

# 懸臂樑結構系統之未知衝擊外力預測

## Unknown Impact Force Prediction for Cantilever Beam Structures

王栢村 吳德和 陳重彰

Bor-Tsuen Wang, Der-Ho Wu, Chung-Chang Chen

國立屏東科技大學機械工程系

Department of Mechanical Engineering

National Pingtung University of Science and Technology

### 摘要

本文主要運用吳[1]所發展之外力預測模式，應用於懸臂樑結構上，求取未知衝擊外力作用於懸臂樑之大小、時間歷程與作用位置，而未知衝擊外力之型式假設為三角力之型式。結構之模態參數包括自然頻率、模態阻尼比及振型可由理論分析或實驗模態分析得到，當結構受到未知衝擊外力作用時，其結構量測之加速度響應可由理論推導或實驗量測而得，外力預測之目標函數則定義為預測與量測響應間的誤差平方和，預測之響應則可表示成外力大小與作用時間歷程及作用位置之函數，接著架構最佳化程式以求得此未知衝擊力之大小、作用時間歷程，與一組未知衝擊外力作用位置之模態振型，經與實際結構模態振型做比較分析，即可得知未知衝擊外力之作用位置。文中以未知衝擊外力（三角力）作用於懸臂樑結構，探討其外力預測方法之可行性與適應性，並驗證吳[1]所發展之外力預測模式適用於任意結構。未來可將結合不同感應器應用此外力預測模式以解決外力預測問題。

關鍵詞：三角力、模態阻尼比、振型

### Abstract

This work is mainly to make use of the force-predictive model, which is developed by Wu[1], extended to the cantilever beam for determining the amplitude, time history and location of the unknown impact force acting on the beam. The unknown impact force is assumed as the triangular force. The structural modal parameter, including natural frequencies, modal damping and mode shapes, can be obtained by theoretical or experimental modal analysis. The structural acceleration response due to the unknown impact force acting on a cantilever beam can be theoretically predicted or experimentally measured. The objective function can be defined as the sum of square errors between the predicted and measured response. The predicted response can then be expressed as functions of the amplitude, time history and location of the unknown impact force. The optimization problem can be formulated to solve for the amplitude and time history of the unknown impact force as well as the mode shape information associated with the location of the unknown impact force. In comparison to the structural mode shapes, the location of the impact force can so forth be known. This work verifies the feasibility and fitness of the force-predictive model developed by Wu[1] for the unknown impact force acting on the cantilever beam and demonstrates the force-predictive model applied to arbitrary structures. In the future, different sensors can be adopted in conjunction with the predictive model for force prediction problem.

Keyword : triangular force 、modal damping 、mode shapes

### 一、前言

未知外力預測主要是探討什麼樣的輸出造成什麼樣的輸入，也就是欲以系統之輸出反推出系統之輸入問題。一般傳統上探討結構受外力作用之影響，首先須知道外力之型式及其作用位置，下一步才探討外力對結構物之影響，也就是探討

什麼型式之輸入而結構產生什麼型式之輸出。而逆向工程問題（inverse problem）就是利用系統之輸出而反推系統之輸入，結構系統之外力預測（force prediction）便是在這樣的理念下，利用其結構之響應預測出結構物所受外力作用之大小、時間歷程與作用位置。

當結構系統受未知外力作用時，其作用力之

型式、大小或作用位置可能隨著時間改變而改對變，因為上述種種不確定因素，導致直接結構進行外力量測時，所用之感應器等裝置，在溫度、壓力是否適用等，另外安裝在結構上之黏貼位置是否準確，而這些因素均可能產生量測方面之問題，而影響量測之準確性。

從事外力預測模式之探討研究中，通常可以歸納為幾種類型：第一類外力預測模式為在已知外力型式，而求外力大小及作用位置，D'Cruz and Ryall[3]則量測彈性簡支板結構受作用力之響應，在已知作用力型式，配合最小均方根誤差之估算，成功地預測出外力大小及作用位置。Fabunmi[6]則同樣在已知外力作用之作用頻率，建立使用逆向問題型式，利用系統模態結構之機動性來測定結構所作用之未知力。Hansen and Starkey[7]則利用 pseudo-inverse 函數為基礎，配合以結構系統模型為底之最佳化方法，在得知動態系統模型與其模態下，經適當選擇模態數和量測位置下，即可準確預測出作用力之大小。Law et al. [10]則推導出結構系統之運動方程式，在利用同時量測兩點以上之結構響應，並運用 Fortran 語言撰寫程式處理其結構響應值，可預測出外力大小，而預測時間歷程方面則採最小均方根法，來預測外力之時間歷程。Michaels and Pao[11]則利用 Green's 方程式，同時量測最少兩點以上之響應，即可得力之時間歷程。Wang and Chiu [16]與邱[2]則以外力為脈衝函數，定義目標函數為預測響應與量測結構響應之平均平方誤差，進行最佳化分析求得外力大小與一組外力作用位置之模態振型，經實際模態振型比較即可外力預測模式，同樣以簡支梁結構物為例，進而改變衝擊外力函數為三角力函數型式，透過預測模式對外力大小、作用時間歷程與外力作用位置都能準確的預測出，並且結合智慧型材料，成功地發展出以壓電薄膜感應器為基礎之智慧型材料發展結構系統應用實驗模態分析之方法於預測未知衝擊外力模式。

