

## 振動送料平臺物料垂直運動特性分析

王栢村、謝欽城、薛安廷

國立屏東科技大學機械工程研究所

### 摘要

本文主要在探討以振動方式送料時，探討影響送料率的因素，以作為設計振動送料平臺之參考。文中首先由理論分析得到物料於振動平臺上之垂直運動狀態，包括黏著、分離、飛行、接觸、碰撞、具初始速度飛行等六項運動狀態。其次再經由實驗模擬與理論分析結果對比對，得到物料與振動平臺間之碰撞係數。最後經由理論分析與實驗分析結果相互驗證，驗證結果發現理論分析架構與實驗結果相當正確。其中並得到影響物料運動狀態之因素有馬達轉速、激振振幅、物料重量、彈簧勁度、碰撞係數五項。而在被輸送物料重量相近時，以馬達轉速、激振振幅、碰撞係數等三項參數影響送料較大，而彈簧勁度影響最小。文中並將物件與送料平臺之碰撞係數、激振振幅及激振頻率三者之關係以三維曲面圖表示出來，俾做為未來振動送料平臺設計之參考。

關鍵詞：振動送料、垂直運動

### 一、前言

以振動方式作為輸送物料的方法在業界行之有年，無論是在農業、工業、土木業、食品業等，均有廣大的使用方向，是於各方面均有廣泛運用之輸送方式之一。一般常見之振動送料平臺有長條式及圓盤式二種，主要組成包括有動力源或電磁驅動器、板片彈簧或等效彈簧組、振動送料平臺底座、以及送料盤等等。有的送料平臺也包括了防震系統如防震橡皮底座等等。

有關於振動送料特性分析之研究，Boothroyd[1]曾探討質點的振動輸送情況，並提出可能影響輸送速度的各種因素。Inoue[2]曾研究垂直方向的質點運動，並考慮碰撞係數對質點之影響。Gaberson[3][4]求得質點在正弦波上之運動狀態，並將其歸納成靜止、滑動、飛行、靜止等幾種運動方式。而Berry[5]則將粒子在輸送台上的運動畫分出靜止、摩擦、跳躍、下落、接觸等五種不同的運動軌跡，並提出一套振動送料平臺的設計流程。鄭[6]則以一固有之振動送料器作分析，並以墊圈做為測試物件。Schertz and Hazen[7]則將振動送料方式應用在傾斜振動盤上，並以電腦程式進行模擬，江崎春雄[8]則討論了於圓盤式振動篩上，粒子運動呈螺旋狀向外行進。Feller and Foux[9]則發現粒子自然頻率和振動振幅大小成反比。若尾俊男[10]導出了不同形狀的粒子在往復式軌跡上的運動方程式。Kanafojski and Karwo-wski[11]則討論了粒子飛行後，落下所產生的碰撞問題。

本論文旨在將振動送料運動模式簡化為垂直及水平二種模式，並對物件在送料平臺上之垂直運動做探討。首先於理論分析中推導出物件垂直運動模式及狀態判斷式，再以自行設計之實驗加以比對驗證，藉以驗證理論架構之正確性。未來並可進一步結合物件水平運動模式，以做為送料平臺振動送料特性分析之參考。

### 二、理論分析

#### 2.1 數學模式之建立

由於長條形送料平臺及圓盤式送料平臺其運動特性相似，因此以長條形送料平臺為例，將其簡化為一長條形質塊一彈簧系統如圖一所示，並進一步將其簡化為所需之垂直運動數學模式。首先將長條形振動送料平臺依其結構特性以一長條形質塊一彈簧系統表示，其次再將此長條形質塊一彈簧系統簡化為一單自由度彈簧一質塊系統。並假設此系統之運動狀態為簡諧強制振動。

由圖一中，可定義欲分析之長條形質塊一彈簧系統具有二個質塊，包括送料平臺質塊 (conveyor-mass)、及基座質塊 (base-mass)、三片板片彈簧 (leaf-spring) 及三個基座彈簧 (base-spring)。而在數學模式化過程中，首先假設此長條形質塊一彈簧系統中的基座質塊之質量遠大於送料平臺質塊之質量，且基座彈簧之彈簧勁度亦遠大於板片彈簧之彈簧勁度。此外為能達到振動送料要求，振動馬達是以簡諧方式激振送料平臺，使送料平臺呈簡諧運動

(harmonic motion)。因此假設一簡諧外力作用於送料平臺質塊上，並由板片彈簧受外力所產生之彈簧恢復力 (spring restoring force) 與週期性外力交互作用下，使得送料平臺質塊產生簡諧運動。根據以上假設，由於送料平臺質塊所產生之簡諧運動對於基座質塊與基座彈簧並無顯著之影響，因此可將基座質塊質量與基座彈簧質量視為地球質量，所建立之長條形質塊一彈簧系統如圖二所示。由圖二之數學模式，假設三片板片彈簧之物理性質與質塊之夾角皆相同，可將其視為一並聯系統，且其等效彈簧勁度為三個板片彈簧彈簧勁度之總和。又因為由於作用在長條形質塊上之外力作用方向與長條形質塊夾有一角度，因此可將外力  $F$  分解為水平分量  $F_x$  與垂直分量  $F_y$ 。系統簡化如圖三所示。

由於外力  $F$  作用所產生之質塊位移響應亦可將其視為外力之水平分量  $F_x$  與外力之垂直分量  $F_y$  作用在質塊上所產生之總位移響應。因此，此長條形質塊一彈簧系統亦可視為由二個受簡諧外力作用之單自由度質塊一彈簧系統所組合而成，如圖四所示。其中圖四 (a)、圖四 (b) 分別為化簡後之垂直與水平振動數學模式。

#### 2.2 理論分析流程

為探討物料於振動送料系統之運動狀態，由圖四(a)基於以下之假設，以探討物料與與送料平臺之垂直運動：

1. 物件與送料平臺均為剛體，且為點質量 (point mass)。
2. 送料平臺質量遠大於物件質量。
3. 送料平臺於任何時間均呈簡諧運動狀態。
4. 物件與送料平臺初始狀態呈黏著。
5. 忽略彈簧阻尼效應。
6. 物件與送料平臺碰撞為彈性碰撞，且無時間之延遲。

根據以上假設，圖四(a)之系統可簡化架構其數學模型如圖五所示。圖五中， $M$  表示平臺質量， $m$  表示物件質量， $k$  表示系統中彈簧之彈簧勁度， $x(t)$  表示物件運動位移響應， $y(t)$  表示平臺之運動位移響應。而送料平臺的位移響應、速度響應、加速度響應在任何時間  $t$  下，可表示為：

$$y(t) = Y \sin \omega t \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = \omega Y \cos \omega t \quad (2)$$

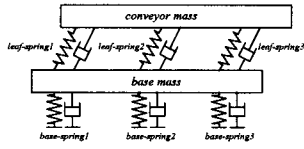
$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \sin \omega t \quad (3)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (4)$$

