

單自由度振動系統之有限元素分析

王栢村 吳焜熙

國立屏東科技大學

機械工程系

摘要

本文使用有限元素分析軟體 ANSYS，從事典型的單自由度系統之振動分析。單自由度系統在結構振動中是一個最簡單的離散系統，也常被用來解釋振動特性與其相關分析，在振動問題中有四種分析：模態分析、簡諧響應分析、暫態響應分析及頻譜響應分析。本文首先簡要地回顧單自由度系統四種分析，並建構有限元素模型以 ANSYS 軟體進行求解，可求得模態參數之自然頻率及系統之頻率響應函數，且比較理論解與 ANSYS 解。暫態響應分析考慮不同外力之激振，例如：步階力和三角力，並探究不同初始條件之系統暫態響應。頻譜分析是針對隨機外力激振，隨機外力以能量頻譜密度函數表示。本文顯示理論分析與有限元素分析結果兩者相當吻合。本文介紹之分析步驟有助益於 ANSYS 軟體應用在相關的振動問題分析，特別在應用於其他離散系統，例如車輛動態問題。

關鍵字：有限元素，離散系統，模態分析，簡諧響應分析，暫態響應分析，頻譜響應分析，模態參數，自然頻率，頻率響應函數，能量頻譜密度函數

1. 前言

單自由度(SDOF)振動系統[1]是所有一切離散振動系統的基礎，也是最典型的離散振動系統，其主要的組成是一個集中質塊與一彈簧，這是一個非常重要的系統，以車輛動態分析為例，單自由度(SDOF)振動系統可以用來模擬一半的機車車體的振動情形，或用來模擬四分之一汽車車輛的振動情形，所以單自由度振動系統的分析是非常重要的。

有限元素法(FEA)是一種工程分析方法，將實際工程問題經由決定元素、分割成微小的元素、限制位移條件、設定外來負荷條件[2]，再以電腦快速運算的能力進行分析求得近似解的一種方法，1973年 Virchis and Robson[3]使用時間域近似法評估單一自由度系統車輛，在加速度行駛時之響應，因此有限元素分析應用在各種不同的科學領域及實際工程問題，其方便性逐漸被工程人員所採用，經過多年來發展，已經成為被大家公認為求解各種實際工程問題的最好方法之一。

本文所採用的電腦工程分析軟體是 ANSYS，應用此一軟體可以將已經架構好的有限元素模型[4]，經由改變各種不同的輸入參數以獲得各種不同目的輸出，可以迅速獲得分析結果，比傳統的理论分析更快，能在最短時間得到與實際值之近似解。

本文主在針對單自由度振動系統利用 ANSYS 軟體作振動學上的四種分析：模態分析、簡諧響應分析、暫態響應分析、頻譜響應分析進行分析並將理論值[5]與 ANSYS 分析值作一比較，驗證 ANSYS 軟體對振動問題分析數據的正確性與可靠性。

2. 問題定義與分析目標

2-1. 問題定義

一個質量塊與一個彈簧的一端連接，彈簧的另一端固於地面，彈簧常數 k 、阻尼係數 c 、質塊質量 m ，當質塊分別承受一單位初始位移、初始速度、簡諧外力、步階力、三角力、隨機外力等各

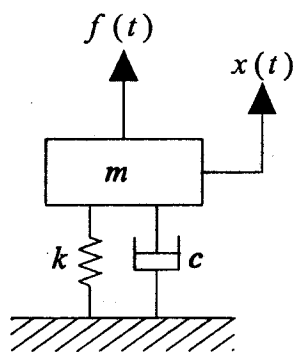


圖 1、單自由度模型圖

種不同的外力作用後，求其垂直動態響應，若改變不同的阻尼係數以觀察垂直動態響應。

2-2. 分析目標

1. 模態分析(modal analysis)：

自由振動分析之目的在於獲得結構之模態參數特性，自然頻率(ω_n)與模態振型($\{\phi_n\}$)，得知系統之自然頻率可以避免外力激振頻率在自然頻率附近或與自然頻率相同時所產生的共振現象；而獲知自然模態振型，可瞭解共振發生時結構之變形狀態。

2. 簡諧響應分析(harmonic response analysis)

簡諧響應分析之目的在於獲得結構系統受一簡諧外力激振時之系統響應分析，分析可以獲得頻率響應函數(frequency response function, FRF)，頻率響應函數為系統響應與輸入位移之比。

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (1)$$

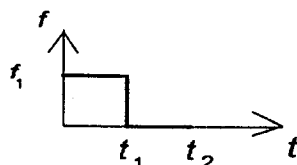
3. 暫態響應分析暫態響應分析 (transient response analysis)

暫態響應分析在獲得結構系統在受外力負荷作用或位移條件激振下之時間域響應，也就是可以了解當結構系統受外力負荷或位移條件輸入參數後，系統隨時間變化之情形。系統之位移的時間域響應函數 $x(t)$ 。