第二類為已知外力為隨機力之外力預測研究探討，Paolo and Kenneth [13]則是利用 pseudo-inverse 方式來做結構隨機外力預測，利用加速度計量測結構響應，運用上述方法來做外力預測，其先決限制是隨機力所作用之頻率需在所限制頻寬中，才能利用 pseudo-inverse 方法準確地做外力預測。

第三類為第三類為簡諧激振下，求取簡諧力之大小，D'Cruz、et al. [4]則以簡支板結構受週期函數之外力作用時，利用最少四個感測器量測結構之響應，經處理量測結構之響應值後，可預測出作用於簡支板之簡諧力大小、作用位置及相位角。Karlsson[9]則在已知外力型式為簡諧力，在固定頻率下，已知系統之模態參數及外力之振幅下，即可預測出簡諧力大小及其作用位置。Moller [12]則提出一新方法利用連續二次同點加質量之 Mac 值的變化，即可預測出簡諧力大小及位置。Spina and Valente[14]則同樣為簡諧力，利用 Hibert 轉換函數，來處理結構受外力之響應值，可比較其響應值之實數部或虛數部，使成功預測出力之大小。Verhoeven[15]也是在外力同為簡諧力下，在結構固定位置，不同轉速的狀況下，量測運轉機械不同頻率下之響應，利用其響應反推簡諧力之大小，結果顯示在不同頻率下皆可預測出外力大小。

本文所探討之結構系統外力預測模式是以懸臂梁為結構系統，考慮之未知衝擊外力之型式為

三角力型式，經由量測結構響應且基於已知懸臂梁結構系統之模態特性下，透過外力預測模型，預測出未知外力之大小及作用位置，在結構響應量測方面，以衝擊鉗為驅動器，加裝速度計為感測器，當衝擊鉗加速運動時，將利用理論推導或實驗量測所得之響應，透過外力預測模式進行預測分析，利用其預測結果來探討此外力預測模式之可行性與適應性，並驗證吳[1]所發展之外力預測模式適用於任意結構。

## 二、理論分析

受一未知外力  $F(x, t)$  作用，長度為  $L_b$  之均勻懸臂梁結構，如圖一所示，根據傳統樑理論，忽略剪力變形及轉動慣量效應，得懸臂樑側向運動方程式變式如式 (1)：

$$E_b I_b \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + C_b \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1)$$

其中， $E_b$  為懸臂樑的楊氏係數， $I_b$  為懸臂樑的截面慣性矩， $C_b$  為懸臂樑的阻尼係數， $\rho_b$  為懸臂樑的密度， $A_b$  為懸臂樑的截面積， $w$  為樑之側向位移。

當外力的型式為三角力時且在結構座標  $x = x_j$  受衝擊力作用，如圖二所示，其外力的型式可寫成[1]：

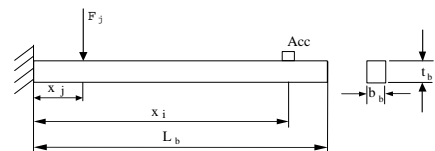
$$F(x, t) = \delta(x - x_j) \times \begin{cases} 0 & , t < t_1 \\ F_j \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)} & , t_1 < t < t_2 \\ F_j \frac{(t - t_3)}{(t_2 - t_3)} & , t_2 < t < t_3 \\ 0 & , t > t_3 \end{cases} \quad (2)$$

### 2-1、加速度響應理論分析

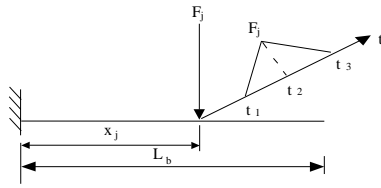
利用擴充原理與結構模態振型之正交性關係，並假設其三角力的作用時間  $t_1 = 0$ ，如圖三所示，可分為三個部分計算其樑之側向位移、速度、加速度響應函數的形式，在此僅列出  $0 < t \leq t_2$  時之位移響應：

當  $0 < t \leq t_2$  時：

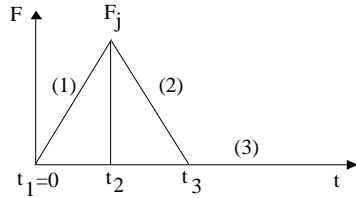
$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ \left[ e^{-\zeta_n \omega_n t} (C_1 \cos \omega_{d_n} t + C_2 \sin \omega_{d_n} t) \right] + \frac{F_j \phi_n(x_j) t}{\omega_n^2 t_2} - \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\zeta_n)}{\omega_n^3 t_2} \right\} \quad (3)$$