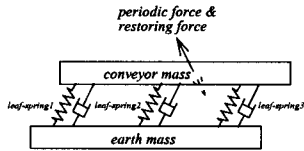
$$f = \frac{r.p.m.}{60} \quad (5)$$

其中， $Y$  為激振板位移振幅， $\omega$  及  $f$  均為激振頻率， $\omega$  單位為  $rad/sec$ ， $f$  單位為赫茲(Hz)， $r.p.m.$  代表振動馬達之每分鐘迴轉數。

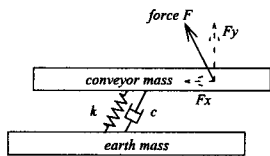
探討分析物件質塊  $m$  在激振質塊  $M$  受簡諧激振下之運動狀態，整理理論分析流程如圖六所示。以下根據流程圖依次說明理論分析過程，並以一典型之物件垂直運動軌跡圖做輔助說明，如圖七所示。



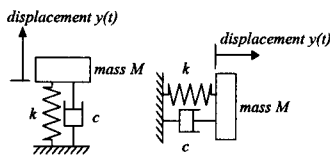
圖一：模擬振動平臺所建立之質塊—彈簧系統



圖二：忽略基座效應之質塊—彈簧系統

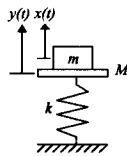


圖三：板片彈簧並聯後之質塊—彈簧系統



(a) 垂直振動系統模式 (b) 水平振動系統模式

圖四：簡化後之單自由度質塊—彈簧系統



圖五：模擬系統的數學模式

狀態一：物件與激振板呈黏著狀態

系統剛開始運動時，假設物件為放置在激振板上，因此物件與激振板黏著在一起呈簡諧運動。因此可由式(1)至式(3)分別表示物件與激振板呈黏著狀態時的位移響應、速度響應、加速度響應如下：

$$x(t) = y(t) = Y \sin \omega t \quad (6)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = \omega Y \cos \omega t \quad (7)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = -\omega^2 Y \sin \omega t \quad (8)$$

判斷 A：判斷物件與激振板是否分離

如圖八所示為物件與激振板黏著時之自由體圖，可知作用在激振板上(包括激振板及質塊)的外力是來自於彈簧的恢復力；因此，當物件與激振板處於平衡狀態時，可得系統平衡方程式如下：

$$N = ky(t) = kY \sin \omega t \quad (9)$$

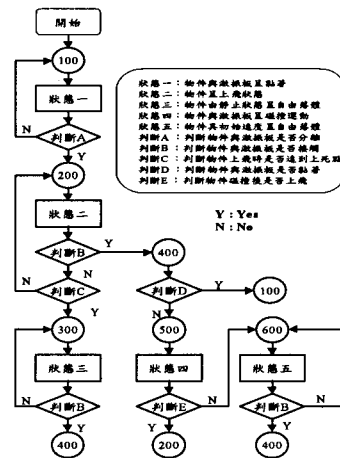
而當反作用力  $N$  大於物件重量時，物件將受系統反作用力作用而脫離激振板向上飛行。因此可得判斷式：

$$N = ky(t) = kY \sin \omega t > mg \quad \begin{cases} \text{Yes goto 200} \\ \text{No goto 00} \end{cases} \quad (10)$$

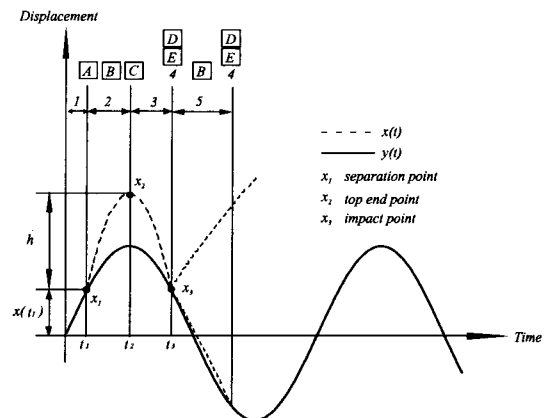
當式(10)成立時，可得物件與激振板分離的臨界時間  $t_1$  為：

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \frac{N}{kY} \right) \quad (11)$$

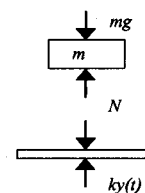
而物件與激振板分離臨界點圖則如圖七之  $x_1$  點。



圖六：垂直振動分析流程圖



圖七：物料垂直振動運動軌跡圖



圖八：物件與激振板分離臨界自由體圖

**狀態二：物件呈上飛狀態**

物件與激振板分離後，物件開始作直線向上飛行運動，物件飛行之初始狀態為：

$$x(t_1) = y(t_1) = Y \sin \omega t_1 \quad (12)$$

$$\dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1) = \omega Y \cos \omega t_1 \quad (13)$$

$$\ddot{x}(t_1) = -g \quad (14)$$

而上飛過程中，物件之位移、速度、及加速度可解析如下：

$$x(t) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \quad (15)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_1) - g(t - t_1) \quad (16)$$

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (17)$$

設  $h$  為物件上飛之上死點（如圖七之  $x_2$  點）至分離點之高度，根據等加速度直線運動方程式得知：

$$h = \frac{[\dot{x}(t_1)]^2}{2g} \quad (18)$$

令物件到達上死點之時間為  $t_2$ ，則

$$t_2 = \frac{\dot{x}(t_1)}{g} + t_1 \quad (19)$$

**判斷 B：判斷物件上飛後與激振板是否接觸**

當物件與激振板再次接觸時，物件與激振板相對於水面之位移量相同，因此可以以物件與激振板之位移是否相同來判斷是否接觸，其判斷式為：

$$x(t) \leq y(t) \begin{cases} \text{Yes, goto 400} \\ \text{No, goto judgement C} \end{cases} \quad (20)$$

**判斷 C：判斷物件上飛時是否達到上死點**

由狀態二可知物件向上飛行至上死點的時間為  $t_2$ ，因此可以由狀態時間  $t$  是否到達  $t_2$  作為判斷。若時間已到達  $t_2$ ，則物件已到達上死點，開始做自由落體運動狀態。反之，若物件尚未到達上死點，則仍為上飛之狀態。判斷式如下：

$$t \geq t_2 \begin{cases} \text{Yes, goto 300} \\ \text{No, goto 200} \end{cases} \quad (21)$$

**狀態三：物件由靜止狀態呈自由落體狀態**

當物件飛抵上死點時，物件之初始狀態，可得如下：

$$x(t_2) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2 = h + y(t_1) \quad (22)$$

$$\dot{x}(t_2) = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{x}(t_2) = -g \quad (24)$$