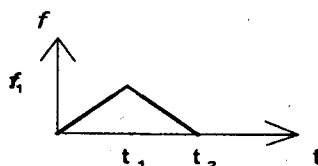
(1)無外力作用下：

- a. 初始位移暫態響應
- b. 初始速度暫態響應

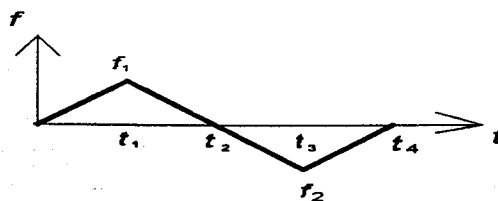
(2)外力為步階力(如圖 2(a))時之暫態響應



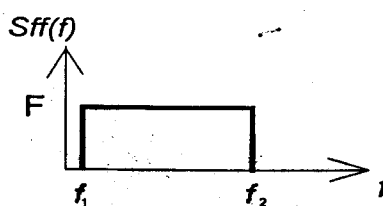
(a)步階力



(b)三角力



(c)三角力



(d)力頻譜密度

圖 2. 各種外力圖

(3)外力為三角力(如圖 2(b)(c))時之暫態響應

4. 頻譜響應分析(spectrum response analysis)

頻譜響應分析在獲得頻率域的響應分析。隨機外力無法從時間域看出結果，所以必須從頻率域來分析，隨機外力由力能量頻譜密度(如圖 2(d))表示。

3. 理論分析

若彈簧具黏滯阻尼效應，質塊受外力作用而會產生位移運動，若以一單自由度阻尼振動系統模擬之，其數學模式之示意圖可表示如圖 1，而系統之運動方程式，可推導如下：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2)$$

其中， m 代表質塊之質量， c 代表彈簧之黏滯阻尼係數， k 代表彈簧之彈簧常數， x 、 \dot{x} 及 \ddot{x} 分別代表質塊之位移、速度及加速度，係為時間之函數， $f(t)$ 則為作用於質塊之外力。

3-1. 模態分析

對式(1)全式除以 m ，並以模態參數代換可化簡得：

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_n\dot{q} + \omega_n^2 q = N(t) \quad (3)$$

其中，

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

$$N(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (5)$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (6)$$

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n \quad (7)$$

ω_n 可定義為系統之自然頻率(natural frequency)； c_c 定義為臨界黏滯阻尼係數； ξ 定義為黏滯阻尼比(viscous damping ratio)； $q(t)$ 稱為模態座標(modal coordinate)； $N(t)$ 為模態外力(modal force)

3-2. 簡諧響應分析

若系統外力為簡諧力，表示成：

$$f(t) = Fe^{i\omega t} \quad (8)$$

其中， F 為簡諧力之振幅大小， ω 為簡諧激振頻率，則系統之響應亦成簡諧，則位移可表示如下：

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \quad (9)$$

X 為位移振幅，將式(6)及(7)帶入(1)化簡可得：

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + i(\omega c)} \\ &= \frac{1/m}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i(2\xi\omega_n\omega)} \\ &= \frac{1/k}{(1 - r^2) + i(2\xi r)} \end{aligned} \quad (10)$$

其中，

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (11)$$

$H(\omega)$ 稱為頻率響應函數(Frequency Response Function, FRF)，可表示成如式(8)之三種形式，為頻率域之分析，此處 $H(\omega)$ 因系統具黏滯阻尼，而為複數形式，一般可表示成振幅大小及相位角如下：

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}} \\ &= \frac{1/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega)^2}} \\ &= \frac{1/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \end{aligned} \quad (12)$$

3-3. 暫態響應分析

進行暫態響應分析即欲求解 $x(t)$ 之時間域響應，必須對式(1)給予適當初始條件， $x(0)=x_0$ 及 $\dot{x}(0)=v_0$ 初始位移及初始速度，欲求得系統之暫態響應，需考慮以下阻尼比之狀況。

(1) $0 < \xi < 1$ ，次阻尼(under-damped)。

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega_n t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \\ &+ \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

其中， $x(\tau)$ 為系統輸出位移時間響應。

時間域與頻率域之關係，作傅立葉轉換對，外力：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (14)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (15)$$

位移：

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (16)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (17)$$

頻率響應函數：

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (18)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (19)$$

時間域輸入/輸出與系統成旋轉積分(convolution integral)如式(18)，而在頻率域三者間成相乘關係：

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (20)$$

此處， $h(t)$ 為單位脈衝響應函數(impulse response function, IRF)，若已知系統之輸入外力 $f(t)$ ，則可得系統之輸出位移時間響應 $x(t)$ ，因在此係具結構阻尼效應， ω_d 稱為阻尼自然頻率(damped natural frequency)。

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (21)$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t \quad (22)$$

(2) $\xi = 1$ ，臨界阻尼(critically damped)。

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t] e^{-\omega_n t} + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (23)$$

(3) $\xi > 1$ ，過阻尼(over-damped)。

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(A_1 e^{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} + A_2 e^{-\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} t} \right) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (24)$$

其中，

$$A_1 = \frac{v_0 + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (25)$$

$$A_2 = \frac{-v_0 - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (26)$$

3-4. 頻譜響應分析

由能量頻譜密度函數之定義

$$S_{ff}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[F^*(\omega)F(\omega)] \quad (27)$$

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E[X^*(\omega)X(\omega)] \quad (28)$$

將式(18)帶入上式得：(以下省略 $\lim_{T \rightarrow \infty}$ 符號)

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \frac{1}{T} E[H^*(\omega)F^*(\omega)H(\omega)F(\omega)] \\ &= H^*(\omega)H(\omega) \frac{1}{T} E[F^*(\omega)F(\omega)] \end{aligned} \quad (29)$$

因此，

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (30)$$

$$\overline{x^2} = \int_{\omega_a}^{\omega_b} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (31)$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} \quad (32)$$

