

## 摘要

本文利用有限元素分析軟體(ANSYS)分析一受均佈內壓無限長圓管，當圓管承受一均佈壓力時，考慮圓管為無限長，取一段管長來進行分析，分別採用平面元素、殼元素及立體元素架構不同的有限元素模型，進行結構靜力分析。在平面元素模型中，分別討論軸對稱和平面應力、平面應變之間的差異，此外以最為接近實際狀況的立體元素模型做為靜力分析結果的參考值，探討平面元素架構的軸對稱、平面應力、平面應變及殼元素等各種有限元素模型間的差異性，並且探討上述模型對厚管及薄管之適應性。結果得知平面元素所架構的平面應力或平面應變模型最為接近參考值，其次為軸對稱。而在求解的時間及架構模型的速度而言，以立體元素最為煩雜，其次是殼元素，最為方便快捷的為平面元素模型。而殼元素比較適合在薄管之靜力分析，並不適合分析厚管。本文提供了圓管結構之不同有限元素模型架構方法，並分別探討各種模型之優缺點，未來在選擇元素時，應綜合考慮各種模型之正確性、合理性及分析速度。

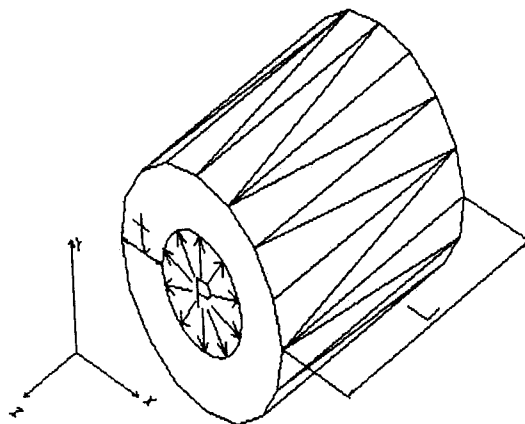
## 一、前言

在工廠中，許多地方需要用到高壓圓管，如自來水廠、油壓管等，當圓管內部承受高壓液體會使管子造成彎曲變形或應力破壞，長期間圓管會因為內部長期之變動壓力存在而造成疲勞破壞。本文藉由有限元素軟體分析[1],[2]受高壓圓管所承受的應力分佈狀態，並且比較在不同有限元素模型對分

析圓管的適應性，並探討殼元素、平面應力及平面應變在厚管及薄管應力準確性和合理性。

## 二、問題定義

假設一無限長的圓管內徑  $R$ ，管壁厚  $t$ ，當內部承受一壓力  $P$  時截取一管長  $L$  做靜力分析，如圖一所示，假設管子為材質均勻之鋼管，只有內部承受壓力並無其他外力作用或支撐，依照圓管的實際受力情形，分別利用縱剖及橫剖面架構軸對稱 (A1 model、A2 model)、平面應力、平面應變(B1 model、B2 model)、殼元素(C1 model、C2 model)和立體元素(D1 model、D2 model)八種不同有限元素模型。

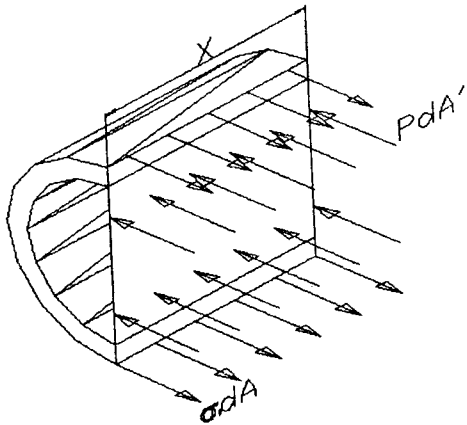


圖一 受均佈內壓無限長圓管

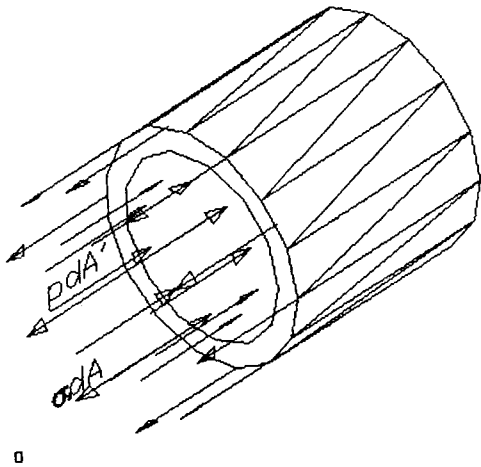
取圓形截面的管子，分別用縱剖與橫剖種不同的方式在相同情況下，分別找出最大應力，並比較在有限元素模型不同的情形，兩種不同剖面之應力是否相同，而縱剖時候若截取的管長不同與橫剖的關係又是如何，利用有限元素軟體找出其中關係。