圖一、懸臂樑尺寸及未知外力作用位置圖



圖二、三角力作用圖



圖三、三角力作用時間

## 2-2 加速度響應預測模式

懸臂樑結構受未知衝擊外力作用，在座標系統  $x = x_i$  位置之加速度響應，可由兩種方式得到，第一方法是利用理論推導之加速度響應，如式 (3)，加速度響應在不同時間歷程有不同的表示方式，但表示方式均以  $\hat{a}_i(t)$  表示，第二方法是將加速度計為感應器量測結構系統在  $x = x_i$  位置之加速度響應  $\hat{a}_i(t)$ 。假設懸臂樑結構在座標為  $x = x_j$  位置受到未知衝擊外力 (三角力)  $F_j$  作用時，系統座標在  $x = x_i$  位置之加速度響應  $a_i(t)$ ，以式 (4) 為例：

$$a_i(t) = \ddot{u}(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_i) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ (C_5 \cos \omega_n t + C_6 \sin \omega_n t) \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \times (C_5 \sin \omega_n t - C_6 \cos \omega_n t) \right\} \quad (4)$$

式 (4) 之  $\phi_n(x_i)$  表示第  $n$  個模態振型矩陣中之第  $i$  個元素， $\phi_n(x_i)$  與  $\phi_{n,i}$  具有同等之物理意義。為配合實驗結果之應用，故只取前  $k$  個模態，並且將模態振型函數變成向量的型式。可經由理論推導或實驗模態分析的方式得到系統結構的模態參數，如自然頻率、模態阻尼比與模態振型，所以對於式 (4) 當中的  $\omega_n$ 、 $\xi_n$ 、 $\phi_{n,i}$  均為已知，而結構受未知衝擊外力 (三角力) 作用，式 (4) 未知數包含其三角力大小  $F_j$ 、作用力時間歷程  $t_2$  和  $t_3$  與作用力的位置  $x_j$ 。

欲以最佳化方式來求解如式 (4)，以期能求得未知參數  $F_j$ 、 $t_2$  和  $t_3$  與  $\phi_{n,j}$ ，並使得加速度響應估測值  $a_i(t)$  與理論推導之加速度響應  $\hat{a}_i(t)$  或實驗量測所得的加速度響應  $\hat{a}_i(t)$  相等或誤差最小化，即可預測出其外力大小  $F_j$ 、作用時間歷程  $t_2$  和  $t_3$  與外力作用位置  $x_j$ ，因此定義  $a_i(t)$  與  $\hat{a}_i(t)$  之誤差平方和為目標函數，其未知數為外力大小  $F_j$ 、作用力時間歷程  $t_2$  和  $t_3$  與作用力的位置  $x_j$ ， $s_2$ 、 $s_3$  之值則定義成  $t_3 - t_2$ ，因此定義最佳化分析問題如下：

$$\text{目標函數： } Q_i = \sum_{r=1}^{N_i} [a_i(t_r) - \hat{a}_i(t_r)]^2 \quad (5)$$

設計變數： $F_j$ 、 $t_2$ 、 $s_2$ 、 $\phi_{n,j}$ ， $n=1,2,\dots,k$   
目標函數  $Q_i$  定義為由  $N_i$  個時間點之加速度

響應估測值  $a_i(t)$  與實際值  $\hat{a}_i(t)$  之誤差平方和。式 (5) 之最佳化分析問題的設計方向在使其目標函數為零或最小化，進而求得  $F_j$ 、 $t_2$ 、 $s_2$  與  $\phi_{n,j}$ 。

進行求解最佳化問題之後，可得到三角力大小  $F_j$  與時間歷程  $t_2$  與  $s_2$ 、 $t_3$  的值可由  $t_2 + s_2$  求得，以及一組模態振型  $\{D\}_j$ ，如下：

$$\{D\}_j = [\phi_{1,j} \ \phi_{2,j} \ \dots \ \phi_{k,j}]^T \quad (6)$$

其中，上標  $T$  代表對矩陣作轉置 (transpose) 運算，由式 (6) 可看出  $\{D\}_j$  為所有模態振型向量在位置  $x_j$  所組成之向量，定義結構模態振型矩陣如下式：

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \ \{\phi\}_2 \ \dots \ \{\phi\}_k] =$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{k,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,m} & \phi_{2,m} & \dots & \phi_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_1 \\ [G]_2 \\ \vdots \\ [G]_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中，

$$[G]_l = [\phi_{1,l} \ \phi_{2,l} \ \dots \ \phi_{k,l}] = \{\hat{D}\}_l^T, \quad l=1,2,\dots,k \quad (8)$$

式 (8) 中的  $k$  為模態數， $m$  為結構進行模態分析之分割點數。

MAC (Modal Assurance Criterion) 為評估實驗及理論所得振型之相關性指標，其定義如下 [5]：

$$MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = \frac{|\{\phi\}_p^T \{\phi\}_x|^2}{(\{\phi\}_p^T \{\phi\}_p)(\{\phi\}_x^T \{\phi\}_x)} \quad (9)$$

式 (9) 之上標  $*$  代表共軛 (conjugate) 運算， $\{\phi\}_x$  代表實驗分析之模態振型向量， $\{\phi\}_p$  代表理論分析之模態振型向量， $\phi_{p,j}$  代表  $\{\phi\}_x$  中第  $j$  個元素， $\phi_{p,j}$  代表  $\{\phi\}_p$  中第  $j$  個元素。

