之結果數據畫成一關係圖，如圖 8(a)至(c)所示。

除了由分析的數據結果比對之外，亦可由模態振型圖來比對求證，而由模態振型圖(如圖 9 至圖 11 所示)比對，發現其振型圖也都相當吻合，故以線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構之邊界條件以進行樑之側向振動模態分析，其結果符合樑結構實際情況。

## 六、結論

本文應用 ANSYS 軟體分別對不同邊界條件之均勻樑進行側向振動模態分析，以獲得樑結構之模態參數—自然頻率 $\omega_n$ 與振型 $\phi_n$ 。本文首先進行側向振動模態分析，獲得自然頻率與振型，並再與理論分析之解做比對，看是否吻合。結果顯示，以有限元素分析樑結構之側向振動，其結果相當符合理論解，誤差都在 1% 以內，故以有限元素分析符合傳統樑理論分析。

得知此結果後，本文再應用線性彈簧與旋轉彈簧來模擬樑不同邊界條件之樑結構以進行樑之側向振動模態分析，並且藉著以 10 的倍數循序地來改變彈簧參數  $k$  的值以進行有限元素分析，獲得樑結構之自然頻率與振型，並再與理論解及單純樑結構模態分析之結果做比較。而由結果數據表以及彈簧參數與自然頻率的曲線圖可得知，當彈簧參數等於  $10^9$  (N/m) 時，其分析結果已經相當接近理論解及對應實際邊界條件之樑結構模態分析之解，且曲線也已經開始趨於平穩；而當彈簧參數等於  $10^{13}$  (N/m) 時，其分析結果與單純樑結構模態分析之結果完全相同，曲線圖亦趨於平穩，並且再由模態振型圖加以比對，也發現都非常吻合，故以線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構之邊界條件符合實際情況。有了此結果之後，未來對於樑結構各種不同的邊界條件的側向振動模態分析均能以此方法來進行分析。

## 七、參考文獻

1. 劉運鴻，1995，「機械系統自然頻率之移動」，*台電工程月刊*，568 期，第 55-64 頁。
2. 宮紹華，1991，「利用振動值量測做機械狀況監測」，*機械月刊*，25 期，第 65-79 頁。
3. 李安謙、施元斌，1995，「離心幫浦之旋轉機械振動分析」，*機械工業*，146 期，第 165-178 頁。
4. 陳興，1995，「振動量測」，*機械月刊*，244 期，第 184-215 頁。
5. 黃崑峰，1993，「預測性維護與振動分析法」，*機械月刊*，157 期，28-141 頁。
6. 范逸之、孫德萱、洪春長，1997，「遠端振動監測系統於核電廠主冷卻水泵之應用」，第五屆中華民國振動與噪音工程學會學術研討會，第 323 頁-335 頁。
7. 王柏村，1998，「實驗模態分析」，國立屏東科技大學。

表 2 樑結構側向振動模態分析結果

(a) 簡支樑

振型	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
自然頻率 $f$ (Hz)	55.484	221.88	499.04	886.71
$\omega_n$ (rad/sec)	348.62	1394.11	3135.37	5571.36
理論解(rad/sec)	348.64	1394.88	3137.79	5578
誤差(%)	0.006	0.03	0.08	0.12

表 2 樑結構側向振動模態分析結果(續)

(b) 懸臂樑

振型	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
自然頻率 $f(\text{Hz})$	19.767	123.849	346.650	678.947
$\omega_n$ (rad/sec)	124.200	778.166	2178.066	4265.950
理論解 (rad/sec)	124.206	778.216	2178.135	4267.583
誤差(%)	0.005	0.006	0.003	0.04

(c) 兩端固定樑

振型	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
自然頻率 $f(\text{Hz})$	125.78	346.61	679.21	1122.2
$\omega_n$ (rad/sec)	790.27	2177.8	4267.6	7050.9
理論解 (rad/sec)	790.33	2178.5	4270.5	7059.9
誤差(%)	$8 \times 10^{-5}$	0.0003	0.0007	0.001

