

簡支樑之製作與模態特性驗證

邱俊賢 王栢村 吳德和

國立屏東科技大學機械工程研究所

國科會計畫編號：NSC88-2212-E-020-001

摘要

本文以自行製作之簡支樑進行實驗模態分析，探討所模擬之簡支邊界的正確性。以移動衝擊錘而固定加速度計的方式對簡支樑進行實驗模態分析，由實驗獲得一組結構頻率響應函數與相對應之關聯性函數，再經由模態參數估算法，得到結構之模態參數。結果顯示理論分析與實驗量測所得的結果驗證相當吻合，包括頻率響應函數、自然頻率、模態阻尼比與模態振型，證明所模擬架構之簡支樑結構的正確性。此簡支樑模型可做為實驗模態分析教具，也可進一步作結構振動控制之應用研究。

關鍵詞：簡支樑，實驗模態分析，模態參數

一、前言

結構系統動態特性 (dynamics properties) 或稱模態特性 (modal properties) [1] 為研究結構系統在動態環境下重要的參數之一，在實際應用上它將可幫助我們了解振動結構之特性、控制與改善振動現象 [2]。本文所謂之結構系統動態特性是指結構系統之自然頻率 (nature frequency)、模態阻尼比 (modal damping ratio) 與模態振型 (modal shape)，以上也統稱為模態參數 (modal parameters)。取得結構系統之動態特性的方法可以由理論分析或實驗分析的方式進行，而且理論分析常與實驗分析二者互相驗證結果的正確性。本文欲以實驗模態分析 (experimental modal analysis, EMA) 方法求取結構之動態特性，並與理論分析的結果作驗證比較。

實驗模態分析求取結構系統之動態特性後，可有以下幾方面的應用：將實驗模態分析之結果與理論分析或有限元素分析結果做比較，以驗證結果之正確性。或以實驗模態分析之結果來校正或調整原理論分析之數學模型 [3-6]，以達到所需求的結果；或應用到結構響應預測與結構外力預測 [7-10] 等方面。

進行實驗模態分析時，在感測器的選用上，除了用傳統的加速度計 [4,11]、應變規 [12,13] 外，亦有非接觸式感測器 [14,15]、壓電材料 [16-19] 等。

以理論或數值分析之模型來描述簡支結構之動態行為已有完整的發展，在實際的模擬製作上卻不易建造一符合簡支邊界條件之基本假設的實體模型；有關簡支邊界模擬的有 Champoux et al. [20] 所提出的模擬理念，支撐的材質要夠硬，使得結構的水平與垂直方向位移為零，但是當結

構振動的同時，此邊界須能提供足夠的撓性在旋轉的自由度上，即其支撐結構的等效旋轉彈簧常數要遠小於結構的等效彈簧常數。Ochs 和 Snowdon [21] 用鋁板作為簡支板的材料而剛性較小的 Spring Steel 做為簡支邊界支撐的材質，以模擬簡支的邊界條件。Wang 和 Cheng [22] 使用 L 型鋁材薄板做為支撐結構製作一鐵材簡支板，此薄板之旋轉彈簧常數要小於結構之等效旋轉彈簧常數，以小螺栓將板與 L 型鋁材鎖緊，再將此簡支板固定於基座上，成功製作出具正確邊界條件的簡支板。

本文製作以一彈簧片連接樑與基座，並以貼膠的方式使樑與彈簧片重疊部分緊密貼合，以模擬簡支之邊界。實驗模態分析方法為以加速度計做為感測器，衝擊錘做為驅動器，採用衝擊錘敲擊固定位置而移動加速度計，以訊號頻譜分析儀求取結構響應及輸入間之頻率響應函數，再經由 LMS CADA-PC 曲線嵌合軟體做結構模態參數估測，求得結構之模態參數。

