

樑結構受衝擊力之外力預測

王柏村 吳德和 吳建德

國立屏東科技大學機械工程系

國科會計畫編號：NSC89-2212-E-020-006

摘要

本文主要發展一外力預測模式求取衝擊外力作用於簡支樑之大小、時間歷程與作用位置，衝擊外力型式假設成三角力以符合實際衝擊外力之三角波型式。首先可由理論分析或實驗模態分析得到結構系統之自然頻率、模態阻尼比及振型等模態參數，當結構受到衝擊外力時，結構之加速度時間域響應可量測並記錄，預測之響應則可根據模態分析得到表示成外力大小與作用時間歷程及作用位置之函數，定義預測與量測響應間的誤差平方和為目標函數，進而架構最佳化問題以求得此衝擊力之大小與作用時間歷程，以及相關於外力作用位置之模態振型，經與實際結構模態振型做比較分析，則可找到衝擊外力之作用位置。由理論與實驗的結果可得知本文所發展之預測外力模式之可行性，並可應用至其他結構。

關鍵字：外力預測、衝擊、樑

1、前言

傳統上探討外力作用於結構物之影響與變化，通常需先得知作用外力之位置與大小，才能進一步探討外力對結構物之影響。而逆向工程問題 (Inverse Problem) 則是探討由系統之輸出反推系統之輸入 [1-3]，結構系統之外力預測 (Force Prediction) [4-6] 便是在這樣的理念下，預測出結構物所受外力作用之型式，為工程上研究重點之一 [7-17]。

結構體受外力作用時，外力之型式、大小與作用於結構之位置都具有不可掌握之特性，且外力型式有可能隨時間而改變，種種不確定因素造成使用量測器直接對結構體進行外力量測之困難度 [18-19]，不僅如此，使用之量測器還得考量必須能適應各種環境如溫度、壓力之變化 [19-20]，與安裝或黏貼於結構體上時之方便性和量測之準確性。以上所述可知結構受外力時直接量測之困難性，所以許多研究致力發展結構系統之外力預測模式。

從事外力預測模式之探討研究中，通常可以歸納為幾種類型：第一類為已知外力作用位置與外力型式，求外力作用時間歷程；第二類為已知外力為隨機力之外力預測研究探討；第三類為在外力作用位置固定下，求取其作用力之大小與方向；第四類為已知外力作用型式，求取其外力作用位置與作用力大小。

第一類在已知作用力位置與外力型式，而求外力作用時間歷程有應用在機器 [21-22] 操作時與外在環境力之影響，如工具機切削時，如工具機切削時 [3]，在操作之前對機器結構受力時之激振情形有所了解，將有助於機器操作之控制；建築物如高樓大廈，遭受風力或地震 [8,23-24] 作用時，對其外力作用之大小與作用型式之了解，將對其變形與振動之控制有所幫助；又如水庫洩洪時對水之衝擊型式與大小之了解對閘門之設計有相當大的幫助。複合材料之

結構在受到外力衝擊作用後，表面很難出現凹痕 [14,25-32]，當藉由外力預測去探知其外力作用型式、位置與大小，有助於了解結構破壞之診斷。以上概述可知，結構系統外力預測在工程應用上之重要性。

第二類為已知外力為隨機力之外力預測研究探討 [7,9-10,19,21,23-24]。飛機與輪船在行進時均可能受到不明物體或隨機衝擊外力，此時對於外力撞擊之大小、型式與作用位置就相當重要。

第三類為在外力作用位置固定下，求取其衝擊作用力之大小與方向，Inoue et al. [33] 利用應變響應與結構系統頻率響應函數之關係，在固定點下，可求得外力之大小與方向。

第四類為已知外力作用型式，求取其外力作用位置與作用力大小，Wang and Chiu [6] 假設衝擊外力函數為 impulse 函數，利用結構之模態參數表示成外力大小與作用力位置之預測響應函數，定義預測響應與量測結構響應之誤差平方和為目標函數，架構最佳化問題求得衝擊力大小與相關外力作用位置之模態振型，經實際模態振型相比較即可得其衝擊力之作用位置，而本文將沿用此文獻之特性，進而改變衝擊外力函數為三角力函數型式。

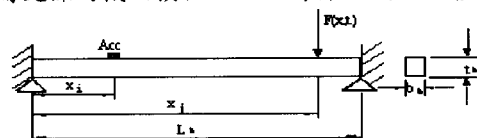
由上述可知，先前學者所發展外力之預測大都在已知位置情況下，對外力大小之預測，不然就是已知外力作用形式，對時間歷程或位置做預測，鮮少有對作用力位置、時間歷程與外力大小做預測之模式。本文主要在發展一外力預測模式，以簡支樑結構物為例，當外力作用為三角波衝擊形式時，透過本預測模式對外力大小、作用時間歷程與外力作用位置都能準確的預測。

2、理論分析

考慮一長度為 L_b 之均勻簡支樑，如圖一所示，在受一衝擊外力 $F(x,t)$ 作用時，根據傳統樑理論，忽略剪力變形及轉動慣量效應，其簡支樑側向運動方程式通式為：

$$\rho_b A_b \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + C_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + E_b I_b \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = F(x,t) \quad (1)$$

其中， ρ_b 為簡支樑的密度， A_b 為簡支樑的截面積， C_b 為簡支樑的阻尼係數， E_b 為簡支樑的楊氏係數， I_b 為簡支樑的截面慣性矩， w 為樑之側向位移。