當  $\{\phi\}_p = \{\phi\}_x$ ，即理論與實驗所得的振型相同時，則  $MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = 1$ ；實驗所得的振型與理論推導所得的振型完全相同之可能性很低，因為在實驗過程中都些許之誤差存在。一般而言， $0 \leq MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) \leq 1$ ，當 MAC 數值大於 0.9，代表實驗所得的振型與理論推導所得的振型有良好之相關性；當 MAC 數值低於 0.05，代表此兩者無相關性或在數學定義上稱兩者具有正交性。當最佳化所得到的模態振型  $\{D\}_j$  與結構模態振型  $\{\hat{D}\}_l$  之相關性以 MAC 評估時，則如式 (10) 所表示：

$$MAC_{jl} = MAC(\{D\}_j, \{\hat{D}\}_l), \quad l=1,2,\dots,m \quad (10)$$

兩組振型  $\{D\}_j$  與  $\{\hat{D}\}_l$  具有良好的相關性時， $MAC_{jl}$  值會趨近於 1，亦代表  $x_p = x_l$ ，因此可判斷在  $x_i$  是未知衝擊外力 (三角力) 所作用之位置。

## 三、預測外力模式程式架構

在外力預測模式程式中，其程式語言所使用的程式語言為 MS-FORTRAN PowerStation 語言

與使用 Visual Numerics IMSL Math Library[8]中所提供之最佳化副程式 DBCPOL，預測分析流程圖如圖四所示。

此外力預測程式可依分析目的任意選擇理論或實驗所得模態參數估算  $a_i(t)$  搭配理論或實驗分析所得響應  $\hat{a}_i(t)$  進行外力預測分析，所欲分析之兩種組合分述如下：

組合(1)：此組合主要目的為使用理論推導所得模態參數估算  $a_i(t)$  與理論所得響應  $\hat{a}_i(t)$ ，來探討此外力預測方法之適應性。

組合(2)：理論推導之模態參數估測響應與實驗所量測之結構加速度響應，當實驗模態分析不進行時，探討此方法之可行性與適應性分析。此組合適用於對於結構複雜，且結構之模態參數難以或無法由實驗模態分析求得時，結構之模態參數可以理論推導或以有限元素分析結構求取，以進行外力預測分析。

#### 時間點選點之影響

分別就選取時間點  $N_t$  多寡與不同區域之影響做探討，由經驗歸納所得，建議在進行最佳化外力預測分析時，對於時間點取點方式為取 10 到 50 點前區域選點，較容易得到良好之預測結果。

#### 設計變數初始值之影響

當設計變數之初始值接近於或相等於實際值時，在外力大小、時間歷程或作用位置之預測結果，幾乎都可以得到非常好之結果，且選取時間點  $N_t$  的多寡對預測之結果改變不大。設計變數之初始值會影響外力預測之結果，若能配合適當選取時間點及區域，可增加外力預測結果之正確性。

#### 設計變數之上下限

在外力預測分析過程中，為了減低其運算時不必要的預測結果之誤差及運算時間，在分析時一開始先大範圍設上下之範圍的結果，然後歸納出一些常出現之預測結果，再適當的減少上下限範圍，以得到正確結果。

表一、懸臂樑之材料性質

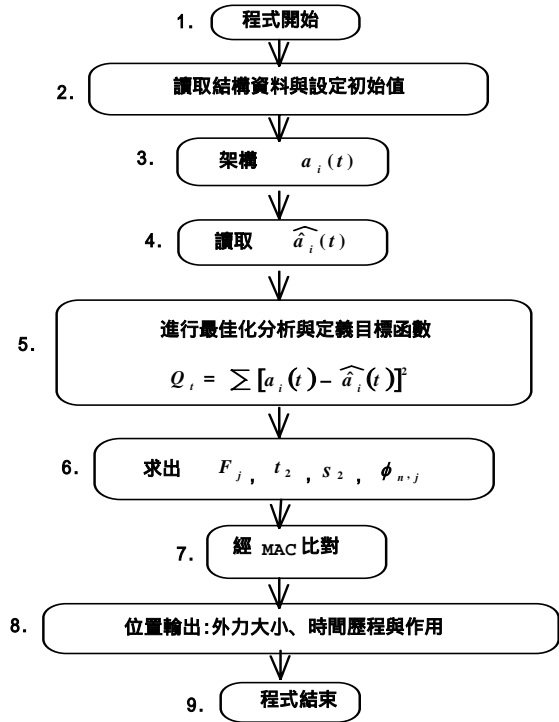
材料	鋼
長度 ( $L_b$ )	0.3m
寬度 ( $b_b$ )	0.0395m
厚度 ( $t_b$ )	0.00166m
密度 ( $\rho_b$ )	7870kg/m <sup>3</sup>
楊氏係數 ( $E_b$ )	207×10 <sup>9</sup> N/m <sup>2</sup>
蒲松比 ( $\nu_b$ )	0.292