因物件在空中僅受重力之影響，開始做自由落體之運動，物件之位移、速度、加速度可分別推導如下：

$$x(t) = h + y(t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_2)^2 \quad (25)$$

$$\dot{x}(t) = -g(t - t_2) \quad (26)$$

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (27)$$

**判斷 B：物件與激振板是否接觸**

物件在自由落體狀態過程中，激振板仍持續在運動狀態，因此物件可能與激振板再次接觸，此時以物件與激振板之位移量是

否相同判斷是否接觸，其判斷式為：

$$x(t) \leq y(t) \begin{cases} \text{Yes, goto 400} \\ \text{No, goto 300} \end{cases} \quad (28)$$

若(28)式成立，則物件與激振板呈接觸狀態，反之則物件仍為自由落體狀態。

**判斷 D：判斷物件與激振板是否黏著**

當物件與激振板接觸時，若物件之速度與激振板之速度近似，則物件與激振板將再次黏著做同步運動。判斷物件與激振板是否黏著之判斷式為：

$$\dot{x}(t) \approx \dot{y}(t) \begin{cases} \text{Yes, goto 100} \\ \text{No, goto 500} \end{cases} \quad (29)$$

若(29)式成立，則物件與激振板呈黏著狀態，反之則為碰撞狀態。同時，並令此碰撞之時間為  $t_3$ ，如圖七所示之  $x_3$  點。

**狀態四：物件與激振板呈碰撞運動**

當物件與激振板接觸時，若物件之速度與激振板之速度不同，根據動量守恆，假設物件與激振板為彈性碰撞狀態，由碰撞恢復係數  $e$  定義得：

$$e = \frac{\dot{y}(t_3^+) - \dot{x}(t_3^+)}{\dot{x}(t_3) - \dot{y}(t_3)} \quad (30)$$

其中， $t_3^+$  代表碰撞後之瞬間，在前述中已假設激振板質量遠大於物件質量，因此式(30)中：

$$\dot{y}(t_3^+) \approx \dot{y}(t_3) \quad (31)$$

則由式(30)、(31)可得知物件碰撞後之速度為：

$$\dot{x}(t_3^+) = \dot{y}(t_3) - e[\dot{x}(t_3) - \dot{y}(t_3)] \quad (32)$$

得此物件速度亦為物件下一運動狀態之初始速度。

**判斷 E：判斷物件碰撞後是否上飛**

在物件與激振板碰撞後，假使物件碰撞後瞬間速度為正值，則可判定物件呈上飛狀態（狀態二），假使物件碰撞後瞬間速度為負值，則物件呈具有初始速度的自由落體，因此可得判斷式如由式(32)所得到物件碰撞後之瞬間速度。

$$\dot{x}(t_3^+) > 0 \begin{cases} \text{Yes, goto 200} \\ \text{No, goto 600} \end{cases} \quad (33)$$

**狀態五：物件具初始速度呈自由落體運動**

由判斷 E 若得知物件碰撞後向下運動，物件為具有一初始速度之初始狀態如下：

$$x(t_3^+) = y(t_3) \quad (34)$$

$$\dot{x}(t_3^+) = \dot{y}(t_3) - e[\dot{x}(t_3) - \dot{y}(t_3)] \quad (35)$$

$$\ddot{x}(t_3^+) = -g \quad (36)$$

因此可得到具初始速度運動狀態之位移響應、速度響應、與加速度響應為：

$$x(t) = x(t_3^+) + \dot{x}(t_3^+)(t - t_3^+) - \frac{1}{2}g(t - t_3^+)^2 \quad (37)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_3^+) - g(t - t_3^+) \quad (38)$$

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (39)$$

綜合以上敘述，可將物件在垂直運動理論中所有狀態之運動方程式整理如表二，而物件在垂直運動理論中所有狀態之判斷式整理如表一所示。

表一：各狀態物件之位移、速度、加速度響應

	位移響應	速度響應	加速度響應	備註
狀態一	$x(t) = Y \sin \omega t$	$\dot{x}(t) = \omega Y \cos \omega t$	$\ddot{x}(t) = -\omega^2 Y \sin \omega t$	狀態一：物件與激振板呈黏著狀態
狀態二	$x(t) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t-t_1) - \frac{1}{2}g(t-t_1)^2$	$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_1) - g(t-t_1)$	$\ddot{x}(t) = -g$	狀態二：物件呈上飛狀態
狀態三	$x(t) = h + y(t_1) - \frac{1}{2}g(t-t_2)^2$	$\dot{x}(t) = -g(t-t_2)$	$\ddot{x}(t) = -g$	狀態三：物件由靜止狀態呈自由落體 狀態四：物件與激振板呈碰撞運動
狀態四	$x(t_3^+) = y(t_3)$	$\dot{x}(t_3^+) = \dot{y}(t_3) - e[\dot{x}(t_3) - \dot{y}(t_3)]$	$\ddot{x}(t_3^+) = -g$	狀態五：物件具初速度呈自由落體運動
狀態五	$x(t) = x(t_3^+) + \dot{x}(t_3^+)(t-t_3) - \frac{1}{2}g(t-t_3^+)^2$	$\dot{x}(t) = \dot{x}(t_3^+) - g(t-t_3^+)$	$\ddot{x}(t) = -g$	

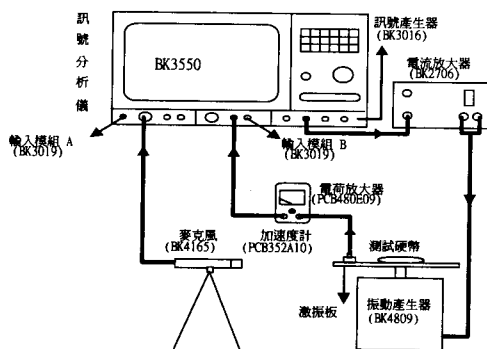
表二：各狀態之判斷式

	說明	判斷式
判斷 A	判斷物件與激板是否分離	$kY \sin \omega t > mg$
判斷 B	判斷物件與激振板否接觸	$x(t) \leq y(t)$
判斷 C	判斷物件上飛時是否達到上死點	$t \geq t_2$
判斷 D	判斷物件與激振板是否黏著	$\dot{x}(t) \approx \dot{y}(t)$
判斷 E	判斷物件碰撞後是否上飛	$\dot{x}(t) > 0$

### 三、實驗分析

#### 3.1 實驗儀器架構

本實驗之儀器架構情形如圖九所示。首先由訊號產生器產生一正弦波訊號，透過導線將此訊號傳送至電流放大器上，放大電流後將此訊號傳送至振動產生器，由振動產生器產生一週期性振動作用在激振板上，使得激振板呈簡諧運動以模擬振動送料臺，硬幣則為模擬物料，至於激振板上。在激振板上並黏貼一加速度計做感應器，量取激振板振動時之加速度響應訊號，經過電荷放大器將訊號傳入訊號分析儀之輸入模組 B，並由訊號分析儀之螢幕顯示。而在激振板附近架設一麥克風，由麥克風量取當硬幣與激振板在碰撞時所產生的聲音訊號，透過導線將訊號傳入訊號分析儀之輸入模組 A，由訊號分析儀之螢幕顯示。本實驗所使用之硬幣規格如表三所示。