圖一、簡支樑尺寸及施力位置圖

當外力的型式為三角力時且在結構座標 $x = x_j$ 受衝擊力作用，如圖二所示，其外力的型式可寫成：

$$F(x, t) = \delta(x - x_j) \times \begin{cases} 0, & t \leq t_1 \\ F_j \frac{(t - t_1)}{(t_2 - t_1)}, & t_1 \leq t < t_2 \\ F_j \frac{(t - t_3)}{(t_2 - t_3)}, & t_2 \leq t < t_3 \\ 0, & t \geq t_3 \end{cases} \quad (2)$$

2-1、加速度響應理論分析

利用擴充原理與結構模態振型之正交性關係，並假設其三角力的作用時間 $t_1 = 0$ ，如圖三所示，可分為三個部分計算其樑之側向位移、速度、加速度響應函數的形式：

(I) 當 $0 \leq t < t_2$ 時：

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ \left[e^{-\xi_n \omega_n t} (C_1 \cos \omega_{d_n} t + C_2 \sin \omega_{d_n} t) \right] + \frac{F_j \phi_n(x_j) t}{\omega_n^2 t_2} - \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\xi_n)}{\omega_n^2 t_2} \right\} \quad (3)$$

$$\dot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} \left[(-\xi_n \omega_n) \times (C_1 \cos \omega_{d_n} t + C_2 \sin \omega_{d_n} t) \right] + \omega_{d_n} (-C_1 \sin \omega_{d_n} t + C_2 \cos \omega_{d_n} t) + \frac{F_j \phi_n(x_j)}{\omega_n^2 t_2} \right\} \quad (4)$$

$$\ddot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ (C_1 \cos \omega_{d_n} t + C_2 \sin \omega_{d_n} t) \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \times (C_1 \sin \omega_{d_n} t - C_2 \cos \omega_{d_n} t) \right\} \quad (5)$$

其中， ω_{d_n} 為阻尼自然頻率，表示成 $\omega_{d_n} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}$ ；

$$C_1 = \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\xi_n)}{\omega_n^2 t_2}, \quad C_2 = \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\xi_n^2 - 1)}{\omega_n^2 \omega_{d_n} t_2}$$

(II) 當 $t_2 \leq t < t_3$ 時：

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} (C_3 \cos \omega_{d_n} t + C_4 \sin \omega_{d_n} t) + F_j \phi_n(x_j) \left[\frac{\omega_n t - (\omega_n t_3 + 2\xi_n)}{\omega_n^3 (t_2 - t_3)} \right] \right\} \quad (6)$$

$$\dot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} \left[(-\xi_n \omega_n) (C_3 \cos \omega_{d_n} t + C_4 \sin \omega_{d_n} t) \right] + \omega_{d_n} (-C_3 \sin \omega_{d_n} t + C_4 \cos \omega_{d_n} t) + \frac{F_j \phi_n(x_j)}{\omega_n^2 (t_2 - t_3)} \right\} \quad (7)$$

$$\ddot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ (C_3 \cos \omega_{d_n} t + C_4 \sin \omega_{d_n} t) \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \times (C_3 \sin \omega_{d_n} t - C_4 \cos \omega_{d_n} t) \right\} \quad (8)$$

其中，

$$C_3 = C_1 +$$

$$\frac{F_j \phi_n(x_j) \left[(2\xi_n t_3 \omega_{d_n} \cos \omega_{d_n} t_2) - (2\xi_n^2 - 1) t_3 \omega_n (\sin \omega_{d_n} t_2) \right]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) \omega_{d_n}} e^{\xi_n \omega_n t_2}$$

$$C_4 = C_2 +$$

$$\frac{F_j \phi_n(x_j) \left[(2\xi_n t_3 \omega_{d_n} \sin \omega_{d_n} t_2) + (2\xi_n^2 - 1) t_3 \omega_n (\cos \omega_{d_n} t_2) \right]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) \omega_{d_n}} e^{\xi_n \omega_n t_2}$$

(III) 當 $t \geq t_3$ 時：

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} [C_5 \cos \omega_{d_n} t + C_6 \sin \omega_{d_n} t] \right\} \quad (9)$$

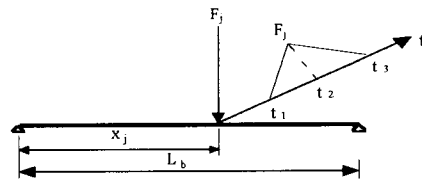
$$\dot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \left\{ e^{-\xi_n \omega_n t} \left[(-\xi_n \omega_n) (C_5 \cos \omega_{d_n} t + C_6 \sin \omega_{d_n} t) \right] + \omega_{d_n} (-C_5 \sin \omega_{d_n} t + C_6 \cos \omega_{d_n} t) \right\} \quad (10)$$

$$\ddot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ (C_5 \cos \omega_{d_n} t + C_6 \sin \omega_{d_n} t) \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \times (C_5 \sin \omega_{d_n} t - C_6 \cos \omega_{d_n} t) \right\} \quad (11)$$

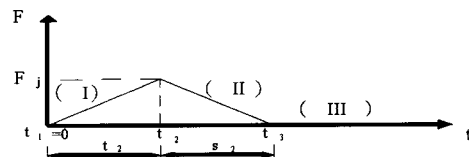
其中，

$$C_5 = C_3 - \frac{F_j \phi_n(x_j) \left[(1 - 2\xi_n^2) \omega_n \sin \omega_{d_n} t_3 + 2\xi_n \omega_{d_n} \cos \omega_{d_n} t_3 \right]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) \omega_{d_n}} e^{\xi_n \omega_n t_3}$$

$$C_6 = C_4 + \frac{F_j \phi_n(x_j) \left[(1 - 2\xi_n^2) \omega_n \cos \omega_{d_n} t_3 - 2\xi_n \omega_{d_n} \sin \omega_{d_n} t_3 \right]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) \omega_{d_n}} e^{\xi_n \omega_n t_3}$$