表二、使用儀器一覽表

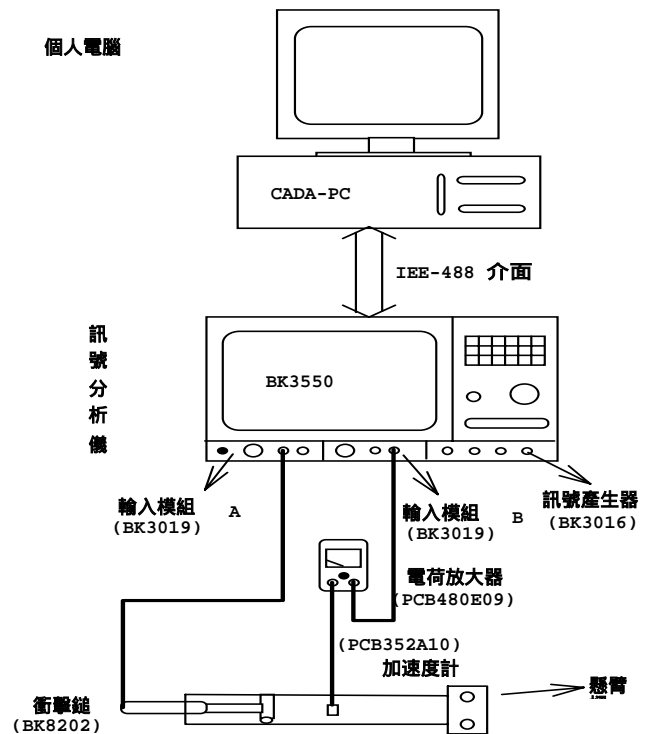
儀器名稱	型號
雙頻道訊號分	BK3550
衝擊錘	BK8202
加&速度計	PCB352A10
加速度計之電	PCB480E09
曲線嵌合軟體	LMS

#### 四、實驗架構

本文主要探討懸臂樑受三角波型式外力衝擊之外力預測，懸臂樑尺寸如表一所示，使用儀器設備其型號如表二所示，儀器架構圖如圖五所示。



圖四、外力預測流程圖



圖五、實驗儀器架構圖

## 五、外力預測分析結果與討論

### 5.1 組合 (I) 理論推導所得模態參數估測響應搭配理論推導所得響應

主要為最佳化問題之目標函數是以理論推導所得之模態參數估測響應搭配理論推導所得之結構響應來架構，來進行外力預測模式分析，並探討此外力預測模式之適應性與可行性。

#### 5.1.1 外力作用在不同位置之影響

根據前述可知，影響外力預測模式之參數有時間點  $N_i$ 、設計參數之初始值與變數之上下限位置，就前節建議之準則，進行外力預測分析。並將探討外力作用位置不同時對預測模式之適應性及影響，並評估其可行性。

未知衝擊外力分別作用於第 2 點（大約樑之 1/5 處）、第 5 點（樑之 1/3 處）、第 7 點（大約樑之中點）與第 15 點（樑之端點），量測位置皆固定於第 3 個點，其時間歷程皆固定為： $t_2$  為 1 毫秒， $s_2$  為 2 毫秒，並採前述之建議方法進行外力預測分析，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。

表三為外力作用於不同位置對外力大小與時間歷程之預測結果，欄中之組合  $(i, j)$  符號  $i$  表示量測響應位置，而符號  $j$  表示未知衝擊外力作用位置，由表三可得知其預測之外力大小與時間歷程皆相當接近實際值。圖六為相對於表三所得之實際與預測的三角力型式比較圖，圖中實線部分代表各不同組合的實際值之外力大小與時間歷程，而虛線部分則代表各不同組合的預測值之外力大小與時間歷程。由圖六其各種組合之線與虛線，可看出預測之未知衝擊外力大小與時間歷程與實際值相當接近。圖七為相對於表三之外力作用在不同位置其預測位置之結果，圖中可看出各組合之 15 點 MAC 值都無趨近於 1，但可由其 15 點之 MAC 的相對極大值判斷出其外力作用之位置。由其預測結果顯示此外力預測模式在未知衝擊外力作用於不同位置皆能適用。

#### 5.1.2 外力大小不同作用之影響

本節內容為當以不同大小之外力作用時，而外力作用在相同位置、在相同的時間歷程與在相同的位置量測結構響應之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。表四為本狀況預測之結果，可以看出所預測的外力大小與時間歷程和實際值誤差不大，由其預測結果顯示其預測模式可適應於不同大小之未知衝擊外力。

#### 5.1.3 時間歷程改變之影響

本節內容為當作用力之時間歷程改變，而外力作用在相同位置、外力大小相同與在相同的位置量測結構響應之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。表五可看出在時間歷程改變時所預測出之結果，與正確值都相當接近，由其預測結果顯示本預測模式可適用於時間歷程改變時之預測。

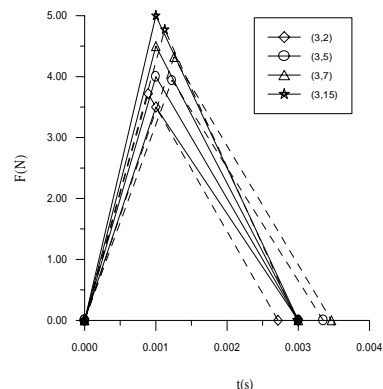
#### 5.1.4 量測位置不同之影響

本節內容為當在量測響應位置不同時，而在相同的時間歷程、與外力作用在相同位置但其作用之外力大小不同之條件下。上述之意為外力作用位置固定於分割點 2 之位置，響應量測位置於分割點 3、5、7 與 15，時間歷程不變，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。