圖九：實驗儀器架構

表三：測試硬幣之規格

	直徑(mm)	厚度(mm)	重量(g)
硬幣A	19.720	1.360	3.847
硬幣B	21.600	1.380	4.436
硬幣C	25.500	1.600	7.621
硬幣D	27.800	2.000	9.954

#### 3.2 實驗方法

1. 架設實驗用儀器如圖九所示，先對所有儀器做校對工作，並隔離實驗室中所有音源。
  2. 固定訊號分析儀之輸出頻率大小，由訊號產生器產生正弦波訊號，經由導線輸出至振動產生器，使其產生週期性振動。
  3. 調整電流放大器，使得振動產生器之振動位移量恰可使激振板上之硬幣跳動為止。
  4. 記錄加速度計所量測到之加速度響應，及麥克風所量測到的聲音響應，並記錄存檔。
  5. 將加速度計所量測到的激振板加速度響應換算為位移響應，是為激振板與硬幣分離的臨界位移。每次以五組實驗結果取平均值。
  6. 重複步驟 2 至步驟 6，分別取頻率 11Hz 至 30Hz 做測試。
- 根據以上步驟，對表一之四種硬幣進行實驗。

#### 3.3 實驗結果

根據 3.2 之實驗方法所得之硬幣與激振板分離之最小位移振幅，以振幅為縱軸，激振頻率為橫軸，將各種硬幣之激振頻率與不同硬幣最小位移振幅以曲線表示如圖十所示，圖中分別顯示出不同硬幣在激振頻率為 11Hz 至 30Hz 時，硬幣恰會跳動的最小位移振幅。

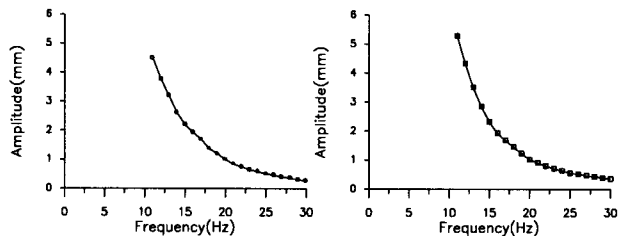
由圖十明顯的看出激振頻率與最小位移振幅成反比。由圖十可知硬幣 A 與硬幣 B 在激振頻率 15Hz 以上時，位移曲線幾乎重合。而硬幣 C 與硬幣 D 之位移在實驗頻率下幾乎相同。四種不同的硬幣在頻率 20Hz 以上時，其位移曲線有重合之趨勢。因此可預測不同硬幣在較高頻率時，使硬幣跳動的最小位移振幅可能相同。

針對四種硬幣在不同頻率作用下跳動時之碰撞聲音訊號與激振板之加速度響應結果以圖十一為例做一說明。圖十一上方所顯示之訊號為麥克風所量測到硬幣與激振板碰撞時之聲音響應，下方所顯示之訊號為加速度計所量測到之激振板加速度響應。由圖上聲音響應可發現有不規則之聲音訊號產生，以此聲音訊號發生位置對應於下方之加速度響應，恰是加速度響應訊號之波峰尖端。由於加速度響應與位移響應之相位角差為 180 度，因此可知實驗時硬幣與激振板之碰撞點發生在位移振幅之波谷處。

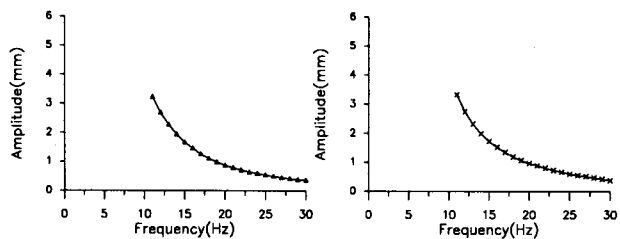
又由圖十一得知，其聲音響應訊號為一長串連續不規則波動，經由觀察得知，此連續波動發生原因可能是：硬幣與激振板分離後向上飛行，然因激振板之速度較硬幣上飛速度為快，硬幣飛離激振板不久旋即被激振板趕上，因而與激振板發生碰撞。然因硬幣與激振板碰撞瞬間二者之速度並不相同，依據 2.2 節之狀態四可知，硬幣與激振板發生碰撞後，以另一速度向上飛行，又碰撞後因硬幣上飛速度仍較激振板速度為小，因此二者再度碰撞。硬幣與激振板在運動中重複此過程，因此產生一長串之不規則聲音訊號。

### 四、數值分析

4.1 節將針對以程式預測之結果進行探討。首先針對理論之數值分析結果作討論，以不同的參數值代入程式中，觀察各種參數值變化對預測結果之影響，並以 3.3 節之實驗結果舉一實例與程式結果作比對。

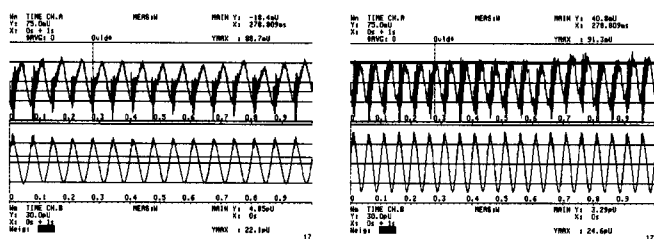


(a) 硬幣 A 之最小起跳振幅 (b) 硬幣 B 之最小起跳振幅

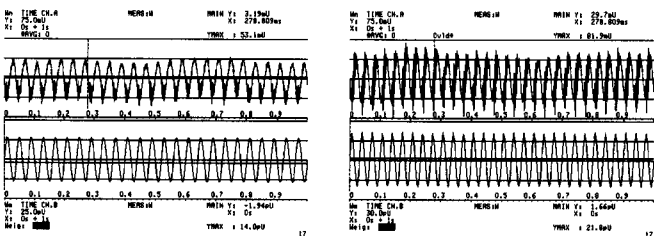


(c) 硬幣 C 之最小起跳振幅 (d) 硬幣 D 之最小起跳振幅

圖十：四種硬幣之頻率一起跳振幅關係圖



(a) 頻率 15Hz 時硬幣跳動情形 (b) 頻率 20Hz 時硬幣跳動情形



(c) 頻率 20Hz 時硬幣跳動情形 (d) 頻率 25Hz 時硬幣跳動情形

圖十一：硬幣 A 在不同頻率下之跳動情形

4.2 節是碰撞係數之驗證，由 2.2 理論分析得知碰撞係數對碰撞後之物件速度有所影響，然因目前尚未得知硬幣與激振板間的碰撞係數大小。但由於已知硬幣與激振板在特定頻率下之激振運動狀態，因此以不同的碰撞係數值代入程式中模擬硬幣與激振板之運動狀態，以模擬結果與實驗結果作比對，在其他參數設定均相同下，選擇運動狀態與實驗結果相符合者，則此時輸入之碰撞係數值即為硬幣與激振板之碰撞係數。