### 三、理論分析

一圓管內部有壓力時，當壁厚  $t$  與筒之平均半徑  $R$  相比甚小時，即  $t < R/10$  時此薄壁圓筒承受均勻之內壓力，會在管壁產生兩方向之正交應力，一為縱向截面上之應力  $\sigma_x$  與圓周相切稱為周向應力，另一為橫截面上之應力  $\sigma_z$  與圓筒中心軸平行稱為縱向應力 如圖二(a)及(b)所示。



(a) 周向應力



(b) 縱向應力

圖二 圓管剖面應力

周向應力如圖二(a)所示取圓筒之縱斷面，並截取一單位長度  $L$  之分離體圖，由平衡方程式 可得下面方程式

$$P \times L \times 2R = 2 \times t \times L \times \sigma_{x,avg} \quad (1)$$

$$\sigma_{x,avg} = \frac{PR}{t} \quad (2)$$

其中， $\sigma_{x,avg}$  : 平均周向應力  
 $P$  : 圓管之內壓  
 $R$  : 內圓半徑  
 $t$  : 管壁厚度

縱向應力如圖二(b)所示取圓筒之橫斷面，並取橫斷面之分離體圖，則由平衡方程式可得

$$\sigma(2 \pi R \times t) = P(\pi R^2) \quad (3)$$

$$\sigma_{z,avg} = \frac{PR}{2t} \quad (4)$$

其中， $\sigma_{z,avg}$  : 平均縱向應力

### 四、有限元素模型

依據實際位移限制及負荷條件，可對受高壓無限長圓管架構四種有限元素示意圖，並依不同位移限制架構另一對照有限元素模型。

#### (A) 軸對稱有限元素模型

取圓管軸對稱剖面架構平面元素 (PLANE 42) 之軸對稱有限元素模型，如圖三(a)及(b)，其中 A1 model 上方壓力  $p_1$  計算如下

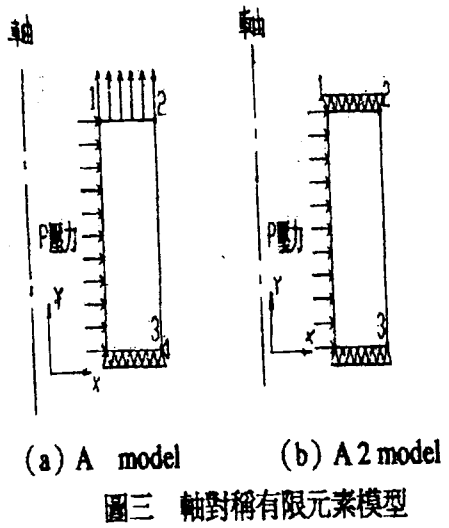
$$P_1 = \frac{\text{管子內壓} \times \text{內徑的面積}}{\text{外徑面積} - \text{內徑面積}} \quad (5)$$

$$P_1 = \frac{P \times \pi R^2}{\pi [(R+t)^2 - R^2]} \quad (6)$$

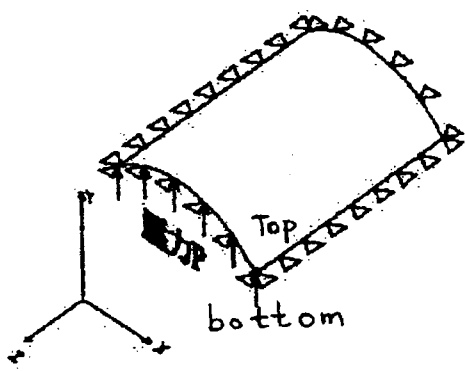
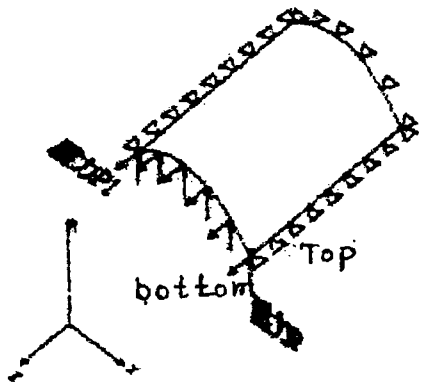
假設無限長圓管，有一拉伸張力作用於管壁，又於圖三(a)在下角限定底部的  $y$  方向位移，同時在底端 (位置 3) 限制  $x$  方向位移，以避免剛體運動 (ridge body motion)。