二、理論分析

理論分析包括簡支樑之振動分析與說明關聯性函數與振型比對的方法。由振動分析得到簡支樑的模態參數與頻率響應函數。關聯性函數為表示輸入與輸出間之關係；振型比對的方法分別用 MAC (Modal Assurance Criterion) 與 MSF (Modal Scale Factor)。

2.1 簡支樑之振動分析

簡支樑之振動分析包括簡支樑之自由振動分析與簡支樑之強制振動分析，以求取簡支樑之自然頻率、模態函數、側向位移與頻率響應函數。

2.1.1 自由振動分析

考慮長為 L 之均勻簡支樑根據傳統樑理論的假設，不考慮樑之旋轉慣性與剪變形，並忽略阻尼效應，其運動方程式如下所示 [23]：

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

其中 E 為樑材料之楊氏係數， I 為截面之慣性矩 (moment of inertia)， ρ 為密度， A 為截面積， w 為樑之側向位移， x 為結構物理域之位置參數， $f(x,t)$ 為外力函數。

簡支樑在其邊界 $x=0$ 及 $x=L$ 時，樑之側向位移及彎曲力矩為零，可表示成：

$$w(x=0,t) = 0, EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$w(x=L,t) = 0, EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3)$$

由自由振動分析 [23] 可得自然頻率 ω_n 如下：

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (4)$$

模態振型函數 ϕ_n (mode shape function) 如下：

$$\phi_n(x) = A_n \sin \alpha_n x \quad (5)$$

其中，

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

A_n 為任意常數。

2.1.2 簡諧激振強制振動分析

經由簡諧激振強制振動分析可得樑受力之側向位移及頻率響應函數。假設簡支樑為具比例阻尼結構，則簡支樑受簡諧激振 (harmonic excitation) 之運動方程式如下 [23]：

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial t} C[w(x,t)] + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = F_j \delta(x-x_j) e^{i\omega t} \quad (7)$$

其中 F_j 表簡諧力之大小， $\delta(x-x_j)$ 為一單位脈衝函數，表示外力以點力型式作用在 $x=x_j$ 位置。 C 為結構阻尼係數。由擴充原理 (expansion theorem) 可假設樑之側向位移響應如下：

$$w(x,t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\omega) \phi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

且假設結構系統的初始條件為零，經由強制振動分析 [23] 可得在 $x=x_j$ 位置簡支樑時間域位移響應如下：

$$w(x,t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_n(x_j) \phi_n(x)}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i(2\xi_n \omega_n \omega)} \quad (9)$$

其中 ξ_n 為系統阻尼比。令簡支樑在 x_j 位置受 F_j 之簡諧激振，在 x_i 位置之位移亦為簡諧響應，可得頻率響應函數 (FRF) 為：

$$H_{ij}(\omega) = \frac{w(x_i, \omega)}{F_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_i) \phi_n(x_j)}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i(2\xi_n \omega_n \omega)} \quad (10)$$

上式為連續系統之表示式，若考慮實際實驗模態分析過程，僅有有限且固定數目之量測點，因此原本為連續系統之樑結構即被離散化，而模態函數簡化為模態向量，原有之無限多個模態僅考慮有限個模態，則 FRF 可改寫如下：

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{n=1}^k \frac{\phi_{n,i} \phi_{n,j}}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i(2\xi_n \omega_n \omega)} \quad (11)$$

其中 k 為量測頻率範圍內之模態數目， $\phi_{n,i}$ 表第 n 個模態向量第 j 個元素， $\phi_{n,j}$ 表第 n 個模態向量第 i

個元素。

2.2 關聯性函數

關聯性函數 (Coherence Function) 是評估輸入與輸出信號之相關性，在此為評估結構之頻率響應函數正確性之指標。關聯性函數 γ^2 的表示式為：

$$\gamma^2 = \frac{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)}{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)} \quad (12)$$