在 4.3 節以 4.2 節所得之碰撞係數以數值方式做預測，並以數值分析軟體 MATLAB 繪出頻率、激振振幅之二維關係圖，及頻率、激振振幅與硬幣和激振板相對位移之三維關係圖，將其所繪出之二維關係圖與實驗所得之關係圖做比對。

#### 4.1 理論之數值分析結果

為探討理論分析所架構之程式流程是否有不合理的假設或預測上的錯誤，以不同的參數值為變數，並探討此程式的適應性與可行性。由 2.2 節可知，當進行程式預測硬幣在垂直運動模式中，影響運動模式的參數包括有：馬達轉速（頻率）、最小位移振幅、硬幣重量、彈簧勁度、硬幣與激振板之碰撞係數。以下則根據模擬硬幣 A 於馬達轉速 900rpm 時之運動情形來作說明，並針對不同轉速、不同位移振幅、不同重量、不同彈簧勁度、不同碰撞係數進行程式的適應性分析。

於此將不同參數對於硬幣於激振運動狀態下所得之模擬結果，以硬幣於激振運動狀態下之絕對位移劃分為黏著 I、微小跳動 II、小跳動 III、及大跳動 IV 等四個狀態於表四列示出來，並標註可產生碰撞現象之臨界點，如此將可明瞭各參數對硬幣位移之影響，並於分別討論其影響狀況如下：

#### 馬達轉速之影響

分析中於輸入馬達轉速 720rpm(圖十二(c))做模擬時，硬幣將與激振板分離，然而在硬幣落下與激振板接觸時並無明顯的跳躍現象，經思考可能是因為硬幣落下時之速度應與激振板之運動速度差異不大，因此在與激振板接觸後旋即黏著於激振板上。而於馬達轉速 840rpm 時(圖十二(e))，於波谷有極小之碰撞現象。馬達轉速為 900rpm(圖十二(f))時則有較明顯不規則之跳動產生。馬達轉速於 1200rpm(圖十二(i))至 1800rpm(圖十二(k))時硬幣有約 10mm 的跳躍高度，而馬達轉速達 3600rpm 時(圖十二(l))，硬幣跳躍高度則高達 35mm。由分析得知馬達轉速為 720rpm(圖十二(c))時為硬幣脫離激振板之臨界點，而於 840rpm(圖十二(e))時會開始有碰撞現象產生。由此可知馬達轉速對硬幣之位移高度影響相當大，並與硬幣位移呈正比。

#### 位移振幅之影響

由表四得知於輸入位移振幅於 1mm 以下做模擬時，硬幣與激振板仍呈黏著狀態，而以位移振幅為 1mm~2.2mm 輸入時，硬幣與激振板分離而向上飛行，但並無碰撞現象產生。而當輸入位移振幅為 2.2mm 時，硬幣於波谷有較小之碰撞現象，與實驗中之碰撞臨界點 2.216mm 極為接近。而在輸入位移振幅為 2.3mm~2.4mm 時，硬幣開始有不規則跳動產生，最後當輸入位移振幅大於 2.5mm 之後，其跳躍高度已大於 8mm。由此可得知位移振幅與硬幣分離高度呈正比。

#### 重量之影響

為探討硬幣重量對於運動狀態之影響，以不同之重量參數代入程式中作分析，觀察硬幣之重量大小是否在程式之可執行範圍內，並瞭解重量過重時，程式是否有仍可執行之不合理現象。由於使用硬幣重量為 3g 至 10g 之間(表三)，分析中以硬幣重量為 0.5g 做模擬開始遞增，由表四結果發現以硬幣重量參數為 2kg 以下時均可以起跳，然以 2.5kg 做模擬時雖仍有起跳分離之現象，但跳躍高度已經減少，至設定硬幣重量達 3kg 時，硬幣已無分離現象。因此可得知硬幣重量上限為 3kg。且跳動高度與硬幣重量成反比。

#### 彈簧勁度之影響

實驗中所使用之激振器彈簧勁度為 12N/mm，為瞭解彈簧勁度對運動狀態之影響，仍以不同的彈簧勁度值輸入程式中，觀察其變化情形。根據 2.2 節之理論分析，發現彈簧勁度僅在於判斷硬幣與激振板是否分離時有影響(式 10)。由表四所示分析結果可知，彈簧勁度小於 0.018N/mm 時，硬幣並無分離之現象，而彈簧勁度為 0.018 時，硬幣開始有分離現象產生，而彈簧勁度大於 0.03 之後，硬幣之運動狀態均為大跳動，因此與理論分析中所得之結果相吻合。

#### 碰撞係數之影響

理論分析中得知硬幣與激振板接觸後，若產生碰撞現象，其二者之間的碰撞係數將影響下一階段之運動狀態。由表四可知以碰撞係數值 0.1 至 1 作分析時，發現碰撞係數小於 0.3 之運動均為分離後旋即黏著的狀態，而碰撞係數為 0.4 時，開始有明顯的不規則跳動，隨著碰撞係數增加，硬幣跳躍高度也逐漸增加。因此可判定碰撞係數與硬幣位移呈正比。

#### 數值預測與實驗結果之比對

根據以上各項參數之測試結果，發現數值預測結果與實驗觀察之現象相當接近。在此並以圖十三所顯示之實驗結果與理論預

測結果作比較說明。

圖十三(a)為訊號分析儀所擷取之訊號，其中圖十三(a)上半部為硬幣與激振板碰撞時，麥克風所擷取到之聲音訊號，而下半部則為加速度計所量測到之激振板加速度。而圖十三(b)則為數值模擬所得之運動狀態。實驗與數值之相關參數為：馬達轉速 900r.p.m.，激振位移 2.216mm，硬幣重量 3.847 公克，彈簧勁度 12N/mm，而實驗中無法得到碰撞係數值。但因實驗所得為最小激振位移之碰撞聲音訊號，因此在以不同的碰撞係數代入數值中觀察實驗與數值模擬結果得知，當輸入碰撞係數為 0.31 時，數值所模擬之碰撞點與實驗所量測得到之碰撞點位置相同，即硬幣起跳後，落點均在波之波谷處。爾後硬幣碰撞後以一速度向上飛行，因硬幣飛行速度較激振板運動速度惟慢，因此在飛行一小段距離後旋即被激振板趕上，再次產生接觸。又因接觸時二者速度不同，使得二者再次產生碰撞。因連續的碰撞產生，所以在觀察噪音訊號時，會發現於激振板向上運動時，有連續不規則的噪音訊號產生。依此比對圖十三(b)，亦可發現硬幣落點亦在波動之波谷處，且於激振板向上運動時，二者亦有再次接觸情形發生。於此可看出輸入碰撞係數為 0.31 時，數值預測結果與實驗結果相當吻合。亦發現由此方法應可得到較正確之碰撞係數值。