A2 model 是圓管內部受壓力另一種有限元素模型表示，是假設圓管為軸像完全對

稱，圓管兩端皆限住 Y 方向位移，其他與 A1 model 並無差異，圖形表示如圖三 (b) 所示。



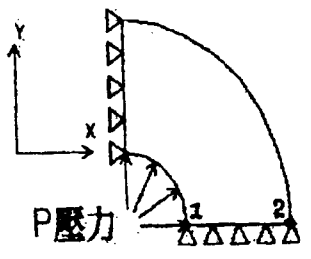
性面為主要模型結構，取一管長  $L$ ， $90^\circ$  夾角之圓管如圖五。C1 model 圖五(a)，在軸向及兩對稱邊皆有位移限制，管內壁有一均佈內壓  $P$ ，管的另一軸向對照 A1 model，有一均佈壓力  $P_1$ 。C2 model 如圖五(b)所示，對應 A2 model 之位移條件所做的殼元素模型。



圖五 殼元素有限元素模型

(B) 平面應力及平面應變有限元素模型

圓管為無限長，故取圓管之橫斷面，可採用平面元素(PLANE 42)，分別設為平面應力(B1 model)及平面應變(B2 model)，其模型示意圖，如圖四，係取模型的四分之一做為分析，對模型兩對稱面分別限定位移限制，同時在圓的內壁施加壓力  $P$  的壓力，最後對模型進行分割，取圓管內外側 1 點、2 點作為分析。



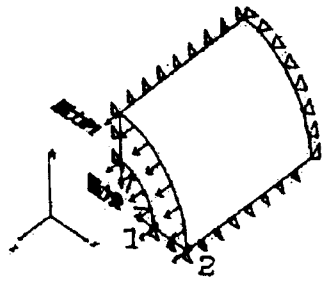
圖四 平面元素有限元素模型：  
B1 model (平面應力)及 B2 model (平面應變)

(C) 殼元素有限元素模型

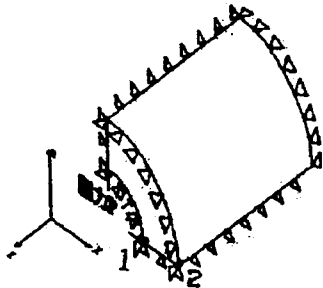
薄殼元素(shell 63)元素是以殼結構之中

(D) 立體元素有限元素模型

任何結構皆可用立體元素(SOLID 45)進行分析，而且立體元素與實際狀況最接近，分別限定管長兩對稱邊位移限制，並依照 C1 及 C2 model 分別在 D1 model 圓周上加一負荷  $P_1$ ，D2 model 圓周兩端限定位移限制，如圖六(a)及(b)所示。



(a) D1 model



(b) D2 model

圖六 立體元素有限元素模型

表一 A1 model 軸對稱之應力分析結 (N/m<sup>2</sup>)

位置	管長m	Sx	Sy	Sz	S1	Seqv
1	20	1005.1	854.	2701	2730	3015
1	30	1006.8	857.	2935	2726	3017
1	40	1005.2	855.	2793	2725	3017
1	50	1001.5	854.	2667	2725	3025
2	20	6.46	755.	1649	1667	2198
2	30	9.28	774.	1709	1665	2196
2	40	8.49	774.	1705	1664	2197
2	50	7.58	774.	1630	1660	2195

表二 A2 model 軸對稱之應力分析結 (N/m<sup>2</sup>)

位置	管長m	Sx	Sy	Sz	Sxy	S1	Seqv
1	20	983.91	-678.	1883	93.8	1973	2804
1	30	993.52	-179.	2490	111.	1805	2801
1	40	994.43	208.	2651	117.	1801	2801
1	50	993.1	380.	2640	115.	1815	2802
2	20	-7.84	930.	1548	60.0	1590	1392
2	30	2.582	702.	1745	60.7	1589	1392
2	40	3.92	462.	1695	58.	1591	1393
2	50	2.921	373.	1626	56.3	1595	1396