圖二、三角力作用圖



圖三、三角力作用時間

2-2 加速度響應外力預測模式

考慮一簡支樑在座標系統 $x = x_j$ 受到未知衝擊外力作用時，在座標系統 $x = x_i$ 點之加速度響應，可以由實驗分析量測的方式或是利用前節的理論推導方式得知其加速度響應。以 $\hat{a}_i(t)$ 表示由實驗分析量測方法所得到的加速度響應，而經由理論分析所得到的加速度響應，如 2.1.1 節中的式 (5)、(8) 與 (11)，雖量測時間在不同時間歷程時有不同的表示方式，但一律以 $a_i(t)$ 表示。以式 (11) 為例，可將 $a_i(t)$ 表示成：

$$a_i(t) = \ddot{w}(x_i, t) = \sum_{n=1}^k \phi_{n,i} e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ (C_5 \cos \omega_{d_n} t + C_6 \sin \omega_{d_n} t) \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \times (C_5 \sin \omega_{d_n} t - C_6 \cos \omega_{d_n} t) \right\} \quad (12)$$

其中， $\phi_{n,j}$ 表示第 n 個模態振型在 x_j 位置之值，與 $\phi_n(x_j)$ 具相等之物理意義。

經由實驗分析量測或理論推導的方式，可得知其系統結構的模態參數，即自然頻率、模態阻尼比與模態振型，所以式 (12) 中的 ω_n 、 ξ_n 、 $\phi_{n,i}$ 與 ω_{d_n} 均為已知，配合實驗結果的應用，因而只取前 k 個模態，且模態振型函數變成向量的形式。而結構受未知衝擊力作用，只知其衝擊力型式為三角力，其力大小 F_j 、作用力時間歷程 t_2 和 t_3 與作用力的位置 x_j 均為未知。由於式 (12) 為一多變數方程式，所以以最佳化方式來求解，希望能求得 F_j 、 t_2 和 t_3 與 $\phi_{n,j}$ ，使得式 (12) 中的加速度響應 $a_i(t)$ 與實驗所得的加速度響應 $\hat{a}_i(t)$ 相等，即可預測其外力大小 F_j 、作用時間歷程 t_2 和 t_3 與作用位置 x_j ，所以可以定義目標函數為 $a_i(t)$ 與 $\hat{a}_i(t)$ 之誤差平方和，其 F_j 、 t_2 和 s_2 與 x_j 為未知， s_2 定義成 $t_3 - t_2$ 如圖三所示，其最佳化分析問題定義如下：

$$\text{目標函數：} Q_t = \sum_{r=1}^{N_t} [a_i(t_r) - \hat{a}_i(t_r)]^2 \quad (13)$$

$$\text{設計變數：} F_j, t_2, s_2, \phi_{n,j}, n=1, 2, \dots, k$$

其中，目標函數 Q_t 定義為由 N_t 個時間點之 $a_i(t)$ 與 $\hat{a}_i(t)$ 之誤差平方和。其最佳化分析問題主要設計方向在求得 F_j 、 t_2 、 s_2 與 $\phi_{n,j}$ ，使其目標函數為零或最小化。

當求解此最佳化問題後可得到衝擊力大小 F_j 與作用時間歷程 t_2 與 t_3 ， t_3 的值可由 $t_2 + s_2$ 求得，以及一組模態振型 $\{D\}_j$ ，表示如下：

$$\{D\}_j = [\phi_{1,j} \ \phi_{2,j} \ \dots \ \phi_{k,j}]^T \quad (14)$$

上式的上標 T 表對矩陣作轉置運算，由式 (14) 可知 $\{D\}_j$ 為所有模態振型向量在 x_j 位置所組成的向量，結構模態振型矩陣定義如下：

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \ \{\phi\}_2 \ \dots \ \{\phi\}_k] = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{k,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,m} & \phi_{2,m} & \dots & \phi_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_1 \\ [G]_2 \\ \vdots \\ [G]_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中，

$$[G]_l = [\phi_{1,l} \ \phi_{2,l} \ \dots \ \phi_{k,l}] = \{\hat{D}\}_l^T, \quad l=1, 2, \dots, k \quad (16)$$

式 (15) 中的 k 為模態數， m 為結構進行模態分析之分割點數。

MAC 為評估實驗及理論所得振型之相關性指標 [34]，定義如下：

$$MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = \frac{|\{\phi\}_p^T \{\phi\}_x^*|^2}{(\{\phi\}_x^T \{\phi\}_x^*) (\{\phi\}_p^T \{\phi\}_p^*)} \quad (17)$$

其中：

$\{\phi\}_x$ ：代表實驗所得的振型向量
 $\{\phi\}_p$ ：代表理論所得的振型向量
 $*$ ：代表共軛運算

一般而言， $0 \leq MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) \leq 1$ ，當理論與實驗所得的振型完全一致時，即 $\{\phi\}_p = \{\phi\}_x$ ，則 $MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = 1$ ，所以；當 MAC 的值大於 0.9，即表示此兩組振型有良好的相關性；當 MAC 的值低於 0.05，則表示此兩組振型毫無相關性或稱為具有正交性。

當以 MAC 評估最佳化所得到的模態振型 $\{D\}_j$ 與結構模態振型 $\{\hat{D}\}_k$ 之相關性，可表示成：

$$MAC_{jl} = MAC(\{D\}_j, \{\hat{D}\}_l), \quad l=1, 2, \dots, m \quad (18)$$

當 MAC_{jl} 值接近 1 時，表示其 $\{D\}_j$ 與 $\{\hat{D}\}_l$ 有良好的相關性，亦即 $x_j = x_l$ ，即可判斷衝擊力作用在 x_l 位置上。