此外並將其數值預測結果與硬幣 A 之實驗結果作一比較，發現結果相當吻合，顯示此數值有相當之適應性與可行性。而表五所示為不同硬幣在不同的激振頻率下之碰撞係數值。

表四：參數變化對硬幣絕對位移之影響

變化因素	狀態 I	狀態 II	狀態 III	狀態 IV
馬達轉速	<660	720-840	900-1200	>1200
激振位移	<1	1-2.2	2.2-2.4	>2.5
硬幣重量	>3	2.5-3	0.5-2.5	無
彈簧勁度	<0.018	0.018-0.02	0.02-0.03	>0.03
碰撞係數	無	0-0.3	0.3-0.35	>0.36

備註	狀態說明
	I：硬幣與激振板黏著 II：硬幣具規則碰撞點之微小跳動 III：硬幣具不規則碰撞點之微小跳動 IV：硬幣產生大跳動
	固定參數數值
	碰撞係數：0.31
	激振振幅：2.216mm
	馬達轉速：900rpm
	硬幣質量：0.003847kg
	彈簧勁度：12N/mm

圖十三 (a) 為訊號分析儀所擷取之訊號，其中頻道 A 顯示為硬幣與激振板碰撞時，麥克風所擷取到之聲音訊號，而頻道 B 則為加速度計所量測到之激振板加速度訊號。由頻道 A 可發現碰撞點發生在頻道 A 顯示聲音訊號之波谷處，向下對比則發現碰撞點發生在頻道 B 波峰處，因為激振板加速度與位移有 180 度之相位差，因此可判斷碰撞點應是發生於激振板之波谷處。於預測分析中設定碰撞係數為 0.3 時，其接觸點亦產生於波谷處，但硬幣飛行後，與激振板接觸後旋即黏著，為表四所示之狀態 II，及狀態 III 之臨界點。而實驗中之狀態則是硬幣剛起跳之狀態，因此於碰撞係數驗證中判斷硬幣 A 之碰撞係數為 0.31。

#### 4.2 不同硬幣碰撞係數之測定結果

於 4.1 節中曾根據比對理論分析與實驗分析之碰撞點位置來判斷碰撞係數大小，因此在不同硬幣碰撞係數之預測中，以此方式求得四種硬幣之碰撞係數。根據上述方法，以不同碰撞係數對四種硬幣運動狀態之影響做預測，取得在不同的頻率下四種硬幣之碰撞係數。結果如表五所示。根據表五之碰撞數值以回歸分析方式求得其碰撞係數方程式如下：

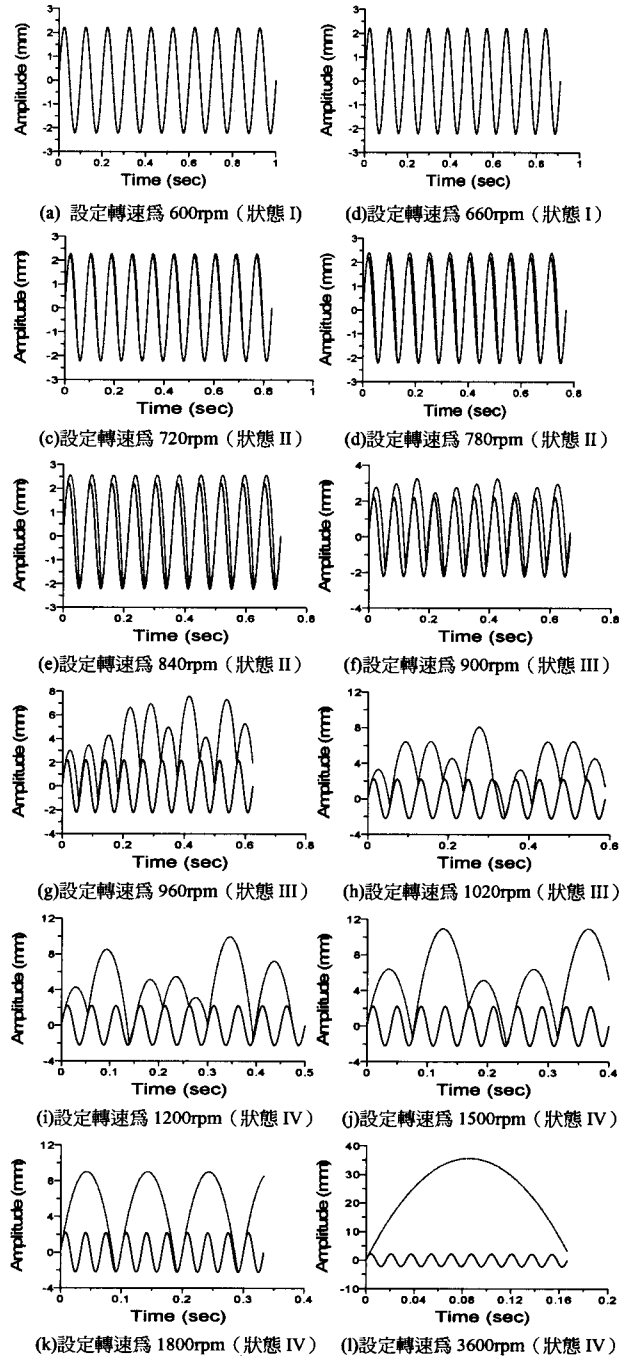
$$\text{硬幣 A: } e_A(f) = 0.038887f + 0.108684 \quad (40)$$

$$\text{硬幣 B: } e_B(f) = 0.0341203f - 0.270466 \quad (41)$$

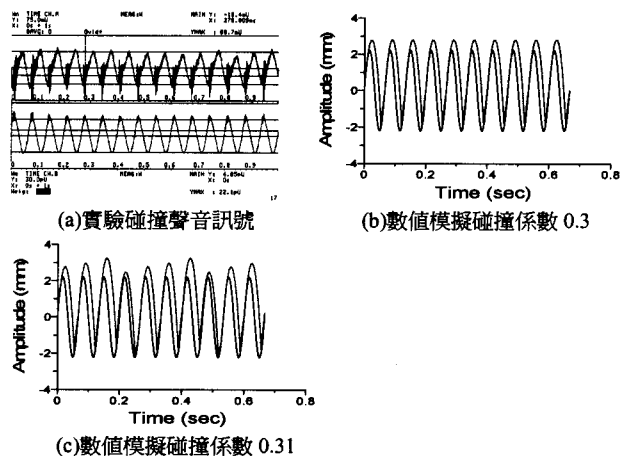
$$\text{硬幣 C: } e_C(f) = 0.0345338f - 0.270444 \quad (42)$$