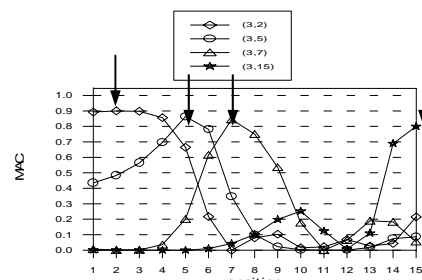
量測響應位置不同也就是加速度計量測響應位置不同。由表六可看出，其外力預測所得之外力大小與時間歷程和實際值差異不大，圖八為對於表六之實際與預測的三角力型式比較圖，實線部分為代表各不同組合的實際值之外力大小與時間歷程，而虛線部分則代表各不同組合的預測值之外力大小與時間歷程。由圖中八其各種組合之實線與虛線之比較，可看出其外力大小與時間歷程之趨勢與實際值都蠻相近的。圖九為相對於表六在量測響應位置不同所預測位置之結果，由圖中可看出當量測響應位置離外力作用位置越遠，其預測外力位置之 MAC 值有偏小之趨勢。但就整體而言，還是可由其 15 點之 MAC 的相對極大值判斷出其外力作用之位置，由其預測結果顯示此外力預測模式量測響應位置不同皆能適用。

表三、組合 (I) 作用力位置於預測外力大小與時間歷程之結果

組合	$F_i$ (N)	實際值	外力預測所得	時間歷程 (毫秒)	
				$t_2$ (1)	$s_2$ (2)
(3,2)	3.500	3.721	0.892	1.823	
(3,5)	4.000	3.941	1.226	2.123	
(3,7)	4.500	4.319	1.264	2.201	
(3,15)	5.000	4.769	1.125	1.852	



圖六、對應表三之外力大小與時間歷程



圖七、組合 (I) 作用力位置於預測外力之結果

### 5.2 組合 (II) 理論推導所得模態參數估測響應搭配實驗量測所得響應

本節內容為以理論推導所得之模態參數估測響應來搭配對結構進行實驗響應之量測，進行外力預測分析之可行性，分別探討外力作用在不同位置、不同大小外力作用與量測響應位置不同於預測模式之影響。

5.2.1 外力作用在不同位置之影響

本節內容為探討當外力作用在不同位置時之影響，且因作用於不同位置時外力之時間歷程有所影響，將探討外力作用於分割點與非分割點時之影響，同時也探討時間歷程不同時之影響。表七中組合(3,1.5)表示在分割點1與2之間點為外力作用位置，在分割點3位置量測之結構響應與3組合(3,2.5)表示外力作用位置於分割點2與3之間點為外力作用位置，在分割點3之位置量測之結構響應，由表七可看出其預測之外力大小與時間歷程相當跟實際值有些許差異，其差異在可接受的範圍內。圖十為相對於表七之實際與預測的三角力型式比較圖，實線部分代表各不同組合之實際值之外力大小與時間歷程，虛線部分代表各不同組合之預測值之外力大小與時間歷程，由圖中可以看出其外力大小與時間歷程有些許差異，但還是可看出其大概之趨勢。圖十一為相對於表七為外力作用在不同位置之結果，圖中可以看出由其15點之相對極大值判斷出其外力作用位置。對於外力作用於非分割點部分，雖無法由15點之MAC相對極大值判斷出，但還是可由圖中看出作用力位置之趨勢所在。所以外力作用在不同位置之預測情形還算可以接受。

5.2.2 外力大小不同作用之影響

本節內容為以不同大小之外力作用且時間歷程不同，在外力作用在相同位置與相同位置量測結構之響應之條件下，探討此種狀況下外力預測模式是否能適應。表八為不同作用力大小之外力預測結果，由表中可以當作用力較大時，預測之外力與實際值之誤差稍大，其誤差在可接受的範圍內，顯示出此預測方式之可行性。

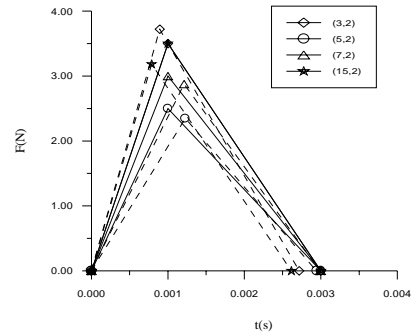
5.2.3 量測位置不同之影響

本節內容為當在量測響應位置不同之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。上述之意為在外力作用位置固定於分割點2之位置，量測響應位置於分割點第3、5、7與15。

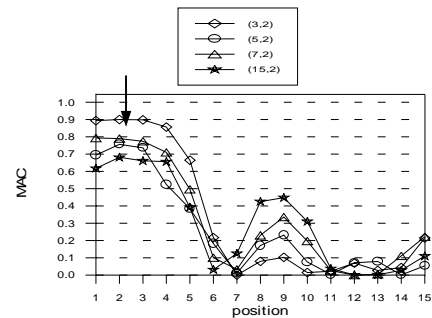
由表九可看出，其外力預測所得之外力大小與時間歷程都有些許之誤差，圖十二為相對於表九之實際與預測的三角力型式比較圖，實線部分代表各不同組合的實際值之外力大小與時間歷程，虛線部分為代表各不同組合的預測值之外力大小與時間歷程。由圖十二其各種組合的實線與虛線之比較，雖與實際值有些許的差異，但還是可看出其三角力之型式；圖十三為相對於表九之量測響應位置不同所預測位置之結果，由圖中可看出四種組合除了組合(5,2)皆可預測出外力作用位置之趨勢，雖然組合(5,2)不能準確地預測出外力作用位置，但也可看出外力作用位置之範圍。