當中的 $S_{xx}(\omega)$ 與 $S_{yy}(\omega)$ 為訊號輸入與輸出間的交叉能量密度函數 (Cross Spectrum)； $S_{yy}(\omega)$ 與 $S_{xx}(\omega)$ 為訊號輸入與輸出間的自身能量密度函數 (Auto Spectrum)。關聯性函數之值一般介於 0 與 1 之間，近於 1 表示訊號之輸入與輸出信號有良好的相關性，可判知 FRF 之可靠度高；接近 0 則表示二者之間的關聯性小，即 FRF 可靠度小。

2.3 模態振型比對 (MAC 與 MSF)

本文所用的振型比對方法有兩種，分別為模態保證指標 (MAC) 與模態比例因子 (MSF)，兩種方法皆是以數值的方式來表示振型比對的結果。用 MAC 與 MSF 做為評估實驗與理論所得振型之相關性的指標。

MAC 的表示式如下：

$$MAC(\{\phi_p\}, \{\phi_x\}) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_{x,j}) (\phi_{p,j}) \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\phi_{x,j}) (\phi_{x,j}) \right) \left(\sum_{j=1}^n (\phi_{p,j}) (\phi_{p,j}) \right)} \quad (13)$$

其中 $\{\phi_x\}$ 表示實驗得之振型向量， $\phi_{x,j}$ 為實驗所得振型之第 j 個元素； $\{\phi_p\}$ 表示理論得之振型向量， $\phi_{p,j}$ 為理論所得振型之第 j 個元素，* 表共軛複數運算。

MSF 的表示式如下：

$$MSF(\{\phi_x\}, \{\phi_p\}) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_{x,j}) (\phi_{p,j})}{\sum_{j=1}^n (\phi_{p,j}) (\phi_{p,j})} \quad (14)$$

$$MSF(\{\phi_p\}, \{\phi_x\}) = \frac{\sum_{j=1}^n (\phi_{p,j}) (\phi_{x,j})}{\sum_{j=1}^n (\phi_{x,j}) (\phi_{x,j})} \quad (15)$$

當實驗與理論所得之振型相同時，即 $\{\phi_x\} = \{\phi_p\}$ ，則 MAC 與 MSF 的結果都為 1；當二者之振型呈倍數的關係時，則 MAC=1 而 MSF=A 或 1/A。一般而言，若二者 MAC 的數值大於 0.9，則表示有良好的相關性；而當 MAC 的數值小於 0.05 時，則表示二者無相關性或在數學意義上即呈正交關係。

三、實驗設置

3.1 簡支樑模型

簡支之理想邊界為在邊界上的位移與彎曲力矩為零，即簡支在邊界上不能上下移動但可自由旋轉。本文所用簡支樑邊界模擬之製作方式是以一薄片來連接樑與基座，而薄片的材質分別用彈簧片、鋁薄片、鋼片來做測試，並以加貼膠的方式使樑與薄片二者重疊部分緊密貼合如圖一所示，貼膠為以樹脂將所焊部位附近黏緊。將實驗模態分析所得之自然頻率與理論之自然頻率做比較得出適合之簡支樑模擬方式，此部分參考王等[25]簡支樑之模態分析，文中以彈簧片、鋁薄片、鋼片、鋼片黏膠、彈簧片黏膠等材料與連接方式做比較，找出一最佳之組合方式。由表一與表二可知，彈簧片黏膠與理論值在前四個模態之自然頻率最接近，所以選擇此方式做為製作簡支樑邊界的模擬方式，最後並以此簡支樑做為實驗模態分析測試之對象，以驗證此簡支樑模型之正確性。

簡支樑的材料為鋼，用彈簧片 (spring sheet) 焊於樑之兩端，並以加貼膠的方式使樑與彈簧片二者重疊部分緊密貼合，簡支樑之材料性質如表三所示，圖二為所架構之簡支樑模型。