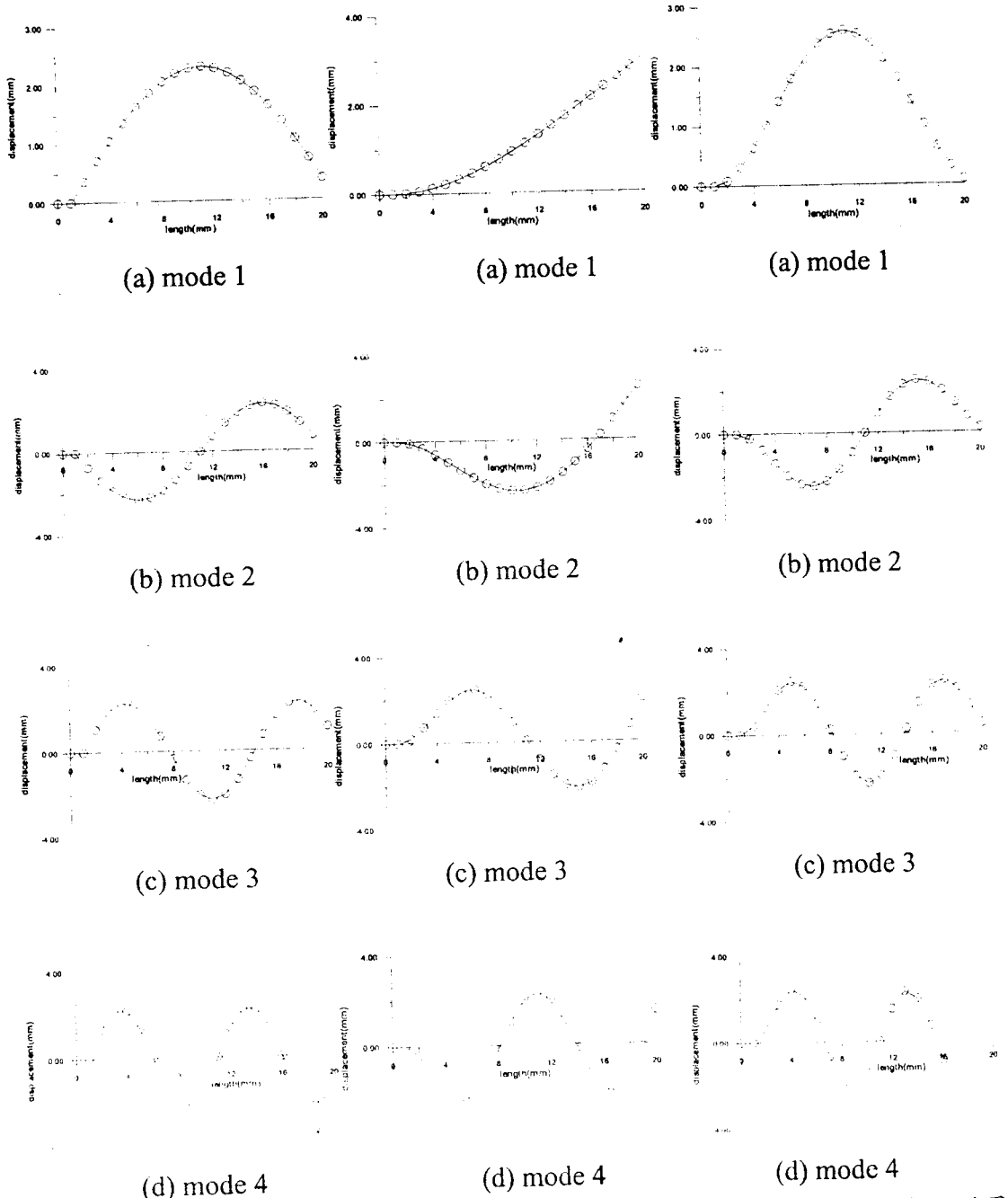


圖 5 簡支樑之模態振型圖 圖 6 懸臂樑之模態振型圖 圖 7 兩端固定樑模態振型圖



表 3 線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構邊界條件之分析結果

(a) 簡支樑

自然頻 $f(\text{Hz})$ $k_{y_1}, k_{y_2} (\text{N/m})$	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
$1 \times 10^4$	31.243	61.896	146.45	354.28
$1 \times 10^5$	50.805	157.57	266.04	428.22
$1 \times 10^6$	54.974	213.73	456.62	747.83
$1 \times 10^7$	55.433	221.06	494.86	873.35
$1 \times 10^8$	55.449	221.80	498.62	885.40
$1 \times 10^9$	<b>55.480</b>	<b>221.87</b>	<b>498.99</b>	<b>886.58</b>
$1 \times 10^{10}$	55.484	221.88	499.03	886.70
$1 \times 10^{11}$	55.484	221.88	499.04	886.71
$1 \times 10^{12}$	55.484	221.88	499.04	886.71
$1 \times 10^{13}$	55.484	221.88	499.04	886.71
理論解	55.484	221.88	499.04	886.71
誤差(%)	0.007	0.006	0.010	0.015

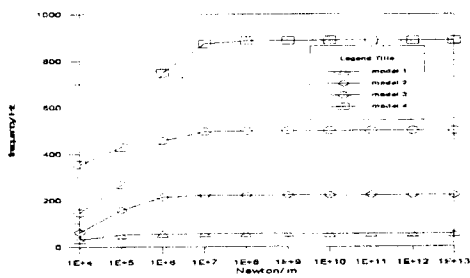
(b) 懸臂樑

自然頻率 $f(\text{Hz})$ $k_{y_1}, k_{y_2} (\text{N/m})$	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
$1 \times 10^4$	16.177	47.704	171.701	414.588
$1 \times 10^5$	19.558	110.243	251.205	457.515
$1 \times 10^6$	19.725	121.118	324.512	585.417
$1 \times 10^7$	19.762	123.575	344.599	670.881