表四、組合(I)不同大小外力作用之分析結果

組合	實際值	外力預測所得	時間歷程(毫秒)	
			$t_2$ (1)	$s_2$ (2)
(3,2)	3.500	3.721	0.892	1.823
(3,2)	5.000	4.755	1.262	2.214
(15,1)	2.000	1.816	1.212	2.275
(15,1)	5.000	4.675	1.276	1.798



圖八、對應表六之外力大小與時間歷程



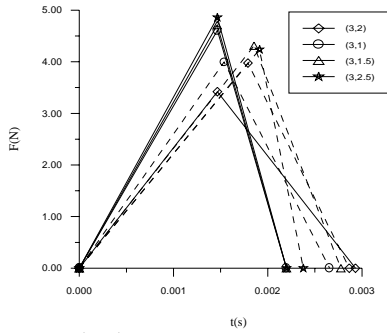
圖九、組合(I)量測響應位置於預測外力位置之影響

表五、組合(I)時間歷程改變之分析結果

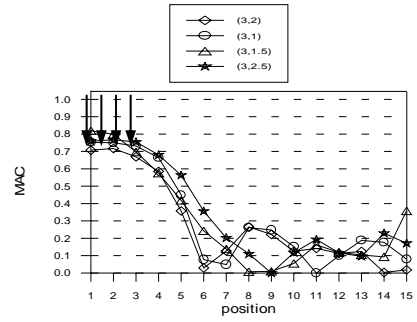
時間歷程(毫秒)	外力大小之比較		實際值		外力預測所得	
	$F_j$ (N)		$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$
	實際值	預測值				
Case (3,2)	3.500	3.721	1.0	2.0	0.892	1.82
(3,2)	3.500	3.850	0.8	1.2	1.049	1.39
(15,1)	2.000	1.816	1.0	2.0	1.212	2.17
(15,1)	2.000	2.248	1.5	2.5	1.307	2.22

表六、組合(I)量測響應位置於預測外力大小與時間歷程之結果

$F_j$ (N)	實際值	外力預測所得	時間歷程(毫秒)	
			$t_2$ (1)	$s_2$ (2)
Case (3,2)	3.500	3.721	0.892	1.823
(5,2)	2.500	2.348	1.122	1.818
(7,2)	3.000	2.816	1.212	1.776
(15,2)	3.500	3.183	0.786	1.827



圖十、組合 (II) 作用力位置於預測外力時間歷程之圖示



圖十一、組合 (II) 作用力位置於預測外力位置之影響

表七、組合 (II) 作用力位置於預測外力大小與時間歷程之結果

(a) 外力大小

Case	$F_j$ (N)	實際值	外力預測所得
(3,2)		3.420	3.876
(3,1)		4.610	4.155
(3,1.5)		4.710	4.309
(3,2.5)		4.860	4.238

(b) 外力作用時間歷程

Case	時間歷程 (毫秒)		實際值		外力預測所得	
	$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$
(3,2)	1.465	1.465	1.789	1.076		
(3,1)	1.465	0.733	1.536	1.121		
(3,1.5)	1.465	0.733	1.853	0.923		
(3,2.5)	1.465	0.733	1.912	0.446		

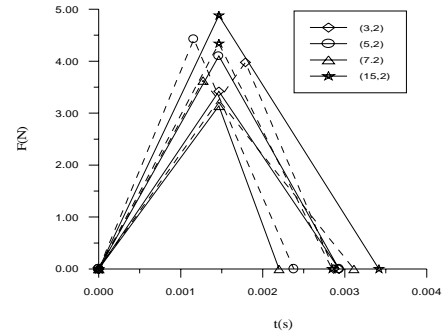
表八、組合 (II) 作用力大小於預測外力大小與時間歷程之結果

(a) 外力大小

Case	$F_j$ (N)	實際值	外力預測所得
(3,2)		3.420	3.876
(3,2)		8.760	7.969
(15,1)		3.810	4.464
(15,1)		7.410	6.729

(b) 外力作用時間歷程

Case	時間歷程 (毫秒)		實際值		外力預測所得	
	$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$
(3,2)	1.465	1.465	1.789	1.076		
(3,2)	1.465	1.953	1.863	2.128		
(15,1)	1.465	0.733	1.841	0.931		
(15,1)	1.465	0.733	1.185	0.629		



圖十二、組合 (II) 量測響應位置於預測外力時間歷程之圖示

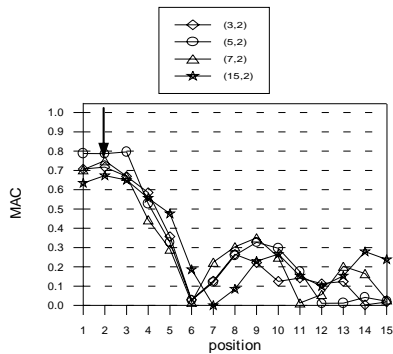
表九、組合 (II) 量測響應位置於預測外力大小與時間歷程之結果

(a) 外力大小

Case	$F_j$ (N)	實際值	外力預測所得
(3,2)		3.420	3.876
(5,2)		4.100	4.544
(7,2)		3.140	2.851
(15,2)		4.880	4.172