4. 有限元素模型

圖 3 詳細繪出用以架構單自由度系統振動模型的所有元素及節點，此有限元素模型共用了二種型式的元素，分別為 COMBIN14、MASS21[6]，如表 1 COMBIN14 為一具有兩個節點線性彈簧阻尼結合元素，設定 KEYOPT(3)=2[6]具 UX、UY 兩個自由度。MASS21 則為一單一節點的質量元素設定 KEYOPT(3)=4 使具 UX、UY 二個自由度用於架構僅須考慮垂直響應的質塊構。其自由度的設定如表二所示。本模型共用了二個元素二個節點，設定 2 節點為外力之輸入，1 節點為系統固定端，如圖 3 所示。

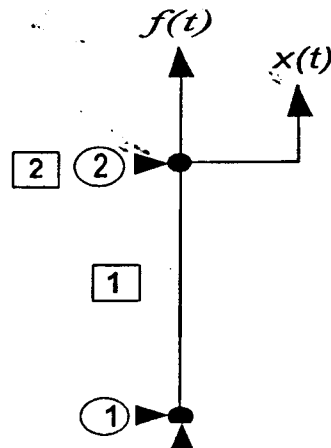


圖 3. 單自由度有限元素模型圖

表 1. 元素名稱、編號、節點數

元素型式	元素名稱	元素編號	節點數
Type1	COMBIN14	1	2
Type2	MASS21	2	1

表 2. 元素自由度及 KEYOPT 設定

元素名稱	元素自由度	KEYOPT 設定
COMBIN14	UX、UY	KEYOPT(3)=2
MASS21	UX、UY	KEYOPT(3)=4

表 3. 自然頻率

	理論值	ANSYS 值	誤差%
自然頻率 (Hz)	1.5915	1.5915	0

5. 結果與討論

單自由度振動系統彈簧常數 $k=1000\text{N/m}$ 、阻尼係數 $c=10\text{N-s/m}$ 、質塊質量 $m=10\text{Kg}$ ，當質塊分別承受一單位初始位移、初始速度、簡諧外力、步階力、三角力、隨機外力等各種不同的外力作用後，求其垂直動態響應。

5-1. 模態分析

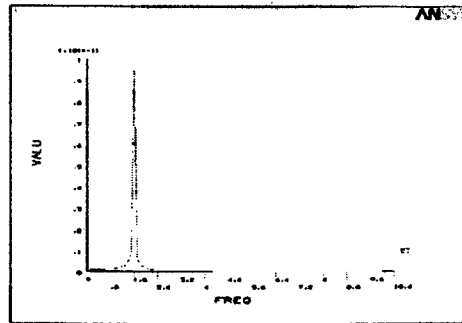
由表 3 得知在模態分析中，自然頻率的理論值與 ANSYS 軟體分析數據完全相同，則有限元素法的分析之正確性獲得確認。

5-2. 簡諧響應分析

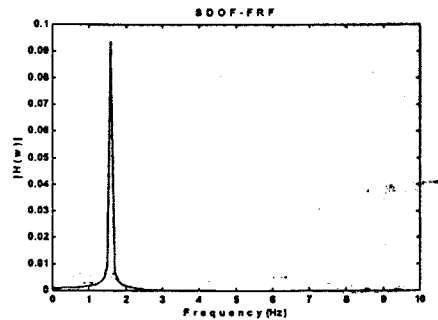
由圖 4 及表 4 可以得知在簡諧響應分析中無阻尼，其頻率響應函數(FRF)在自然頻率時產生最大波峰值此與理論相符，其頻率響應函數(FRF)理論值與有限元素分析數值相同，因此可以確認單自由度振動系統有限元素分析數值的正確性。

表 4. 頻率響應函數無阻尼 ANSYS/理論分析比較

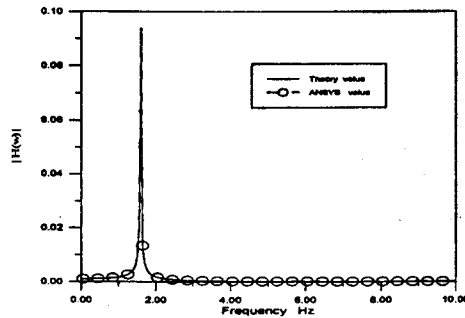
頻率(Hz)	理論值	ANSYS 值	誤差(%)
1	1.6523×10^{-3}	1.6523×10^{-3}	0
1.6	9.39188×10^{-3}	9.39188×10^{-3}	0
3	0.39168×10^{-3}	0.39168×10^{-3}	0
6	0.07568×10^{-3}	0.07568×10^{-3}	0
9	0.03228×10^{-3}	0.03228×10^{-3}	0



(a) ANSYS 分析結果



(b) 理論分析結果



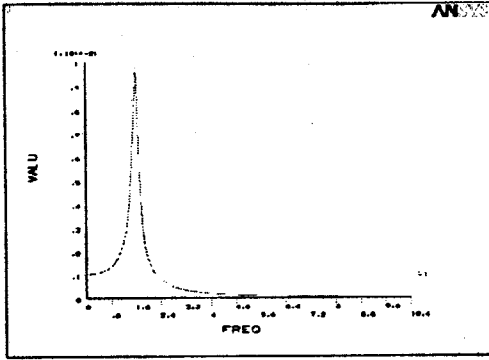
(c) ANSYS 與理論分析比較

圖 4. 頻率響應函數(FRF)無阻尼

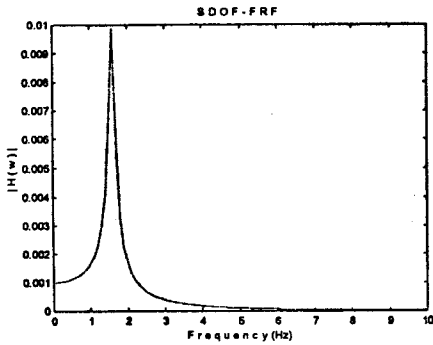
表 5. 頻率響應函數次阻尼 ANSYS/理論分析比較

頻率(Hz)	理論值	ANSYS 值	誤差(%)
1	1.64347×10^{-3}	1.64347×10^{-3}	0
1.6	9.89186×10^{-3}	9.89186×10^{-3}	0
3	0.39062×10^{-3}	0.39062×10^{-3}	0
6	0.07565×10^{-3}	0.07565×10^{-3}	0
9	0.03227×10^{-3}	0.03227×10^{-3}	0