3.2 實驗架構

模態參數是描述系統的動態特性即自然頻率、模態阻尼比與模態振型，其求取方式可以是理論分析或實驗分析，本文在實驗方面以實驗模態分析的方法求取系統之模態參數。

實驗模態分析是用來求得結構物之動態特性的一種方法。利用訊號頻譜分析儀 (FFT analyzer) 求得結構的頻率響應函數，以曲線嵌合軟體 CADA-PC 求得結構之模態參數與合成 (synthesized) 頻率響應函數。曲線嵌合 (curve fitting) 即是模態參數估算法 (Modal Parameter Estimation Method) 為由頻率響應函數求取結構之模態參數。以下將敘述藉由實驗模態分析法，對簡支樑進行模態測試。

3.2.1 實驗儀器設備架構

本實驗之儀器架設如圖三所示，將衝擊錘之訊號線接於訊號分析儀之 A channel，衝擊錘做為驅動器 (actuator)；並將加速度計之訊號線接於 B channel，加速度計做為感測器 (sensor)。再透過 IEE-488 介面將訊號分析儀與個人電腦連接。衝擊錘對簡支樑結構做激振，激振的訊號會傳到訊號分析儀；而做為感測之加速度計亦將量測到的訊號，經由電荷放大器放大後，傳入訊號分析儀；再由訊號分析儀對所得之訊號做快速傅立葉轉換，求得簡支樑的頻率響應函數；最後再將頻率響應函數的資料傳入個人電腦，以曲線嵌合軟體 CADA-PC 做曲線嵌合工作，而得簡支樑的模態參數。

3.2.2 實驗方法與步驟

本實驗所用之簡支樑長為 38 公分，每隔 2 公分做一劃分，取各段之中點而分成 19 點，並依序給予編號，由 1 到 19，如圖四所示。實驗是將衝擊錘敲擊位置固定，每次都敲擊第 18 點，而移動加速度計的位置。每一個點敲擊三次取其平均；即可得到 19 組的頻率響應函數，再交由曲線嵌合軟體求取簡支樑的模態參數。求模態參數所用的軟體是 CADA-PC，曲線嵌合所用的方法為單自由度法 (SDOF) [26]。

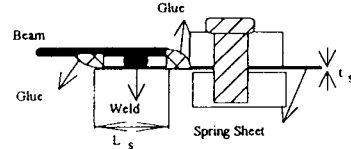
四、結果與討論

本節將對實驗與理論分析所得的結果作比較

與驗證，包含頻率響應函數、關聯性函數與模態參數等。

4.1 頻率響應函數之驗證

頻率響應函數如圖五 (a)、(b) 所示，圖五 (a) 為 $i=2$ 、 $j=18$ ，即輸入點為第 2 點，輸出點為第 18 點所得之頻率響應函數，稱為轉移頻率響應函數 (Transfer FRF)；圖五 (b) 為 $i=18$ 、 $j=18$ ，即輸入點與輸出點同為第 18 點所得之頻率



圖一、簡支邊界模擬示意圖

表一、理論值與各模擬方式之自然頻率比較 [25]

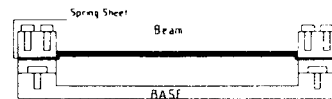
	Model1	Mode2	Mode3	Mode4
理論值(Hz)	32	128	289	515
彈簧片	66	129	301	508
鋁薄片	33	97	226	394
鋼片	35	95	224	356
鋼片黏膠	42	98	240	398
彈簧片黏膠	37	130	295	507

表二、理論值與各模擬方式自然頻率的誤差 [25]

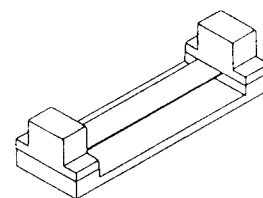
與理論之 誤差量 (%)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
彈簧片	106.2	0.7	4.1	1.3
鋁薄片	3.1	24.2	21.8	23.5
鋼片	9.3	25.7	22.5	30.8
鋼片黏膠	31.2	23.4	16.9	22.7
彈簧片黏膠	15.6	1.5	2.0	1.5