(b) 外力作用時間歷程

Case	時間歷程 (毫秒)		實際值		外力預測所得	
	$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$	$t_2$	$s_2$
(3,2)	1.465	1.465	1.789	1.076		
(5,2)	1.465	1.465	1.113	1.264		
(7,2)	1.465	1.465	1.271	1.839		
(15,2)	1.465	1.953	1.715	1.655		



圖十三、組合 (II) 量測響應位置於預測外力位置之影響

## 六、結論

本文以懸臂樑結構進行實驗模態分析，並成功的驗證基於實驗模態分析與響應量測之外力預測模式，對於三種分析組合在各種狀況下之預測分析結果皆有良好之預測結果，驗證此預測模式對於懸臂樑結構之可行性與適應性。同時也驗證 [1] 之外力預測模式適用於任意結構。

- 對於外力預測結果其設計變數扮演著很重要的角色，適當的選取時間點與區域、設計變數之初始值與上下限限制，對預測之結果都有相當程度之影響，不當之設計變數會影響其預測結果。
- 歸納 [1] 與本文之時間點選取之影響方面，可歸納出時間點不宜過多及過少，一般來說對於時間點之選擇，建議在時間點在 5-50 點間進行外力預測，並配合適當調整上下限範圍，使外力預測結果更接近實際值。
- 在理論推導所得模態參數估測響應搭配理論推導所得響應之組合中，對於時間點之選取無前後區域點之預測結果比較無影響，故對於外力作用在不同位置、外力大小不同與量測響應位置不同之預測結果相當接近實際值，可證實本預測模式之可行性與適應性。
- 在理論推導所得模態參數估測響應搭配實驗量測所得響應之組合中，選取之前面區域時間點較易得到較佳之預測結果，故對於外力作用在不同位置、外力大小不同與量測響應位置不同之預測結果與實際值差異不大，對於預測外力作用位置方面，雖其點之相對極大值不是 15 點中之最大值，但還是可由圖中看出作用力位置之趨勢所在。由其分析結果顯示在越接近外力作用位置附近，所預測之結果較為精確。

由以上幾點可看出，適當的選取時間點、良好之設計變數初始值與對於初始值適當地設上下限範圍，其預測之結果都相當程度之可信度，而且由其預測分析結果證實此三種組合之預測模式皆具有相當高的可行性與適應性，同時也驗證了 [1] 所發展之外力預測模式適用於任意結構。

## 誌謝

本研究承蒙國科會計畫支助，計畫編號：NSC89-2212-E-020-009，特此致謝。

## 參考文獻

- 吳建德，1999，智慧型材料結構系統應用於未知衝擊外力之預測，碩士論文，國立屏東科技大學。
- 邱俊賢，1998，未知衝擊外力作用於任意結構之預測，碩士論文，國立屏東科技大學。
- D'Cruz, J., Crisp, J. D. C., and Ryall, T. G., 1991, "Determining a Force Acting on a Plate-An Inverse Problem," AIAA Journal, Vol. 9, pp. 464-470.
- D'Cruz, J., Crisp, J. D. C., and Ryall, T. G., 1992, "On the Identification of a Harmonic Force on a Viscoelastic Plate From Response Data," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 59, pp. 722-729.
- Ewins, D. J., 1986, Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire, England.
- Fabunmi, J. A., 1986, "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by the Pseudoinverse Technique," AIAA Journal, Vol. 24, pp. 504-509.
- Hansen, M., and Starkey, J. M., 1990, "On Predicting and Improving the Condition of Modal-Model-Based Indirect Force Measurement Algorithms," Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference, pp. 115-120.
- IMSL Problem-Solving Software System, 1989, Math / Library Fortran Subroutines for Mathematical Applications, IMSL, Inc.
- Karlsson, S. E. S., 1996, "Identification of External Structural Loads From Measured Harmonic Responses," Journal of Sound and Vibration, Vol. 196, pp. 59-74.
- Law, S. S., Chan, T. H. T., and Zeng, Q. H., 1999, "Moving Force Identification- A Frequency and Time Domains Analysis," Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 121, pp. 394-401.
- Michaels, J. E., and Pao, Y. H., 1992, "Determination of Dynamic Forces From Wave Motion Measurements," ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 61-68.
- Moller, P. W., 1999, "Load Identification Through Structural Modification," Journal of Applied Mechanics, Vol. 66, pp. 236-241..
- Paolo, S. V., and Kenneth, G. M., 1997, "Predicting Random Excitation Forces from Acceleration Response Measurements," Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp. 1-6.
- Spina, D., and Valente, C., 1997, "A Representation of the Harmonic Response in The Complex Plane For Modal Parameter Identification," Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference, pp. 57-63.
- Verhoeven, J., 1988, "Excitation Force Identification of Rotating Machines Using Operational Rotor/Stator Amplitude Data and Analytical Synthesized Transfer Functions," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 110, pp. 307-314.
- Wang, B. T., and Chiu, C. H., 1999, "Determination of Unknown Impact Force Acting on Arbitrary Structures," Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference, pp. 1653-1659.