表二為 B1 及 B2 model 之應力分析結果，位置 1、2 之應力值，如圖四所示，S<sub>x</sub> 為徑向應力，S<sub>y</sub> 為周向應力，S1 為主應力，Seqv 為麥西斯應力，圖八(a)、(b)為典型之 Seqv 應力分佈圖。位置 1、2 平均所得 S<sub>y</sub> 比對應之 S<sub>x,avg</sub> 應力值多 50~100 N/m<sup>2</sup> 左右。

表三 B model 平面應力及平面應變 (N/m<sup>2</sup>)

位置		Sx	Sy	Sz	Sxy	S1	Seqv
1	stress	829.	2632		113.	2639.	3140.
1	strain	829.	2656	548.	114.	2659.8	3046.
2	stress	-54.4	1578		-53.5	1579.8	1608.
2	strain	-54.4	1570	454.	-53.3	1572.1	1442

C1 及 C2 model 在位置 1(bottom)·2(top) 所得之 S<sub>x</sub> 為徑向應力，S<sub>y</sub> 為周向應力，S<sub>z</sub> 為縱向應力（軸應力），S1 為最大主應力，

## 五、結果與討論

圓管假設均為質鋼管，內徑 R=20 m 管壁厚 t=10 m 均佈內壓 P=1000 (N/m<sup>2</sup>)，則

$$\sigma_{x,avg} = 2000 (N/m^2), \sigma_{z,avg} = 1000 (N/m^2),$$

$$p_1 = 800 (N/m^2), \text{ 浦松比 } \gamma = 0.3,$$

$$\text{鋼材陽氏係數 } E = 207 \times 10^9 (N/m^2)$$

### 1. 各模型分析之結

表一、表二分別為 A1 及 A2 model 之應力分析結果，S<sub>x</sub> 為徑向應力 S<sub>y</sub> 為縱向應力（軸應力），S<sub>z</sub> 為周向應力，利用軟體分析位置 1、2 如圖三所示，其中 S1 為最大主應力，Seqv 為麥西斯應力，如圖七(a)及(b)所示，分別為 A1 和 A2 model 之 Seqv 應力分佈圖，比較表一、表二，位置 1、2 之應力做一簡單平均後 S<sub>y</sub> 比所對應 S<sub>z,avg</sub> 之應力值減少 200~300 N/m<sup>2</sup>，S<sub>z</sub> 所對應 S<sub>x,avg</sub> 應力值高約 100~200 N/m<sup>2</sup> 左右。

Seqv 為麥西斯應力，分別為表四、表五及圖五，C1 及 C2 model 之 Seqv 應力分佈圖，如圖九(a)、(b)所示。

表四 C1 model 之應力分析結果

位置	管長	Sx	Sy	Sz	S1	Seqv
Top 2	20	-3.85	2495	80	80	2539
Top 2	30	-4.78	3096	417.8	430.	3349
Top 2	40	-6.87	4454.	288.8	299.	4628
Top 2	50	-3.88	2514.	196.2	290.	2306
Bottom 1	20	1003	2495.	80	80	2242
Bottom 1	30	1001	2125.	426.8	426.	1499
Bottom 1	40	1001	1659	427	424.	1073
Bottom 1	50	999.	703.3	2005.	2026	2898

表五 C2 model 之應力分析結果

位置	管長 m	Sx	Sy	Sz	S1	SEQV
Top 2	20	-3.85	2494	749.	2498	2220
Top 2	30	-3.85	2494	749	2499	2220
Top 2	40	-3.84	2493	748	2496	2219
Top 2	50	-3.85	2494	749.	2490	2220
Bottom 1	20	994.	2492	749	2498	3029
Bottom 1	30	1002	2494	750	2495	3030
Bottom 1	40	-994.	2486	748.	2490	3022
Bottom 1	50	1002	2495	749	2489	3019

表六、表七在位置 1、2 點如圖六利用軟體分析分別得到 D1 及 D2 model 應力值 Sx 為徑向應力，Sy 為周向應力，Sz 為縱向應力（軸應力）S1 為最大主應力，Seqv 為麥西斯應力，圖十是 Seqv 之應力分佈圖。