3、預測外力模式程式架構

在外力預測模式程式中，其程式語言以 MS-FORTRAN PowerStation 來撰寫，最佳化分析程式則應用 Visual Numerics IMSL Math Library [35] 中所提供之最佳化副程式 DBCPOL，預測分析流程圖如圖四所示。

此外力預測程式可依分析目的任意選擇理論或實驗所得模態參數估算 $a_i(t)$ 搭配理論或實驗分析所得響應 $\hat{a}_i(t)$ 進行外力預測分析，所欲分析之三種組合分述如下：

組合 (I) 理論分析所得模態參數搭配理論分析所得響應：使用理論分析所得模態參數估算 $a_i(t)$ 與理論所得響應 $\hat{a}_i(t)$ 來探討此外力預測方法之適應性。

組合 (II) 理論分析所得模態參數搭配實驗量測所得響應：使用理論所得模態參數估算 $a_i(t)$ 與實驗所得響應 $\hat{a}_i(t)$ 進行外力預測分析，為探討不進行模態測試實驗時，以理論所得之模態參數與量測所得之結構響應，進行此方法之可行性分析。此法適用於複雜結構，不易或無法由實驗求得結構之模態參數時，可以有限元素或理論分析求得結構之模態參數，以進行外力預測。

組合 (III) 實驗分析所得模態參數搭配實驗量測所得響應：使用實驗所得模態參數估算 $a_i(t)$ 搭配

實驗所得響應 $\hat{a}_i(t)$ 進行外力預測分析，探討當只進行實驗分析時此預測外力方法之可行性，此法可適用於當不易進行有限元素分析或理論分析時，而以實驗之模態分析結果進行外力預測。

以下將對影響外力預測之參數進行探討，使用理論分析所得模態參數搭配理論分析所得響應針對以下所述因素之影響進行探討，並說明一些進行外力預測分析歸納之經驗，提供進行外力預測分析時之建議事項。

時間點選點之影響

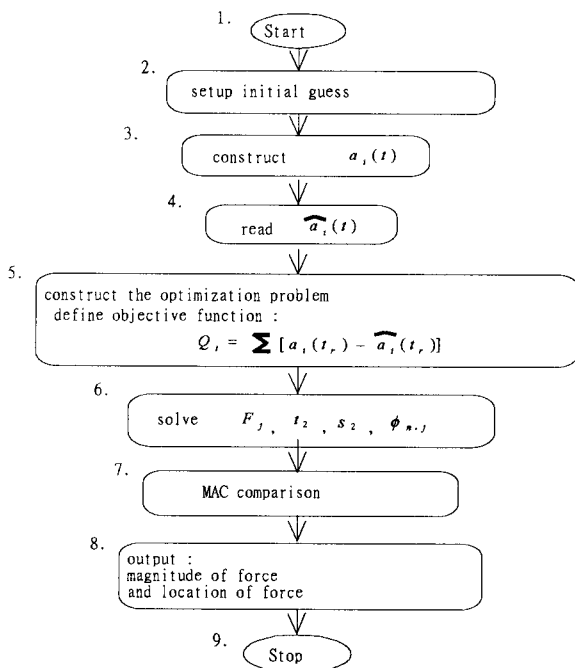
分別就選取時間點 N_i 多寡與不同區域之影響做探討，由經驗歸納所得，建議之取點方式為取 5 到 30 點以全區域之均勻選點來進行最佳化外力預測分析。

設計變數初始值之影響

設計變數之初始值對結果有很大的影響，良好的初始值，對於其外力預測的結果常常較易得到好的結果，一開始就給定初始值為大約之正確值，通常比亂數給定的數值來的較易得到正確的結果。通常初始值與時間點 N_i 之選取能搭配好的話，可大大的減少最佳化結果之誤差。

設計變數之上下限

設計變數之上下限限制可靈活運用以得到正確的結果，由一開始大範圍的結果過濾出常出現的數值，或外力的範圍，再逐步的減少上下限範圍，以得到正確結果。當上下限若設錯時，會出現程式無法求解的現象，此時則要重新調整上下限的範圍。



圖四、外力預測流程圖

4、實驗架構

本文主要探討簡支樑受三角波型式外力衝擊之外力預測，簡支樑尺寸如表一所示，使用儀器設備其型號如表二所示，儀器架構圖如圖五所示。

5、外力預測分析結果與討論

5.1 組合 (I) 理論分析所得模態參數搭配理論分析所得響應

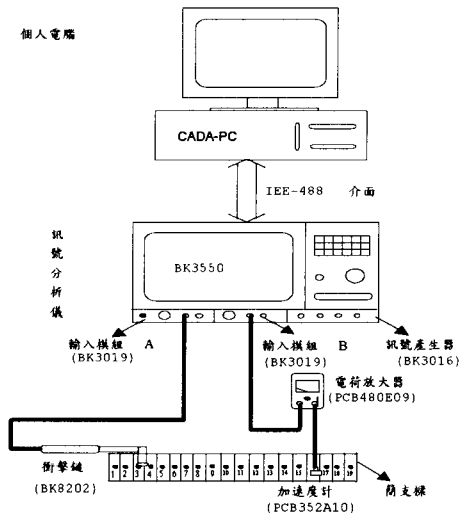
主要使用理論分析所得模態參數估算結構響應搭配理論分析所得結構響應來規劃最佳化問題之目標函數，以進行外力預測模式分析，進而探討此外力預測模式之適應性與可行性。

表一、簡支樑之材料性質

材料	鋼
長度 (L_b)	0.38m
寬度 (b_b)	0.04m
厚度 (t_b)	0.002m
密度 (ρ_b)	7870kg/m ³
楊氏係數 (E_b)	207×10 ⁹ N/m ²
蒲松比 (ν_b)	0.292