表三、簡支樑之材料性質

材料	鋼
長度	0.38m
寬度	0.04m
厚度	0.002m
密度	7870 kg/m^3
楊氏係數	$207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
蒲松比	0.292

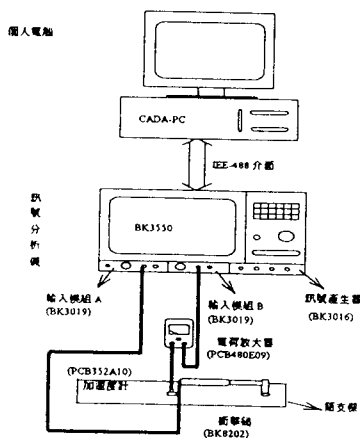


(a) 側視圖

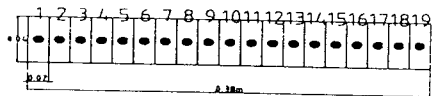


(b) 3D 視圖

圖二、簡支樑模型圖



圖三、實驗儀器架構



圖四、簡支樑分割情形及編號

響應函數，稱為同點頻率響應函數 (Point FRF)；圖中 3 條曲線分別為實驗、實驗合成 (Synthesized FRF) 和理論之頻率響應函數曲線，而實驗合成曲線為經由曲線嵌合得到之模擬曲線，由圖中可看出前四個模態範圍與實驗曲線相當吻合，且其尖銳度也相當，表示曲線嵌合過程之正確性。

由圖五 (a)、(b) 比較實驗結果與理論結果，前四個模態都相當吻合，且各模態的尖銳度也大致相同，顯示實驗分析結果與理論分析在前四個模態大致上都吻合。由圖中可看到實驗的曲線在 675Hz 處多出一模態，與理論結果之第五模態 805.25Hz 相差甚遠，由附錄可知，實驗之頻率響應函數在 812Hz 處有一模態應不是第五模態，猜測是由於邊界夾持不好或加速度計沒有準確置於樑之中心線處，因而產生的旋轉模態 (torsion mode)。

關聯性函數越接近 1，代表結構頻率響應函數之實驗結果的可信度越高，對應於圖六實驗結果之關聯性函數如圖六 (a)、(b) 所示，圖六 (a) 中在低頻處稍低，由於所對應之頻率響應函數沒有反共振點，所以除低頻外其餘之數值都接近 1。圖六 (b) 在低頻處與反共振點處偏低外，大致都接近 1。以整體言關聯性函數都接近 1，所以實驗的結果具可信度。

4.2 簡支樑之動態特性驗證

簡支樑之動態特性所要驗證的有自然頻率、阻尼比與模態振型。模態振型的驗證包括有圖形與數值的比對方式，數值的比對方式為 MAC 與 MSF 之驗證。

4.2.1 自然頻率驗證

本實驗取前四個模態，理論分析與實驗分析前四個模態之自然頻率及其誤差百分比如表五所示，由表四可知其誤差都在 3% 以內，顯示所製作之簡支樑結構在前四個模態相當正確。