$1 \times 10^8$	19.765	123.818	346.439	678.148
$1 \times 10^9$	<b>19.766</b>	<b>123.843</b>	<b>346.620</b>	<b>678.846</b>
$1 \times 10^{10}$	19.767	123.845	346.639	678.915
$1 \times 10^{11}$	19.767	123.845	346.640	678.922
$1 \times 10^{12}$	19.767	123.845	346.641	678.923
$1 \times 10^{13}$	19.767	123.845	346.641	678.923
理論解	19.767	123.849	346.650	678.947
誤差(%)	0.005	0.005	0.007	0.015

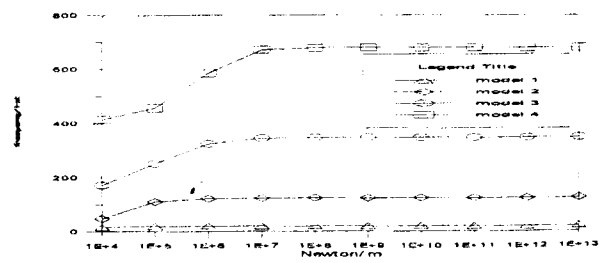
表 3 線性彈簧與旋轉彈簧模擬樑結構邊界條件之分析結果(續)

(c) 兩端固定樑

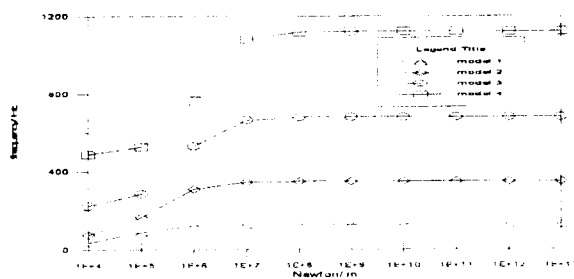
f(Hz) $k_{y_1}, k_{y_2}, k_{\theta_1}, k_{\theta_2}$	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
$1 \times 10^4$	35.431	74.881	221.72	486.89
$1 \times 10^5$	88.723	163.12	282.19	526.09
$1 \times 10^6$	120.72	306.92	529.05	763.28
$1 \times 10^7$	125.25	342.54	663.43	1077.6
$1 \times 10^8$	125.72	346.19	677.64	1117.9
$1 \times 10^9$	125.77	346.56	679.04	1121.7
$1 \times 10^{10}$	125.77	346.59	679.17	1122.12
$1 \times 10^{11}$	125.77	346.60	679.19	1122.15
$1 \times 10^{12}$	125.77	346.60	679.19	1122.15
$1 \times 10^{13}$	125.77	346.60	679.19	1122.15
理論解	125.775	346.606	679.207	1122.18
誤差(%)	0.004	0.013	0.025	0.043