表二、使用儀器一覽表

儀器名稱	型號
雙頻道訊號分析儀	BK3550
衝擊錘	BK8202
加速度計	PCB352A10
加速度計之電荷放大器	PCB480E09
曲線嵌合軟體	LMS CADA-PC



圖五、實驗儀器架構圖

5.1.1 外力作用位置之影響

根據前述可知，影響外力預測模式之參數有時間點 N_i 、設計參數之初始值與變數之上下限位置，就前節建議之準則，進行外力預測分析。並將探討外力作用位置不同時對預測模式之適應性及影響，並評估其可行性。

將量測點固定於第 1 個分割點，作用力分別作用於第 18 點（樑之端點）、第 10 點（樑之中點）、第 7 點（約樑之 1/3 處）與第 5 點（約樑之 1/4 處），其時間歷程皆固定為： t_2 為 1 毫秒， s_2 為 2 毫秒，分別比較其結果並探討其預測模式之適應性。

表三為不同外力作用位置對外力大小與時間歷程之預測結果，表中 case 欄中 (i, j) 符號表示量測響應位置為 i ，衝擊外力作用之位置為 j ，在表三中可得知其預測之外力大小與時間歷程都相當接近。圖六為對應表三所得之正確時間歷程與外力大小和預測時間歷程與外力大小之比較圖，實線部分為各不同作用位置組合之正確外力大小與時間歷程，虛線則為各種組合之預測外力大小與時間歷程，由圖六可知本文所使用之方法可大約預測出其外力大小與時間歷程。圖七為對應於表三之不同作用力位置對位置之預測結果，雖 MAC 的值都無法接近 1，但可由其 MAC 的相對極大值判斷出其外力作用之位置，顯示此方法在任意位置的外力作用都能適用。

5.1.2 作用力大小不同之影響

當外力作用之位置不變，以大小不同的外力、相同的時間歷程作用時，在相同的量測結構之響應，進行探討本預測模式是否能適應此種狀況。表四為本狀況預測之結果，可以看出所預測的外力大小與時間歷程和實際值相差不大，顯示此預測模式可適應於不同大小之衝擊力。

5.1.3 量測響應位置之影響

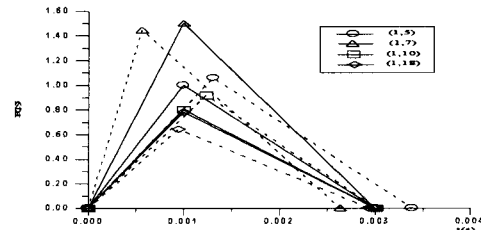
本節將探討不同量測響應位置時對此預測模式之影響，並探討其適應性。本實驗採用將外力作用位置固定於分割點 18 之位置，響應量測位置，也就是加速度計所安置的位置於分割點 1、5、7 與 10，由表五可看出，其外力預測所得之外力大小與時間歷程和正確值差異不大，圖八為對應表五之外力大小與時間歷程之比較圖，實線部分為各種組合之正確型式，虛線部分則為外力預測所得之結果，可由圖中得知其外力大小與時間歷程之趨勢有一定的相似度。圖九為對應表五在不同量測響應位置所預測位置之結果，由圖中可知都可以成功的找到作用力位置所在。唯響應量測位置於分割點第 7 點時，整體 MAC 之比對值雖然較低，但還是可以預測出其外力作用位置，所以大致來說，就算不能正確的預測出外力作用位置所在，也可預測出其作用力位置之大概範圍。

5.2 組合 (II) 理論分析所得模態參數搭配實驗量測所得響應

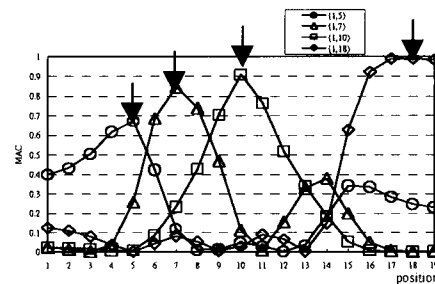
本節將討論不對結構進行模態測試實驗，只對結構進行實驗響應之量測，以理論分析所得之模態參數來進行外力預測分析，進而探討本方式之可行性，分別探討外力作用位置、作用力大小與量測響應位置之影響，並對以衝擊點力模擬衝擊外力型式所推導出之外力預測模式所預測出的結果 [6] 作比較，以得知其改善之情形。

表三、組合 (I) 不同作用力位置之預測外力大小與時間歷程數值結果

F_j (N)	實際值	外力預測所得	時間歷程 (毫秒)	
			t_2 (1)	s_2 (2)
(1,5)	1.000	1.059	1.308	2.078
(1,7)	1.500	1.446	0.565	2.072
(1,10)	0.800	0.917	1.236	1.781
(1,18)	0.799	0.642	0.944	1.986



圖六、組合 (I) 不同作用力位置之外力大小與時間歷程圖



圖七、組合 (I) 不同作用力位置於預測位置之結果

表四、組合 (I) 不同作用力大小之分析結果

F_j (N)	實際值	外力預測所得	時間歷程 (毫秒)	
			t_2 (1)	s_2 (2)
(3,2)	1.470	1.300	0.780	2.110
(3,2)	0.581	0.524	0.842	2.146
(1,18)	0.350	0.325	1.016	2.251
(1,18)	0.799	0.642	0.944	1.986

表五、組合 (I) 量測響應位置於預測外力大小與時間歷程之結果

F_j (N)	實際值	外力預測所得	時間歷程 (毫秒)	
			t_2 (1)	s_2 (2)
(1,18)	0.799	0.642	0.944	1.986
(5,18)	0.883	0.933	0.989	1.698
(7,18)	0.560	0.591	0.819	2.429
(10,18)	1.110	1.022	1.044	1.925