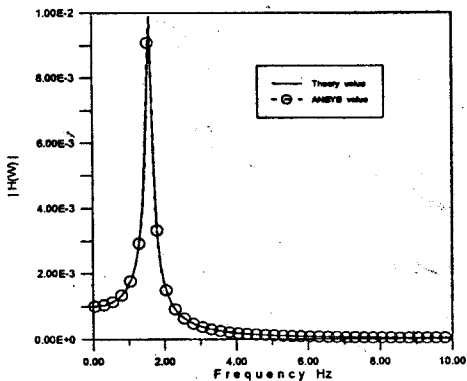
由圖 5 及表 5、可以得知在簡諧響應分析中在次阻尼狀態下，其頻率響應函數(FRF)在接近自然頻率時有最大值此與理論相符，且頻率響應函數(FRF)理論值與有限元素分析數值相同。



(a) ANSYS 分析結果



(b) 理論分析結果



(c) ANSYS 與理論分析比較

圖 5. 頻率響應函數(FRF)次阻尼 $c=10N\cdot s/m$

5-3. 暫態響應分析

暫態分析主要在求系統在各種不同的起始條件及受一步階力或三角力後沿著時間的動態響應。

5-3-1. 無外力作用之暫態響應

1. 初始位移

由圖 6 可以得知使用 ANSYS 進行分析時必須考慮到沿時間的細分割的大小, 當 $DT=0.005\text{sec}$ 時幾乎與理論曲線完全重合, 若 DT 取的值愈大, 則產生的曲線偏差愈變大, 所以使用 ANSYS 進行分析時須考慮到收斂性的問題, 當數據有出入時必

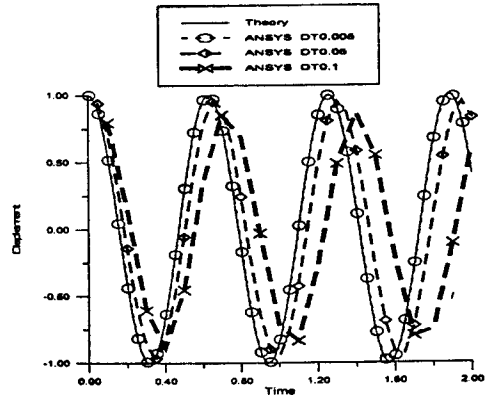
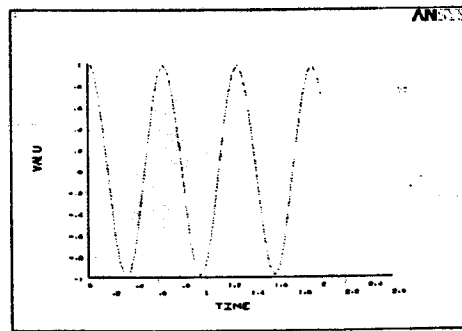
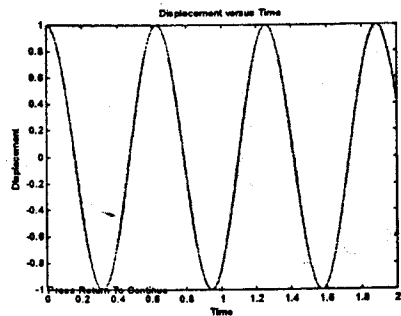


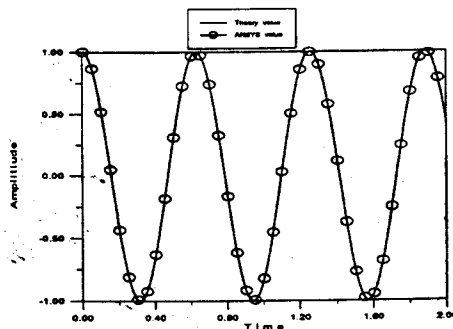
圖 6. 暫態響應函數 $x(t)$ 無阻尼、 $x_0=1m$



(a) ANSYS 分析結果



(b) 理論分析結果



(c) ANSYS 與理論分析比較

圖 7. 初始位移暫態響應函數 無阻尼 $x_0=1m$

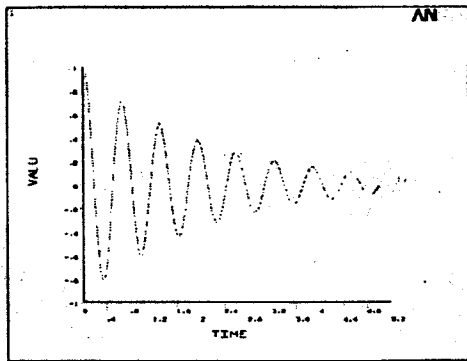
須作收斂性分析; 所以本文以下之暫態分析採用 $DT=0.005\text{sec}$ 的時間細分割。