表六 D1 model 之應力分析結果

位置	管長	Sx	Sy	Sz	S1	Seqv
1	20	-8.22	2641	-736	2644	3439.8
1	30	-8.22	2641	-736	2644	3439.8
1	40	-8.22	2641	-736.2	2644	3439.8
1	50	-8.22	2641	-736.2	2644	3439.8
2	20	-56.54	1569	-813.	1571	2111.2
2	30	-56.54	1569	-813	1571	2111.
2	40	-56.54	1569	-813.9	1571	2111.2
2	50	-56.54	1569	-813.9	1571	2111.2

表七 D2 model 不同管長之應力

位置	管長m	Sx	Sy	Sz	S1	Seqv
1	20	817.	2656	548.	2659.8	3046.7
1	30	817.	2656	548.	2659.8	3046.7
1	40	817.	2656	548.	2659.8	3046.7
1	50	817.	2656	548.	2659.8	3046.7
2	20	-54.4	1570	454.	1572.1	1442.3
2	30	-54.4	1570	454.	1572.1	1442.3
2	40	-54.4	1570	454.	1572.1	1442.3
2	50	-54.4	1570	454.	1572.1	1442.3

## 2、不同管壁厚分析結果

Plane 42 所架構的 B1 model 及 B2 model 和 Shell 63 所架構的 C1 model 及 C2 model 在不同管厚時，管厚和平均半徑的比值在 0.1 時會有明顯的應力值變化，如表八和表九分別為平面應力及平面應變在不同管厚時的應力值，當圓管管壁逐漸增加時，由薄管轉變為厚管 ( $t/R$  在 0.8~0.1 之間)，Sx 的應力值明顯提升，此外，當管壁厚度逐漸增加時，S1 及 Seqv 之應力值逐漸減少，如圖七(a)及(b)所示，管壁厚度和 S1 及 Seqv 是成反比的關係，除此之外在探討厚管及薄管所做的應力分析中，並沒明確顯示平面應力，平面應變及殼元素應力值之間差異，並無法明確指定種元素對探討圓管厚度適應性最佳。

表八 B1 model 不同管厚之應力

t/R	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4
Sx	449	454.	453.	766	776.	829
S1	25149	16815	12648	10098	4653	2639
Seqv	21539	17060	12890	10477	5090	3140

表九 B2 model 不同管厚之應力

t/R	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4
Sx	414	453	452.	705	775	829.
S1	50214	16879	12712	10133	4680	2659
Seqv	45025	15386	11676	9586	4794	3046

表十 C1 model 不同管厚之應力

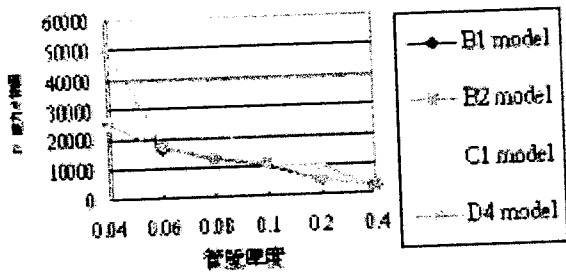
t/R	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4
Sx	460.9	465.1	423.	1000	1001	1003
S1	24961	24605	24781	1000	1000	80
Seqv	21495	14096	11090	8183	3774	2242

表十一 D1 model 不同管厚之應力

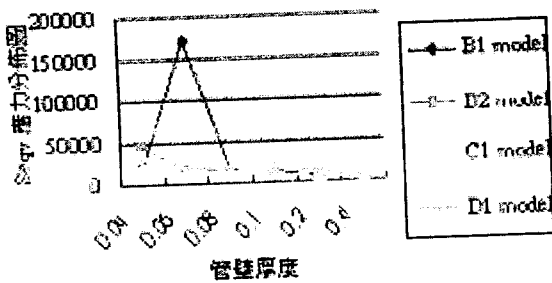
t/R	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4
Sx	476.	477	454	705.	750	756.
S1	25031	16742	12530	10086	9987	1517
Seqv	25673	17480	13664	10815	10081	2111