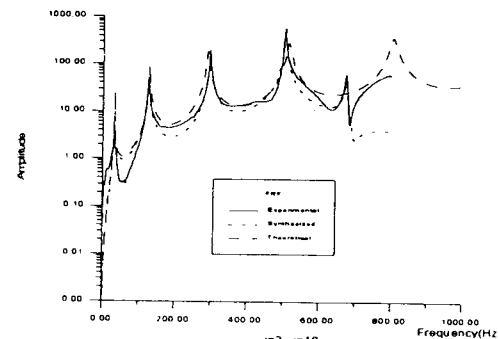
4.2.2 模態阻尼比之驗證

本文理論分析將阻尼比假設為 0.01。在實驗分析的過程中，由於量測系統加速度響應時，為了避免洩漏 (Leakage) 的現象，所以加上對數函數之加權函數 (Exponential Window)，因此所量測得的加速度響應會有加重阻尼的效應，所以由實驗得到的阻尼比不是真正結構的阻尼比，所以需加以修正 [27]。阻尼比之實驗值與修正值如表五所示。由表五可知除模態 1 的阻尼比 1.26% 較高外，其餘的 3 個模態阻尼比都在一般鋼鐵材料阻尼比的範圍之中，一般而言，模態數愈高，阻尼比之影響愈小，由表五亦可看出這樣的趨勢；就修正的幅度而言，符合模態數愈高修正之幅度愈小。第 1 個模態較高應該是由於低頻的表現不理想所致。

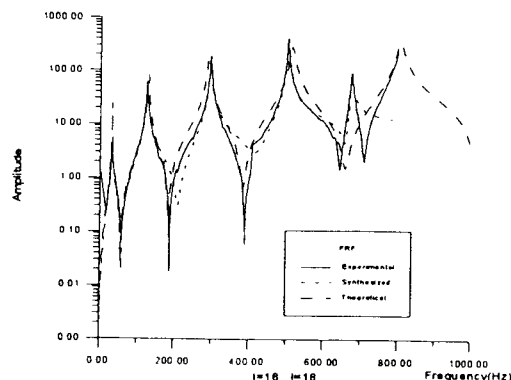
4.2.3 模態振型之驗證

本文探討簡支樑的前四個模態；如圖七 (a) - (d) 所示，為簡支樑前四個模態振型之實驗所得振型與理論所得振型之比較，根據圖七 (a) - (d) 可知，第 2-4 個模態之實驗與理論振型相當吻合，而實驗所得之第一模態振型在分割點為 9-15 點的振幅較理論所得之振幅大外，其餘之分割點則吻合。

實驗振型與理論振型之模態比例因子與實驗振型與理論振型之模態保證指標矩陣如表六與表七所示，由表中可看出除了第四個模態在模態保證指標的表現稍差外，為 0.8442，前四個模態之模態比例因子與模態保證指標矩陣對角線元素之值都非常接近 1，顯示實驗與理論所得振型相當吻合，而非對角線元素均趨近於零，表示各模態振型之正交性。