表 6. 暫態響應函數 無阻尼 ANSYS/理論分析比較

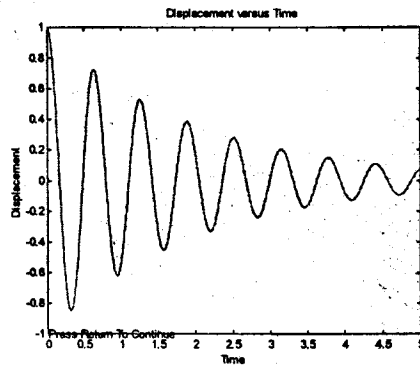
時間(s)	理論值	ANSYS 值	誤差(%)
0.3 s	-0.993557	-0.985399	0.8%
1 s	-0.839071	-0.852099	1.5%
1.2 s	0.843854	0.827357	1.9%
1.5 s	-0.733075	0.739572	0.9%
1.9 s	0.993907	0.989954	0.4%

表 7. 初始位移暫態響應函數次阻尼 $c=10\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 、 $x_0=1\text{m}$ ANSYS/理論分析比較

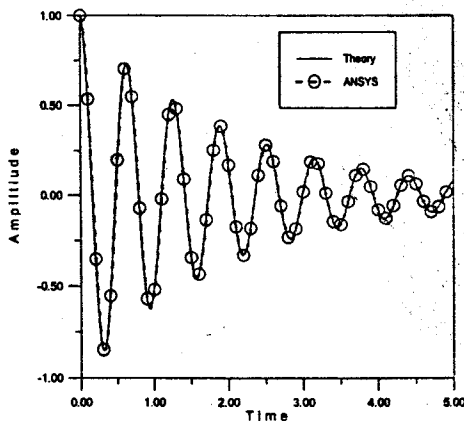
時間(s)	理論值	ANSYS 值	誤差(%)
0.4 s	-0.569137	-0.584479	2.7%
1 s	-0.529209	-0.537096	1.5%
1.8 s	0.245939	0.236286	3.9%
2.8 s	-0.231133	-0.227937	1.4%
4.1 s	-0.128679	-0.128491	0.1%



(a) ANSYS 分析結果



(b) 理論分析結果



(c) ANSYS 與理論分析比較

圖 8. 初始位移暫態響應函數次阻尼 $c=10\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 、 $x_0=1\text{m}$

由圖 7 得知初始位移 $x_0=1\text{m}$ 無阻尼的暫態響應函數為一餘弦函數圖形，由圖 7 及表 6 可以得知無阻尼的暫態響應函數 $x(t)$ 其理論數據與有限元素分析所得分析數據非常相近誤差在 2% 以內，所以 ANSYS 軟體所分的數據是非常可靠的。

由圖 8 及表 7 可以得知次阻尼的暫態響應函數其理論數據與有限元素分析所得分析數據非常相近誤差在 4% 以內，所以 ANSYS 軟體所分的數據是非常可靠的。

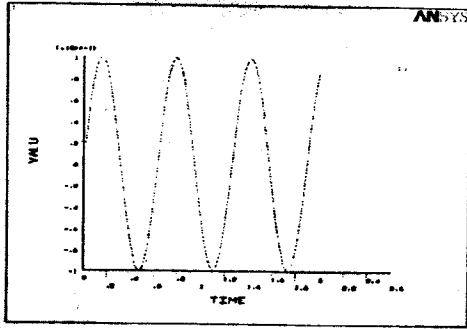
由圖 8 得知當系統為次阻尼時初始位移暫態響應函數為一餘弦函數圖形且會隨時間增加呈對數衰減，此種動態行為與理論相符合。

2. 初始速度

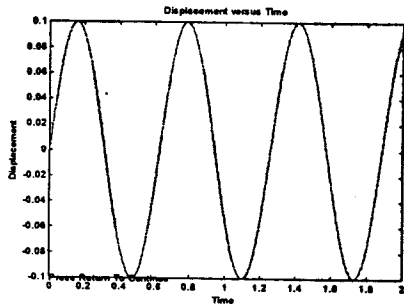
當初始速度 $v_0=1\text{m/s}$ $x_0=0\text{m}$ 無阻尼時之系統響應，由圖 9 得知初始速度 $v_0=1\text{m/s}$ 無阻尼的暫態響應函數為一正弦函數圖形，由圖 9 及表 8 可以得知無阻尼的暫態響應函數 $x(t)$ 其理論數據與有限元素分析所得分析數據非常相近誤差在 2% 以內，所以 ANSYS 軟體所分的數據是非常可靠的。

表 8. 初始速度暫態響應函數 無阻尼、 $v_0=1\text{m/s}$ ANSYS/理論分析比較

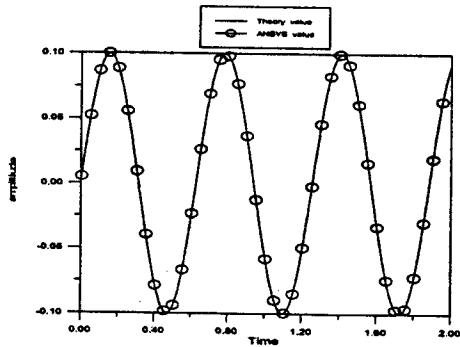
時間(s)	理論值	ANSYS 值	誤差%
0.5 s	-0.0969500	-0.0958620	1.1%
0.8 s	0.0989358	0.0988611	0.08%
1.1 s	-0.0993673	-0.0998625	0.49%
1.4 s	0.0990607	0.0988474	0.2%
1.7 s	-0.0949625	-0.0958380	0.92%