5.2.1 外力作用位置之影響

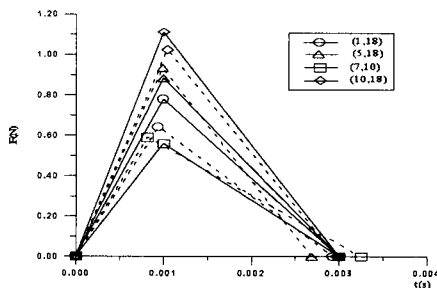
對於外力作用位置之影響探討，本節將分別探討外力作用位置於分割點與非分割點時之外力預測分析，又因敲擊時之外力作用時間歷程有所不同，可同時探討時間歷程不同時之影響。表六分別為三角力與點力於不同外力作用位置對外力大小與時間歷程之預測結果，表中(3,18.5)即表示外力作用位置於分割點18與19中間，在分割點3之位置進行結構響應量測；(10,2.5)表示外力作用位置於分割點2與3中間，在分割點10之位置進行結構響應量測。由表中可以得知三角力所預測之外力大小較點力所預測之大小準確，而在三角力時間歷程預測方面也有相當的準確性，圖十為對應表六三角力之外力大小與時間歷程之比較圖，實線部分為各種組合之正確型式，虛線部分則為外力預測所得之結果，由圖中可以看出其時間歷程有些許差異，但還是可以看出其外力所作用之大概趨勢。圖十一為對應表六中三角力於不同外力作用位置之預測結果，圖中可以看出其位置之預測情形都算準確，除了在作用力位置於分割點第2點時，所預測的位置有所偏差，但可由圖中判斷出其位置之大概範圍，所以其位置之預測情形還算準確，可知本文之預測模式於不同外力作用位置時有相當之可行性。

5.3 組合(III) 實驗分析所得模態參數搭配實驗分析所得響應

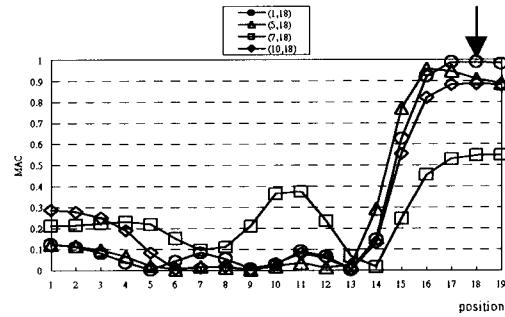
本節將探討對結構進行模態測試實驗與響應量測實驗，以實驗所得模態參數搭配實驗量測所得響應進行外力預測分析，並評估其可行性與適應性。

5.3.1 外力作用位置之影響

對於外力作用位置之影響探討，分別對外力作用於分割點與非分割點進行外力預測分析，因敲擊時之外力作用時間歷程有所不同，可同時探討時間歷程不同時之影響。表七中分別為三角力與點力於不同外力作用位置對外力大小與時間歷程預測之結果，表中可以得知其預測之外力大小與時間歷程和實際值有些許的誤差，但可得知三角力所預測之結果較點力所預測之結果佳；圖十二為對應表七中三角力之外力大小與時間歷程比較圖，實線部分為各種組合之正確型式，虛線部分則為外力預測所得之結果，由圖中可明顯看出其預測之外力大小與時間歷程之差異情形，其原因有可能為實驗上之誤差所導致，但對外力之大小與時間歷程之趨勢還是可都略看出，所以其外力大小與時間歷程之預測結果還可以接受。圖十三為對應表七中三角力於不同外力作用位置之預測結果，由圖中可以看出其外力作用位置都能成功的預測出，雖(10,2.5)之組合所得到的外力作用位置較不明顯，但還是有預測到外力作用位置之趨勢。



圖八、組合(I) 不同量測位置之外力大小與時間歷程圖



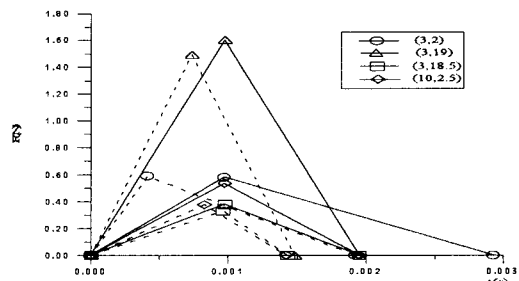
圖九、組合(I)不同量測響應位置於預測位置之結果

表六、組合(II) 不同作用力位置之預測外力大小與時間歷程數值結果 (a) 外力大小

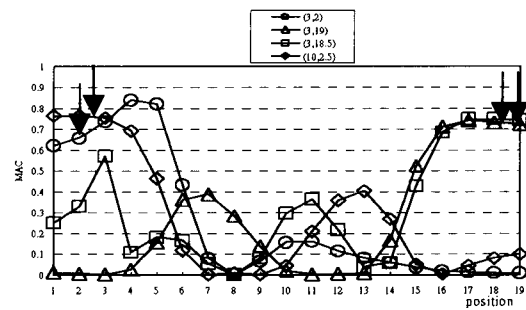
Case	F_j (N)	外力預測所得	
		三角力	點力[6]
(3,2)	0.581	0.588	0.500
(3,19)	1.600	1.491	1.478
(3,18.5)	0.380	0.330	0.675×10^{-6}
(10,2.5)	0.537	0.376	0.142