$$\text{硬幣 D: } e_D(f) = 0.0050602f + 0.435767 \quad (43)$$

圖十四為表五之實驗值與回歸分析所得到碰撞係數之線性曲線。



圖十二：以馬達轉速為測試變數



圖十三：決定碰撞係數數值模擬與實驗結果比對

表五：數值模擬所得四種硬幣之碰撞係數

頻率(Hz)	硬幣A	硬幣B	硬幣C	硬幣D
11	0.21	0.09	0.16	0.48
12	0.21	0.10	0.19	0.49
13	0.22	0.14	0.20	0.53
14	0.28	0.18	0.23	0.53
15	0.31	0.25	0.22	0.51
16	0.31	0.3	0.24	0.53
17	0.31	0.33	0.27	0.53
18	0.31	0.31	0.33	0.53
19	0.43	0.38	0.34	0.53
20	0.52	0.46	0.43	0.53
21	0.55	0.51	0.43	0.51
22	0.62	0.5	0.45	0.53
23	0.64	0.55	0.46	0.54
24	0.67	0.56	0.54	0.53
25	0.71	0.63	0.69	0.55
26	0.73	0.63	0.69	0.57
27	0.78	0.63	0.7	0.57
28	0.82	0.65	0.75	0.56
29	0.85	0.65	0.71	0.61
30	0.86	0.73	0.72	0.63
平均值	0.517	0.429	0.4375	0.5395
R-squared	0.9739	0.9856	0.9586	0.7789
標準差	0.2333	0.2048	0.2093	0.0356

### 4.3 不同硬幣之運動特性分析

在 4.1 節中，假定影響送料率的因素包括有馬達轉速、位移振幅、物件重量、彈簧勁度、以及碰撞係數。經過數值特性分析後(表 3-6)，得知彈簧勁度在 0.018~0.03 時對硬幣的絕對位移有影響，但根據表三得知振動產生器之彈簧勁度為 12N/mm，因此在此假設彈簧勁度並不影響送料率。

由於測試硬幣重量均在 3g 至 10g 之間，根據表四得知，當輸入硬幣重量小於 500g 時，其跳動狀態均為大跳動。且由於測試硬幣各有不同的碰撞係數值，因此亦判斷本實驗中，測試硬幣對送料率影響並不大。由此歸納得知，影響送料率較大之因素包括有馬達轉速、位移振幅、及碰撞係數三者。而在實驗中，馬達轉速與頻率成一因對關係，位移振幅對比於激振振幅，而由上述亦可得知碰撞係數為一函數。

為了更進一步瞭解頻率、激振振幅、與送料率之間關係，以頻率、激振振幅為座標軸，並以不同硬幣的碰撞係數代入數值中，預測物料與激振板之相對位移最大值，並以 3-D 關係圖表示如圖十五所示。由關係圖上之頻率—激振振幅平面上可觀察激振頻率與最小激振振幅之關係。由於預測結果可知四種硬幣之最小激振頻率—激振振幅曲線性質均相似，於此僅以硬幣 A 之實驗結果與預測結果比較討論之。

首先由圖十五上之 0Hz~10Hz 上觀察。由圖十五(a)、圖十五(b)得知硬幣 A 於實驗中之激振頻率為 11Hz 時，起跳振幅為 4.505mm，與模擬中之起跳頻率與振幅相符合，但於頻率為 20Hz 時，實驗所得之振幅為 1.012mm，而於預測中之最小激振振幅約為 2mm。在激振頻率為 30Hz 時，實驗所得到之最小激振振幅為 0.268mm，而在預測中則約為 1.5mm。

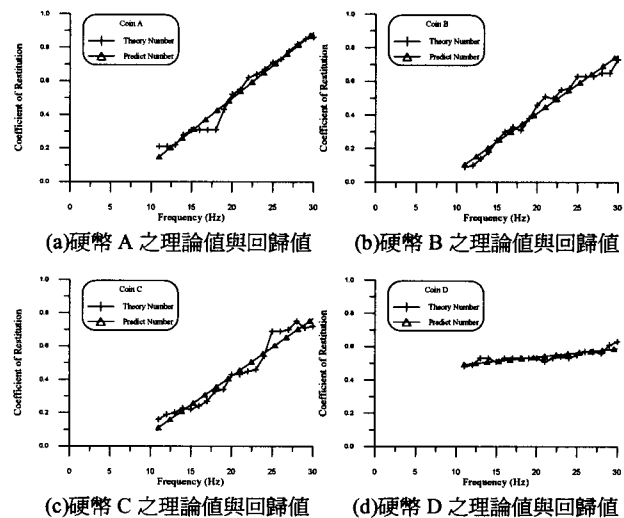
由此可知在頻率較低時，預測所得之激振振幅較實驗所得之激振振幅為小。隨著頻率之增加，激振振幅逐漸縮小而與激振頻率成反比。而於頻率較高時，預測所得之激振振幅卻較實驗所得之激振振幅大，而其中之變異點約在頻率 12Hz~16Hz 之間。

而由表四得知，數值預測與實驗結果比較相差極小，顯示出所撰寫之數值有一定之可靠度，但在碰撞係數曲線最佳化後，預測之最小激振頻率—振幅關係結果卻與實驗結果不同，經討論結果歸納出可能造成差異性之幾點因素：

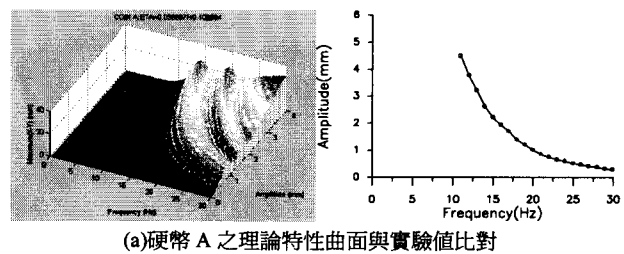
1. 實驗時雖然已隔絕實驗室之所有音源，然仍不可避免其他音源存在，而影響實驗結果。
2. 於實驗中，雖將振動產生器與激振板放置於地面上，藉此以避免放置於桌上產生的結構共振現象而影響實驗結果，然仍無法避免振動產生器本身組成結構與其他結構可能產生之共振現象。
3. 由於激振板與振動產生器間以一螺絲固定，於實驗激振時可能產生螺絲鬆動而產生其他噪音，因而影響麥克風訊號之擷取。
4. 由於激振板為壓克力材質，本身並非剛體，於激振時可能會產生極大的彈性撓曲現象而對實驗有所影響。

5. 於理論分析中，已假設送料物件為一質點，然而實驗中所使用之硬幣為一圓形薄片，因此於碰撞時可能與激振板產生線性接觸，而非假設中之點接觸情形。而於實驗中，硬幣亦非均以質心與激振板接觸，因此所擷取到之聲音響應可能有所偏差。

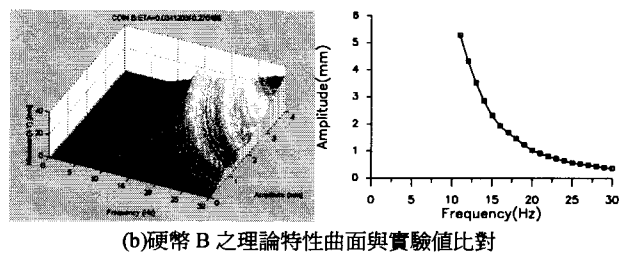
6. 於實驗中以人為方式調整最小激振振幅，而在碰撞係數選定中亦以人為方式選取。雖在選取碰撞係數時考慮到因微小跳動與小跳動間差異不易區隔，於數值模擬中亦改以小跳動與大跳動間做為區隔，但仍不能避免人為上的疏失。