(a) ANSYS 分析結果



(b) 理論分析結果



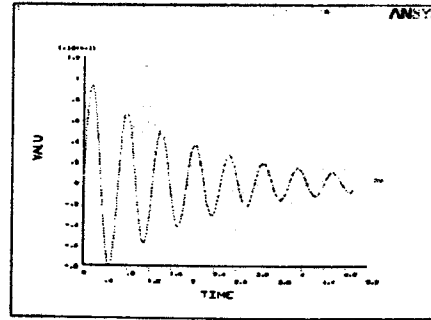
(c) ANSYS 與理論分析比較

圖 9. 初始速度暫態響應函數 無阻尼、 $v_0=1\text{m/s}$

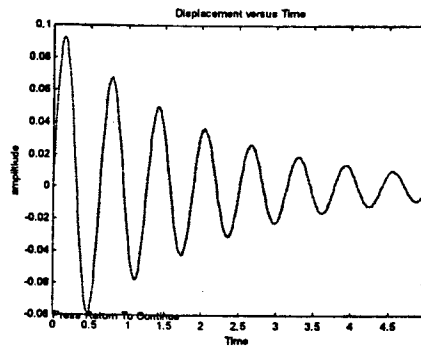
由圖 10 及表 9 可以得知初始速度 $v_0=1\text{m/s}$ 次阻尼的暫態響應函數其理論數據與有限元素分析所得分析數據非常相近誤差在 1% 以內，所以就單自由度系統而言 ANSYS 軟體所分的數據是非常可靠的。

由圖 10 得知當系統為次阻尼時初始速度暫態響應函數為一正弦函數圖形且會隨時間增加呈對數衰減，此種動態行為與振動學理論相符合。

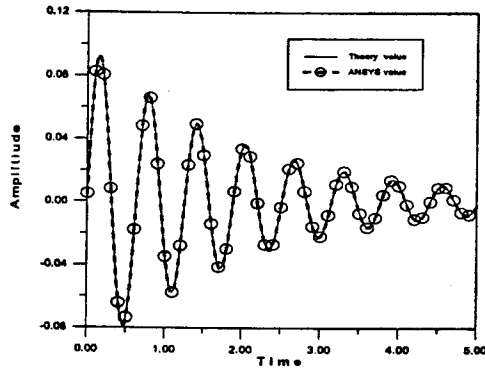
單自由度系統初始速度 $v_0=1\text{m/s}$ 之暫態響應 $x(t)$ ，其理論分析數據與 ANSYS 軟體所分析的數據非常近，其誤差不超過 2%。



(a) ANSYS 分析結果



(b) 理論分析結果



(c) ANSYS 與理論分析比較

圖 10. 初始速度暫態響應函數 次阻尼

$$c=10\text{N-s/m} \cdot v_0=1\text{m/s}$$

表 9. 初始速度暫態響應函數次阻尼 $c=10\text{N-s/m}$ 、 $v_0=1\text{m/s}$ 、

時間(s)	理論值	ANSYS 值	誤差%
0.5 s	-0.0749115	-0.0750893	0.24%
1.1 s	-0.0577647	-0.0578484	0.14%
1.7 s	-0.0408834	-0.0408715	0.03%
3.0 s	-0.0221873	-0.0221983	0.05%
4.0 s	-0.0105359	-0.0105998	0.60%

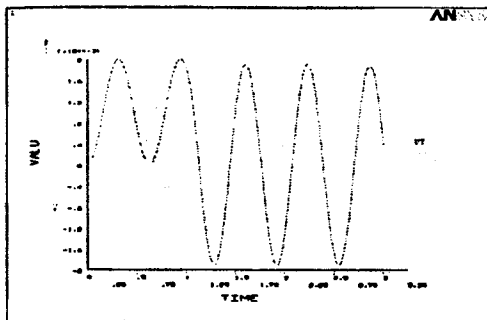


圖 11. 步階力暫態響應函數 無阻尼 ANSYS 結果

5-3-2. 受一步階力之暫態響應

圖 11. 受一步階力如圖 2(a) 所示 $f_1=1N, t_1=1s, t_2=3s$, 無阻尼之暫態響應, 由圖 11 得知當受一步階力時仍為一正弦波圖形, 但是振幅中心偏至受力的位移中心, 其偏移量剛好等於 $F/k=1/1000 m$ 之變形量; 當外力移除後其振幅中心又回到原點, 其偏移量與理論相同。

圖 12. 受一步階力如圖 2(a) $f_1=1N, t_1=1s, t_2=3s$, 次阻尼 $c=10N-s/m$ 之暫態響應函數, 由圖 12 得知當受一步階力時仍為一正弦波圖形且會隨時間增加呈對數衰減, 此種動態行為與振動學理論相符合。但是振幅中心偏至受力的位移中心, 其偏移量剛好等於 $F/k=1/1000m$ 之變形量; 當外力移除後振幅中心又回到原點, 其偏移量與理論相同。

圖 13. 受一步階力如圖 2(a) $f_1=1N, t_1=5s$, 次阻尼 $c=10N-s/m$ 之暫態響應函數, 由圖 13 得知當受一步階力時仍為一正弦波圖形且會隨時間增加呈對數衰減, 此種動態行為與振動學理論相符合。但是振幅中心偏至受力的位移中心, 其偏移量剛好等於 $F/k=1/1000m$ 之變形量。