(b) 在 B model 和原本預期的應力變化差異並不大，在此厚度下平面應力及平面應變並無很大的差別，和其它原素相比準確性是最高的，所得到應力值非常接近立體元素的理論值。C model 如表四所得到的應力值與立體元素的應力值接近，此圓管屬於厚管，但所得到的應力值與 D model 得到之理論值並無太大的差異。

(c) 縱合以上四種不同有限元模型，分別對管意壁內一點及二點做各種應力評估如表十二及表十三所示一般分析圓管必須考量它所花費的時間、精神、物力及金錢去衡量，從求解時間、模型架構及求值的準確性 B model 在求解時，模型架構應力值的準確性皆是較佳的表十四為這次分析中對各種元素所做利益評估，分別考慮各種模型之正確性、合理性及分析速度來評估，找出最合乎本身經濟利益的有限元素模型。



(a)



(b)

圖七 不同管厚應力比較

表十二 不同元素相同管長下之應力結果

模型	位置	管長	Sx	Sy	Sz	S1	Seqv
A1	2	50	7.58	774	1630	1660	2195
A2	2	50	2.92	373	1626	1595	1396
B1	2	50	-54.	1578		1579	1608
B2	2	50	-54.	1570		1572	1442
C1	Top2	50	-3.8	2514	196	0.1	2306
C2	Top2	50	-3.8	2494	749	2490	2220
D1	2	50	-56.	1569	-813	1571	2111
D2	2	50	-56	1570	454	1572	1442

表十三 不同元素相同管長下之應力結果

模型	位置	管長	Sx	Sy	Sz	S1	Seqv
A1	1	50	1001	854	2667	2725	3025
A2	1	50	993	380	2640	1815	2802
B1	1			829	2635		2639
B2	1			829	1579		2659
C1	Bottom 1	50	999	703	2005	2026	2898
C2	Bottom 1	50	1002	2495	749	2489	3019
D1	1	50	-8.2	2641	-736	2644	3439
D2	1	50	817	2656	548	2659	3046

### 3、不同模型之縱合比較

A model 在不同管長下探討其應力值變化，和 D model 比較在不同管長時兩者的關析，如表一、二所示 A mode 長度越長時，管壁內 Sx S1 及 Seqv 應力值會隨著長度而改變漸漸趨近 D model，管壁內(位置 1)和參考值較為接近誤差皆在 10~15%以內，但管壁外(位置 2)相差甚大約在兩倍左右，而 A2 model 在管壁外應力較接近理論值，所得到的和 A1 model 的結果恰好相反，分別適用於管內及管外。

表十四 各模型特性比較

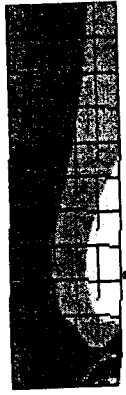
元素模型	求解速度	模型架構	準確性
A	快	簡易	較差
B	快	簡易	佳
C	中	中等	適合薄管
D	慢	複雜	較佳

### 七. 結論

本文藉由軟體(ANSYS)分析在一受內壓無限長圓管中，可經由不同的剖面法，架構不同的有限元素模型並縱合比較分析能力，可以在日後類似問題中做為一設計理念的參考依據，一般在工廠中或施工現場，若有類似情況，只能利用簡略的算式得到一個大略的平均應力值，如公式(2)、(4)所示，但實際上圓管應力分佈，並不盡如此，可能因材料性質、施工情形，或各種人為因素，使應力值大幅改變，使安全性降低，此外若材料長期在高壓反覆作用下，產生疲勞破壞，也是不容忽視的，經由分析所得到的  $S_1$  及  $Seqv$ ，是值得重視的。

### 參考文獻

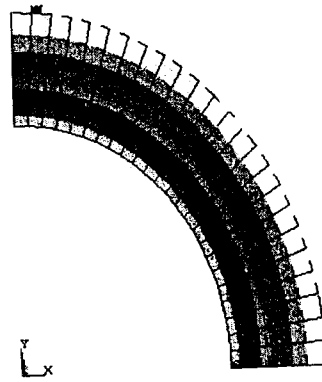
- 1、王柏村 編著，1998，有限元素分析範例，國立屏東科技大學機械工程系。
- 2、Anonym，1992，Introducing ANSYS Revision 5.0，Swanson Analysis Systems，Inc。



```

22:11:37
MODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
MAX =.165E-06
MIN =-774.327
SACS-4441
SACS-6400
774.327
1182
1589
1997
2404
2811
3219
3626
4034
4441
  