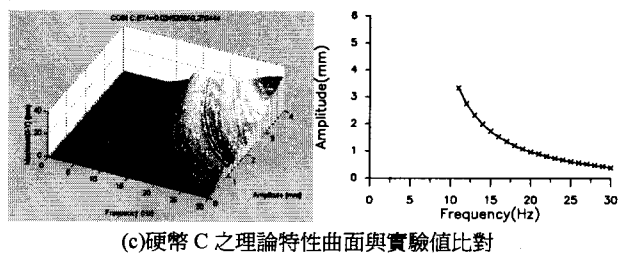
圖十四：激振頻率與硬幣碰撞係數關係



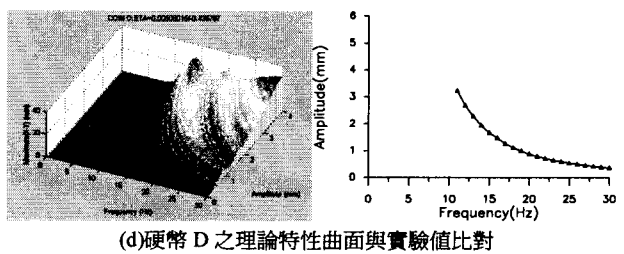
(a)硬幣 A 之理論特性曲面與實驗值比對



(b)硬幣 B 之理論特性曲面與實驗值比對



(c)硬幣 C 之理論特性曲面與實驗值比對



(d)硬幣 D 之理論特性曲面與實驗值比對

圖十五：硬幣之理論預測值與實驗值比較結果

### 五、結論與建議

1. 於理論分析部分導出物料於垂直運動時之所有運動狀態方程式，且經由數值模擬後整理得到影響送料率之因素包括有：振動送料平臺之馬達轉速、振動振幅、彈簧勁度、送料物件重量、及送料物件與振動送料平臺篩面之碰撞係數等五項，其中又以馬達轉速、振動振幅及碰撞係數影響較大，且馬達轉速與送料率成正比，此點並經由振動送料系統性能測試中得到驗證。
2. 理論分析部分中架構出物料的垂直運動模式，包括黏著、分離、上飛、落下、接觸、碰撞、具初始速度上飛等六個運動狀態，且經由數值模擬與理論分析實驗所得之結果比對下，發現此模式架構相當正確。
3. 本文中已預測出於垂直運動模式中，影響送料率之幾項相關因素。但此模式並未能完整架構出整個振動送料平臺之送料情形，於進一步研究中可考慮水平方向運動模式，及圓盤式振動送料平臺可能產生之扭轉運動模式，並將各種運動模式加以結合，進而推導出完整之振動送料數學模式。
4. 於本文理論分析中發現，物件與振動機之分離條件與彈簧勁度相關，但彈簧勁度大於某一臨界值後，對物件則無其他之影響，未來於考慮振動送料平臺之設計時，可依此條件做為最佳化設計上之考慮，選擇恰當之彈簧或彈片。
5. 於理論分析中發現，物件送料率與物件本身和振動機篩面之碰撞係數大小成正比，但本身勁度較小之物料如葉片者，與振動機篩面間之碰撞係數並不大。基於此類材料之振動送料平臺設計時，可考慮增加送料平臺之振幅或篩面材料之摩擦係數，使得物件飛行高度增加，進而與送料平臺篩面接觸時有相當之速度而產生較佳之碰撞係數。

### 六、參考文獻

1. Boothroyd, G., Poil, C., Murch, L.E., *Automatic Assembly*, McGraw-Hill, 1982.
2. Inoue, J., Miyaura, S., and Nishiyama, A., 1968, "On the Vibrotransportation and Vibroseparation (Part 1, On the Stability for the Periodic Motion of the Jumping Granular Solid)," *Bulletin of JSME*, Vol. 11, No. 43, pp. 102-106.
3. Gaberson, H. A., 1972, "Particle Motion on Oscillating Conveyors Part 1. The Equations of Motion and the Rules for Predicting Motion Form Transitions," *ASME Journal*, Vol. 94, No. 1, pp.50-56.
4. Gaberson, H. A., 1972, "Particle Motion on Oscillating Conveyors Part 2. Practical Solutions to the Equations of Motion and the Extension of the Theory to beds of Granular Material," *ASME Journal*, Vol. 94, No. 1, pp. 57-63.
5. Berry, P. E., 1958, "Research on Oscillating Conveyors," *Journal of Agriculture Engineers*, Vol. 4, No. 3, pp204-213.
6. 鄭文騰, 1987, *振動送料器送料率：解析和實驗的研究*，碩士論文，國立台灣大學應用力學研究所。
7. Schertz, C. E., and Hazen, T. E., 1965, "Movment of Shelled Corn on an Oscillating Conveyor," *Transactions of the ASME*, Vol. 8, No. 4, pp. 582-583.
8. 江崎春雄, 1970, *收穫和收穫機*，農業圖書株式會社。
9. Feller, R. and Foux, A., 1975, "Oscillating Screen Motion Effect on the Particle Passage Through Perforation," *Transactions of the ASAE*, Vol. 18, No. 5, pp.926-931.
10. 岩尾俊男, 1972, *振動篩上粒子的運動與分離性能關係之研究*，博士論文，日本島根大學農業機械研究所。
11. Kanafojski, C., Karwowski, T., 1976, "Agricultural Machines Theory and Construction," *U.S. Department Agriculture and National Science Found.* Vol. 2, pp. 300-379

### Vertical Motion Analysis of Transported Materials on Vibratory Conveyor

Bor-Tsuen Wang, Ching-Chen Hsieh, An-Ting Shiue  
Department of Mechanical Engineering  
National Pingtung University of Science and Technology

#### Abstract

This work discusses the factors affecting the feed rate of materials in vibratory conveying. The theoretical analysis is first studied to predict the vertical motion of transported materials. The states of vertical motion of the transported materials are characterized as sticking, separation, upward, contact, impact and free-fall. Through the numerical simulation, several factors, including motor speed, excitation displacement amplitude, mass of transported material, spring constant and resilient coefficient, are discussed to show their effects on the motion of transported materials. For about the same mass of the transported materials, the motor speed, excitation displacement amplitude and resilient coefficient will significantly affect the vertical movement of transported material, while the spring constant has little effect. Experiments are also carried to verify the numerical simulation results and to determine the resilient coefficient between the transported material and conveyer. The vertical movement of transported materials on vibratory conveyer is well predicted and verified. This work leads to the design of vibratory conveying machinery.