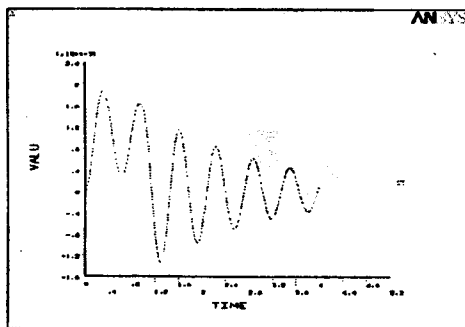


圖 12 步階力暫態響應函數次阻尼 $c=10N-s/m$, ANSYS 結果

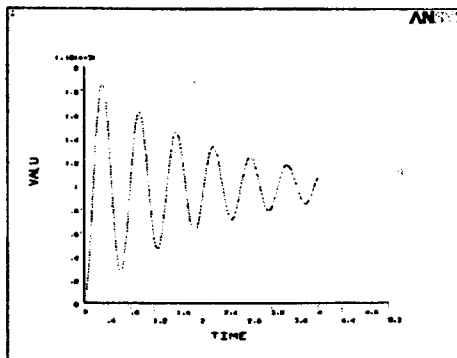


圖 13. 步階力暫態響應函數次阻尼 $c=10N-s/m$, ANSYS 結果

5-3-3 受一三角力之暫態響應

圖 14 為單自由度系統受一三角力如圖 2(b) $f_1=1N, t_1=1s, t_2=2s$ 作用後, 其時間之位移響應與所作用的三角力圖形相似; 但因彈簧慣性的關係所以會造成時間稍微的沿遲。對於無阻尼彈簧在外力作用停止後的動態響應相當於初始速度之動態響應, 其圖形為一規則的正弦波圖形。

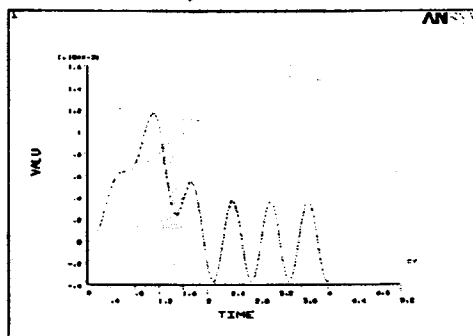


圖 14. 三角力暫態響應函數 無阻尼 ANSYS 值

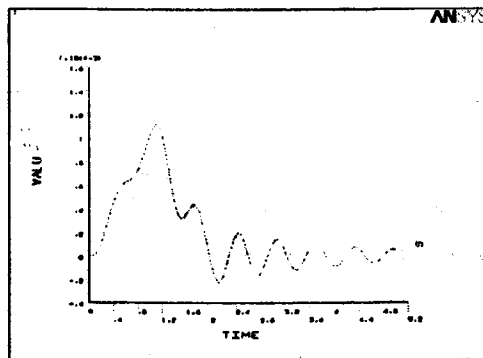


圖 15. 三角力暫態響應函數 次阻尼 $c=10N-s/m$ ANSYS 值

由圖 15 得知受一三角力如圖 2(b) $f_1=1\text{N}$, $t_1=1\text{s}$, $t_2=2\text{s}$ 作用後, 其時間之位移響應與所作用的三角力圖形相似; 但因彈簧慣性的關係所以會造成時間稍微的沿遲。對於次阻尼彈簧在外力作用停止後的動態響應相當於初始速度之動態響應, 其圖形為一規則的正弦波圖形且呈對數衰減, 其結果與理論相符。

由圖 16 得知受一三角力如圖 2(c) $f_1=1\text{N}$, $t_1=1\text{s}$, $t_2=2\text{s}$, $t_3=3\text{s}$, $t_4=4\text{s}$ 作用後, 其時間之位移響應與所作用的三角力圖形相似; 但因彈簧慣性的關係所以會造成時間稍微的沿遲。對於次阻尼彈簧在外力作用停止後的動態響應相當於初始速度之動態響應, 其圖形為一規則的正弦波圖形且呈對數衰減, 其結果與理論相符。

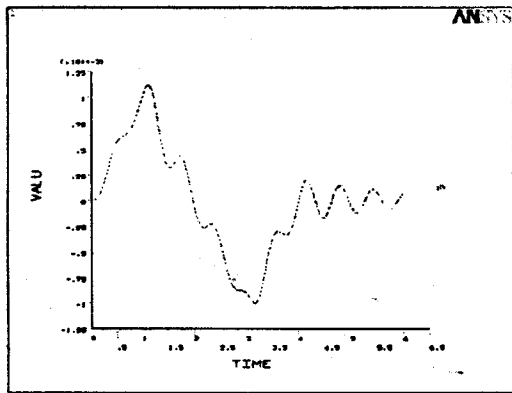


圖 16. 三角力暫態響應函數 次阻尼 $c=10\text{N-s/m}$, ANSYS 值

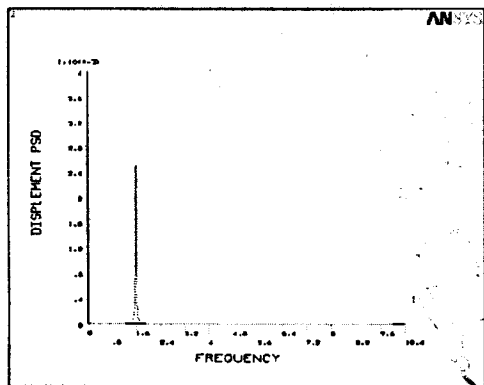


圖 17. 頻譜響應函數 $S_{xx}(\omega)$ 次阻尼 $c=10\text{N-s/m}$ ANSYS 值

表 10. 頻譜響應函數 $S_{xx}(f)$ 無阻尼 $c=10\text{N-s/m}$
理論值/ANSYS 值比較

頻率(Hz)	理論值	ANSYS 值	誤差%
1	2730.09×10^{-9}	2745.21×10^{-9}	0.55%
2	2981.52×10^{-9}	3011.74×10^{-9}	1%
3	153.413×10^{-9}	1.52583×10^{-9}	0.01%
6	5.72746×10^{-9}	5.73187×10^{-9}	0.08%
9	1.04199×10^{-9}	1.04238×10^{-9}	0.04%