```

(a) A1 model



```

MODAL SOLU
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (
DEX =.169E
MIN =1429
MINB=1331
MAX =2047
MAXB=2444
1429
1616
1797
1975
2154
2322
2511
2690
2868
3047
  
```

(a) B1 model

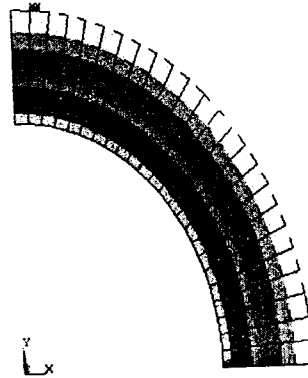


```

22:11:37
MODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
MAX =.165E-06
MIN =-774.327
SACS-4441
SACS-6400
774.327
1182
1589
1997
2404
2811
3219
3626
4034
4441
  
```

(b) A2 model

圖八 A model Seqv 應力分佈圖



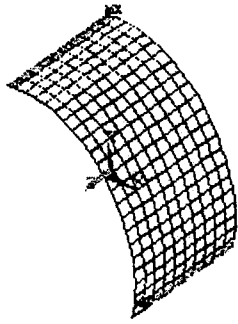
```

MODAL SOLU
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (
DEX =.169E
MIN =1429
MINB=1331
MAX =2047
MAXB=2444
1429
1616
1797
1975
2154
2322
2511
2690
2868
3047
  
```

(b) B2 model

圖九 B model Seqv 應力分佈圖

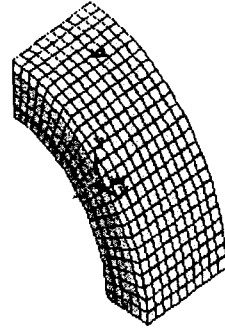




TIME=1  
 SEQV (AVG)  
 TOP  
 DMX =.121E-06  
 SMN =1767  
 SMNB=1669  
 SMX =1775  
 SMXB=1866

□	1767
■	1768
■	1769
■	1770
■	1771
■	1772
■	1773
■	1774
■	1775
■	1775

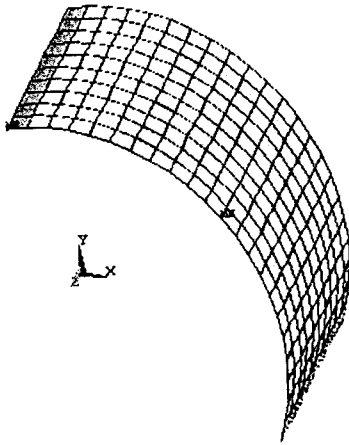
(a) C1 model



SEQV (AVG)  
 DMX =.226E-06  
 SMN =2109  
 SMNB=2001  
 SMX =3446  
 SMXB=3645

□	2109
■	2258
■	2406
■	2555
■	2704
■	2852
■	3001
■	3149
■	3298
■	3446

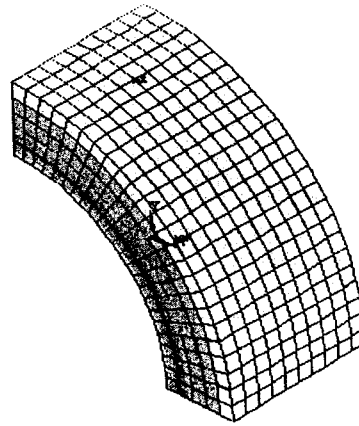
(a) D model



NODAL SOLU  
 STEP=1  
 SUB =1  
 TIME=1  
 SEQV (AVG)  
 TOP  
 DMX =.136E-06  
 SMN =1951  
 SMNB=1804  
 SMX =1959  
 SMXB=2099

□	1951
■	1952
■	1953
■	1954
■	1955
■	1956
■	1956
■	1957
■	1958
■	1959

(b) C2 model  
 圖十 seqv 應力分佈圖



SEQV (AVG)  
 SUB =1  
 TIME=1  
 DMX =.182E-06  
 SMN =1439  
 SMNB=1331  
 SMX =3047  
 SMXB=3244

□	1439
■	1616
■	1797
■	1975
■	2154
■	2332
■	2511
■	2690
■	2868
■	3047

(b) D2 model  
 圖十一 seqv 應力分佈圖