(b) 外力作用時間歷程

Case	實際值		外力預測所得	
	t_2	s_2	t_2	s_2
(3,2)	0.9765	1.9530	0.4135	1.5121
(3,19)	0.9765	0.9765	0.7346	0.7510
(3,18.5)	0.9765	0.9765	0.9638	0.4686
(10,2.5)	0.9765	0.9765	0.8279	0.5942



圖十、組合(II) 不同作用力位置之外力大小與時間歷程圖



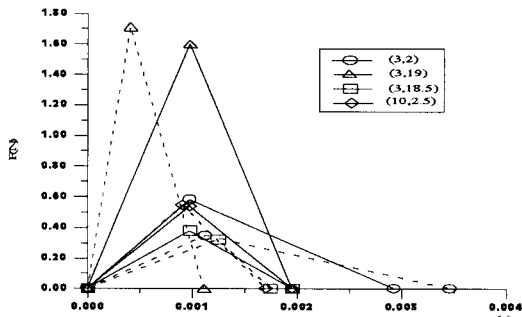
圖十一、組合(II) 不同作用力位置於預測位置之結果

表七、組合 (III) 不同作用力位置之預測外力大小與時間歷程數值結果 (a) 外力大小

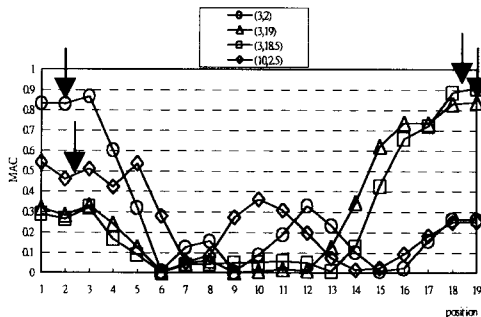
Case	F_j (N)	外力預測所得	
		三角力	點力 [6]
(3,2)	0.581	0.348	0.093
(3,19)	1.600	1.713	0.022
(3,18.5)	0.380	0.323	0.170×10^{-3}
(10,2.5)	0.537	0.547	0.468×10^{-5}

(b) 外力作用時間歷程

Case	實際值		外力預測所得	
	t_2	s_2	t_2	s_2
(3,2)	0.9765	1.9530	1.1233	2.3403
(3,19)	0.9765	0.9765	0.4065	0.7050
(3,18.5)	0.9765	0.9765	1.2451	0.4991
(10,2.5)	0.9765	0.9765	0.9052	0.7953



圖十二、組合 (III) 不同作用力位置之外力大小與時間歷程圖



圖十三、組合 (III) 不同作用力位置於預測位置之結果

6、結論

本文主要在探討當簡支樑結構物受到外力作用時，對其結構物進行響應量測進而發展出外力預測之模式，其衝擊外力之型式為三角力型式，在進行結構響應之量測時，其感應器考慮使用加速度計，並發展出加速度響應之外力預測模式，綜合以上各節之外力預測分析結果，歸納出幾點結論。

1. 本文所發展之外力預測模式，其參數之選取有很大之影響，適當的選取時間點、設計變數之初始值與上下限制，對預測之結果都有相當的影響，選取之時間點在 5 到 30 點之間、設計變數之上下限制在實際值附近以及適當設計變數初始值會有較佳的預測結果。

2. 在理論分析所得模態參數搭配理論分析所得響應來架構最佳化問題之外力預測模式中，在適當的選取參數，所預測之外力作用位置、時間歷程與作用力大小都有相當高的準確度，可證實本預測模式之可行性。
3. 在理論分析所得模態參數搭配實驗量測所得響應來架構最佳化問題之外力預測模式中，所預測之外力作用位置、時間歷程與作用力大小與實際值差異不大，就算有些許誤差也都可預測出實際值之趨勢所在，與假設外力型式為衝擊點力型式所發展出之外力預測模式相比較 [6]，可知本文所使用之外力預測模式有相當程度之改善，主要在本文假設之外力型式和實際作用力特性相符為一三角波型式之衝擊力。
4. 在實驗分析所得模態參數搭配實驗量測所得響應來架構最佳化問題之外力預測模式中，所預測之外力作用位置、時間歷程與作用力大小和實際值之差異都在可接受範圍，結果也比假設外力型式為衝擊點力之型式所發展出之外力預測模式 [6] 來得好，所以可證實本預測模式有相當高的可行性。

參考文獻

1. Bell, R. G., and Rodeman, R., 1988, "External Force Estimation from Transient Response Data," *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference*, pp. 588-593.
2. Inoue, H., Ikeda, N., Kishimoto, K., Shibuya, T., and Koizumi, T., 1995, "Inverse Analysis of the Magnitude and Direction of Impact Force," *JSM E International Journal, Series A*, Vol. 38, No. 1, pp. 84-91.
3. Okubo, N., and Tatsuno, S., 1985, "Identification of Force Generated by A Machine Under Operation Condition," *Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conference*, pp. 920-927.
4. Stevens, K. K., 1987, "Force Identification Problems - an Overview," *Proceeding of the 1987 SEM Conference on Experimental Mechanics, June*, pp. 838-844.
5. Han, M. C., and Wicks, A. L., 1990, "Force Determination with Slope and Strain Response Measurement," *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, pp. 365-372.
6. Wang, B. T., and Chiu, C. H., 1999, "Determination of Unknown Impact Force Acting on Arbitrary Structures," 17th IMAC, pp. 1653-1658.
7. 邱琬雯、陳朝光，1996，「振動逆問題之研究」，碩士論文，國立成功大學，台南。
8. Desanghere, G., and Snoeys, R., 1985, "Indirect Identification of Forces by Modal Coordinate Transformation," *Proceedings of the 3rd International Modal Analysis Conferences*, pp. 685-690.
9. Fabunmi, J. A. 1986, "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by the Pseudoinverse Technique," *ALAA Journal*, Vol. 24, No. 3, pp. 504-509.
10. Fabunmi, J. A. 1987, "Feasibility of Dynamic Load Determination from Measured Mobilities," *Proceeding of the 1987 SEM Conference on Experimental Mechanics, June*, pp. 845-850.
11. Hillary, B., and Ewins, D. J., 1984, "The Use of Strain Gauges in Force Determination and Frequency Response Function Measurement," *Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference*, pp. 627-634.