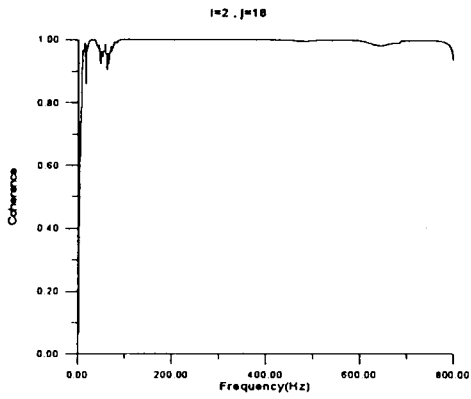


(a) $i = 2, j = 18$

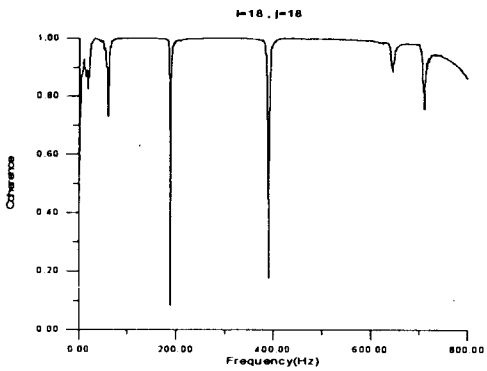


(b) $i = 18, j = 18$

圖五、實驗與理論之頻率響應函數之比較



(a) $i = 2, j = 18$



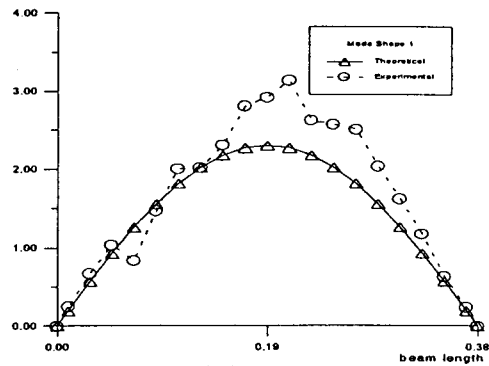
(b) $i = 18, j = 18$
圖六、關聯性函數

表四、理論與實驗分析前四個自然頻率及誤差

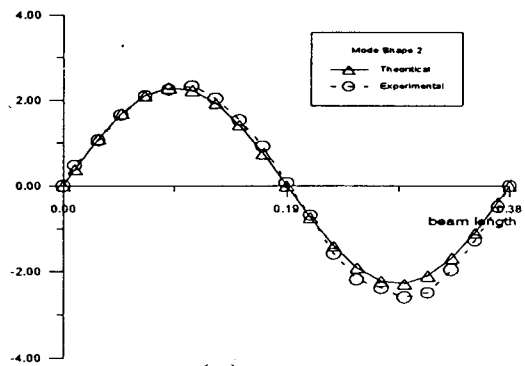
自然頻率	實驗值 (Hz)	理論值 (Hz)	誤差 (%)
第一模態	32.18	32.20	-0.062
第二模態	125.26	128.84	-2.85
第三模態	296.20	289.89	2.13
第四模態	504.67	515.36	-2.12

表五、前四個模態阻尼比及其修正值

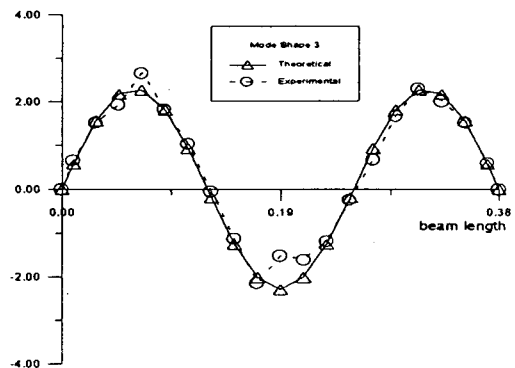
模態阻尼比	實驗值 (%)	修正值 (%)
第一模態	4.7	1.26
第二模態	1.26	0.38
第三模態	0.56	0.19
第四模態	0.36	0.15



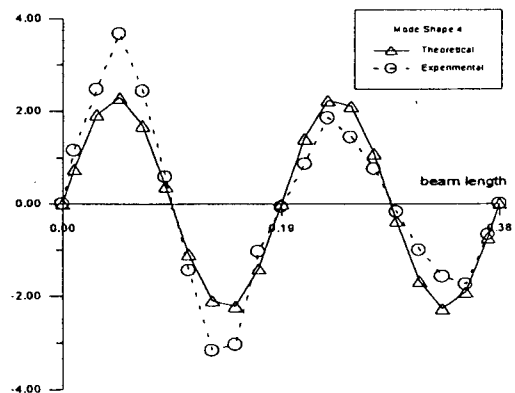
(a) Mode 1



(b) Mode 2



(c) Mode 3



(d) Mode 4

圖七、實驗與理論之振型

表六、實驗振型與理論振型之模態比例因子

實驗 理論	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	1.186-i0.058	-0.115+i0.037	-0.052+i0.006	0.022-i0.010
Mode 2	-0.026+i0.009	1.077+i0.030	-0.062-i0.003	-0.004+i0.001
Mode 3	0.054-i0.012	0.039+i0.014	0.939-i0.042	0.011+i0.018
Mode 4	-0.040-i0.052	0.016-i0.006	0.248-i0.038	1.028+i0.128