5-4. 頻譜分析響應

頻譜響應分析是針對隨機外力作分析, 因隨機外力無法從時間域看出規則性, 必須從頻率域才能看出其規則性; 受一隨機外力如圖 2(d)所示, $F=1\text{N}$, $f_1=0.1\text{Hz}$, $f_2=10\text{Hz}$ 之力量頻譜密度函數。

在頻譜響應分析中, 由圖 17 及表 10 得知位移能量頻譜密度值在接近自然頻率時產生最大值波峰且理論位移能量頻譜密度值與有限元素分析在頻譜分析中所得位移能量頻譜密度值非常相近, 誤差在 1% 以下, 由此得知利用有限元素的方法來作頻譜分析是非常可靠的。

6. 結論

本文主要是在採用 ANSYS 工程分析軟體, 針對最典型振動系統中單自由度系統進行振動學上的四種分析, 經過分析結果數據與圖形的比對, 可以確認工程分析軟體的可靠性與正確性。在本文的分析過程可以得到下列四點結論:

1. 在模態分析中, 理論分析之模態參數的自然頻率值與 ANSYS 軟體分析出來的自然頻率數據完全相同, 由此可以證實 ANSYS 在離散系統中模態分析的正確性。

2.在簡諧響應分析中，ANSYS 分析所獲得的簡諧響應函數數據值與理論分析的簡諧響應函數數據值完全相同，且在接近自然頻率時產生最大波峰值，則可以確認 ANSYS 軟體對單自由系統簡諧響應函數的分析之正確性。

3.在暫態響應分析中，在初始條件分析中 ANSYS 暫態響應分析數值只有在初始位移與理論數值有較大的差異，但是其相差數據範圍皆很小，其相差不超過 5%，由此可以肯定 ANSYS 在暫態響應的可靠性。

當系統為次阻尼時初始位移暫態響應函數為一餘弦函數圖形且會隨時間增加呈對數衰減，若系統為次阻尼時初始速度暫態響應函數為一正弦函數圖形且會隨時間增加呈對數衰減，此種動態行為與振動學理論相符合。

4.在頻譜分析中，理論分析所求得的位移能量頻譜密度數據與 ANSYS 工程分析軟體所得分析位移能量頻譜密度數值非常相近，誤差在 1% 以下，且在接近自然頻率時產生最大波峰值，此種動態行為與振動學理論相符合。因此確立 ANSYS 在頻譜分析之正確性。

本文的單自由度振動系統有限元素分析法，在振動系統的四種分析，可以提供日後使用 ANSYS 軟體來分析振動學上的四種分析，並可以作為將來實際問題從事振動分析之參考，亦可以應用於離散系統或車輛動態系統。

7. 參考文獻

- 1.王栢村，1996，振動學，全華科技圖書。
- 2.王栢村，2001，電腦輔助工程分析之實務與應用，全華科技圖書。
- 3.Virch, V. J., and Robson, J. D., 1973, "Response of an Acceleration Vehicle to Random Road Undulation," *Journal of sound and Vibration*, Vol. 18, pp. 423-427.
4. Swanson Analysis System, 1993, ANSYS verification Manual for Revision 5.0 Procedures.
5. 李宜達、麥焜燦，2000，MATLAB 在工程上的應用，全華科技圖書。
6. Swanson Analysis System, 1993, ANSYS Verification

Manual for Revision. 5.0 Elements.

7. Swanson Analysis System, 1990, ANSYS Dynamics Semina for r Revision 4.4.

Finite Element Analysis of SDOF Vibration System

Bor-Tsuen Wang, Kun-Shsi Wu

Department of Mechanical Engineering

National Pingtung University of Science and Technology

Abstract

This work presents the use of finite element analysis (FEA) software, ANSYS, to perform the vibration analysis for a typical single degree-of-freedom (SDOF) system. The SDOF system is one of the simplest discrete systems in structural vibrations and is useful in explaining the vibration characteristics and its related analysis. There are four types of analysis in vibration problems. They are modal analysis, harmonic response analysis, transient response analysis, and spectrum response analysis. This work first briefly reviews the four types of analysis for the SDOF system. The finite element model is then constructed and solved by ANSYS software. The modal parameter, i.e. natural frequency, and frequency response function (FRF) are solved and compared between the theoretical solutions and those from ANSYS software. The transient response due to different external forces such as step forces and triangular forces are studied for different initial conditions. The spectrum analysis for random force excitation is also presented in terms of power spectral density (PSD) function. Results show a very good agreement between the theoretical analysis and FEA approach. The analysis procedure is beneficial for those interested in the application of ANSYS software to vibration problems. The technique can also be adopted to study other discrete systems such as vehicle dynamic problems.