(a) 簡支樑

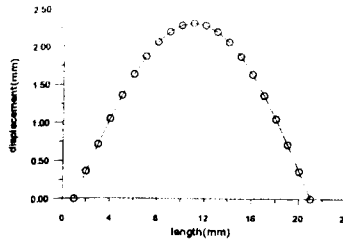


(b) 懸臂樑

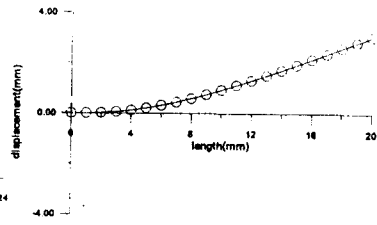


(c) 兩端固定樑

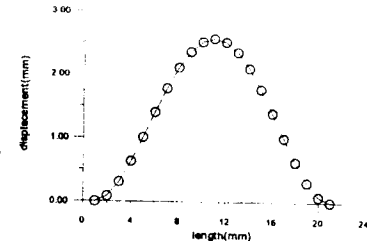
圖 8 樑結構之彈簧參數與自然頻率之曲線圖



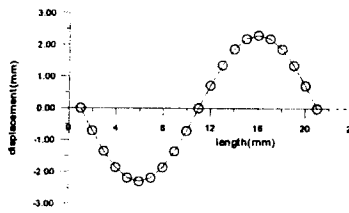
(a) mode 1



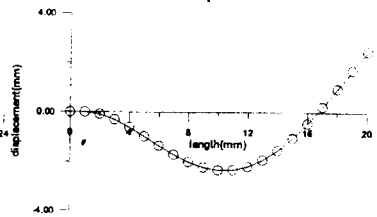
(a) mode 1



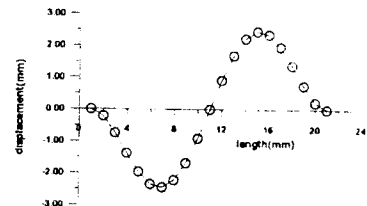
(a) mode 1



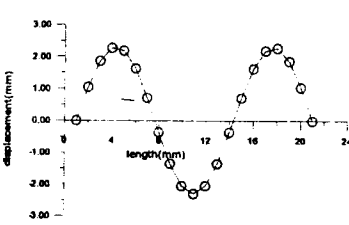
(b) mode 2



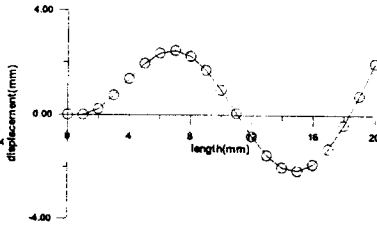
(b) mode 2



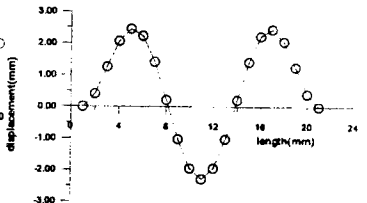
(b) mode 2



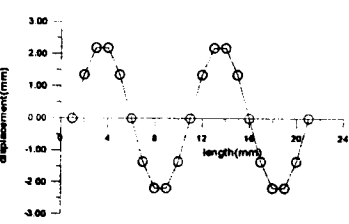
(c) mode 3



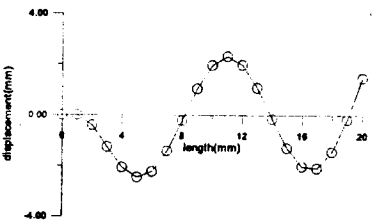
(c) mode 3



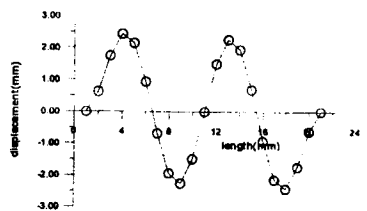
(c) mode 3



(d) mode 4



(d) mode 4



(d) mode 4

圖 9 簡支樑模態振型圖 圖 10 懸臂樑模態振型圖 圖 11 兩端固定樑模態振型圖