12. Hollandsworth, P. E., and Busby, H. R., 1989, "Impact Force Identification Using the General Inverse Technique," *International Journal Impact Engineering*, Vol. 8, pp. 315-322.
13. Trujillo, D. M., and Busby, H. R., 1987, "Solution of an Inverse Dynamics Problem Using an Eigenvalue Reduction Technique," *Computer and Structure*, Vol. 25, pp. 109-117.
14. Wu, E., Yeh, J. C. and Yen, C. S., 1994, "Impact on Composite Laminated Plates: An inverse Method," *International Journal Impact Engineering*, Vol. 15(4), pp. 417-433.
15. Wu, E., Tsai, T. D., and Yen, C. S., 1995, "Two Method for Determining Impact Force Histoy on Elastic Plates," *Experimental Mechanics*, Vol. 35(1), pp. 11-18.
16. Yeih, W. C., Koya, T., and Mura, T., 1993, "An Inverse Problem in Elasticity with Partially Over Prescribed Boundary Conditions, Part I: Theoretical Approach," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 595-600.
17. Yeih, W. C., Koya, T., and Mura, T., 1993, "An Inverse Problem in Elasticity with Partially Over Prescribed Boundary Conditions, Part II: Numerical Details," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 601-606.
18. Elliott, K. B., Juang, J. N., and Roubison, J., 1988, "Force prediction Using Singular-Value Decomposition," *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference*, pp. 1582-1588.
19. Eddy, D., and Geert, D., 1991, "Updating of Force Functions," *Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference*, pp. 514-516.
20. Liu, D. M., Tsai, C. Z., and Wu, e., 1997, "A New Non-contact Technique to Identify Impact Force of beam Structure," *Proceedings of 14th national Conference of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, pp. 347-354.
21. Huang, H., Pan, J., and McCormick, P. G., 1997, "Prediction of Impact Force in a Vibratory Ball Mill Using an Inverse Technique," *International Journal Impact Engineering*, Vol. 19, No. 2, pp. 117-126.
22. Kreitinger, T. J., and Wang, M. L., 1988, "Force Identification From Nonlinear Structure Response," *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference*, pp. 1655-1661.
23. Simonian, S. S., 1981, "Inverse Problems in Structural Dynamics - I. Theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 357-365.
24. Simonian, S. S., 1981, "Inverse Problems in Structural Dynamics -II. Applications," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 367-386.
25. Chang, C., and Sun, C. T., 1989, "Determining Transverse Impact Force on a Composite Laminate by Signal Deconvolution," *Experimental Mechanics*, December, pp. 414-419.
26. Doyle, J. F., 1984, "An Experimental Method for Determining the Dynamic Contact Law," *Experimental Mechanics*, Vol. 24, No. 1, pp. 10-16.
27. Doyle, J. F., 1984, "Further Development in Determining the Dynamic Contact Law," *Experimental Mechanics*, Vol. 24, No. 12, pp. 265-270.
28. Doyle, J. F., 1987, "Determining the Contact Force During the Transverse Impact of Plates," *Experimental Mechanics*, Vol. 27, No. 1, pp. 68-72.
29. Doyle, J. F., 1987, "Experimentally Determining the Contact Force During the Transverse Impact of an Orthotropic Plate," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118, No. 3, pp. 441-448.
30. Odeen, S., and Lundberg, B., 1991, "Prediction of Impact Force by Impulse Response Method," *International Journal Impact Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 149-158.
31. Shivakumar, K. N., Elber, W., and Illg, W., 1985, "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, pp. 674-680.
32. Wu, E., Yen, J. C. and Yen, C. S., 1994, "Identification of Impact Forces at Multiple Locations on Laminated Plates," *AIAA Journal*, Vol. 34(12), pp. 2433-2439.
33. Inoue, H., Ikeda, N., Kishimoto, K., Shibuya, T., and Koizumi, T., 1995, "Inverse Analysis of the Magnitude and Direction of Impact Force," *JSME International Journal, Series A*, Vol. 38, No. 1, pp. 84-91.
34. Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire, England.
35. IMSL Problem-Solving Software System, 1989, *Math / Library Fortran Subroutines for Mathematical Applications*, IMSL, Inc.

**Force Prediction for Beam Structures
Subjected to an Impact Force**

Bor-Tsuen Wang, Der-Ho Wu, Chien-Te Wu

Department of Mechanical Engineering
National Pingtung University of
Science and Technology

ABSTRACT

This paper develops the force prediction model for determining the force amplitude, time history and location of impact force acting on a simply-supported beam. The Impact force is assumed to be triangular distribution similar to the actual impact force. The acceleration response of the beam subjected to an impact force can be measured. By assuming that the system natural frequencies, modal damping and mode shapes can be available via theoretical or experimental modal analysis, the acceleration response can be predicted and expressed as functions of force amplitude, time history, and force location. The square of error between the measured and predicted response can then be defined as the objective function. The optimization problem can, therefore, be solved for the force amplitude and time history as well as the mode shape information associated with the force location. In comparison with the structural mode shapes, the force location can then be obtained. Both theoretical and experimental results are presented and shown the feasibility of predicting the content of the impact force. The developed algorithmic can also be applicable to other structures.

Keywords: force prediction, impact force, beam