表七、實驗振型與理論振型之模態保證指標

實驗 理論	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Mode 1	0.9763	0.0100	0.0019	0.0004
Mode 2	0.0006	0.9949	0.0032	0.0000
Mode 3	0.0034	0.0019	0.9715	0.0005
Mode 4	0.0034	0.0002	0.0495	0.8442

五、結論

本文建構簡支樑結構並進行實驗模態分析與理論分析的比較，可歸納出以下幾點結論：

1. 由關聯性函數及相對應之頻率響應函數圖形可看出，除反共振點附近之關聯性函數較差外，是因為反共振點之響應小所以導致關聯性差，在共振點附近之關聯性函數都近於 1，顯示實驗結果之正確性。
2. 由實驗所得與合成之頻率響應函數圖形可看出此二曲線相當吻合，顯示曲線嵌合之正確性，由實驗所得與理論所得之頻率響應函數圖形，在前四個模態的頻率範圍內，其結果吻合，由實驗與理論結果可知，在前四個模態的範圍內，此簡支樑具正確性。
3. 由實驗與理論分析得到之自然頻率比較，在前四個模態之百分誤差皆在 3% 以內，所以證明此簡支樑實驗模態分析實驗正確。
4. 由阻尼比之實驗值與修正值可知除模態 1 的阻尼比 1.26% 較高外，其餘的 3 個模態阻尼比都在一般鋼鐵材料阻尼比的範圍之中。
5. 由振型、模態保證指數、模態比例因子之比較可知，實驗與理論所得之前四個模態振型相當吻合。
6. 綜合言之，所建構之簡支樑模型，在前四個模態之模態特性與理論分析相當吻合，因此，此簡支樑模型在前四個模態之頻率範圍內，其模擬結果有良好之一致性，未來可進一步可作為實驗模態分析之教具，及振動控制之應用分析。

六、參考文獻

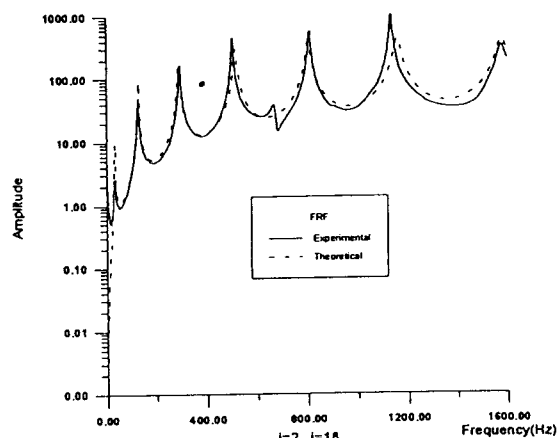
1. Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire, England.
2. Akio, N., 1992, "State of Art on Modal Analysis in Japan," *Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference*, pp. 227-232.
3. Wei, J. C., Zhang, Q., Allemqng, R. J., and Wei, M. L., 1989, "Correction of Finite Element Modal Via Selected Physical Parameters," *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, PP. 2131-2138.
4. Qualls, J. D., and Craig, R. R., Jr., 1993, "Design Sensitivity Modal Updating of A Payload Simulator," *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*, pp. 21-27.
5. Roy, N. A., Girard, A., and Bugeat, L.-P.,

- 1993, "Expansion of Experimental Mode Shapes - An Improvement of the Projection Technique," *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*, pp. 152-158.
6. Flanigan, C. C., 1991, "Correlation of Finite Element Modals Using Mode Shape Design Sensitivity," *Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference*, pp. 84-88.
7. Hillary, B., and Ewins, D. J., 1984, "The Use of Strain Gauges in Force Determination and Frequency Response Function Measurements," *Proceedings of the 2nd International Modal Analysis Conference*, pp. 627-634.
8. Lim, T. W., and Pillkey, W. D., 1992, "A Solution to the Inverse Dynamics Problem for Lightly Damped Flexible Structure Using a Modal Approach," *Computer and Structure*, Vol. 43, pp. 53-59.
9. Trujillo, D. M., and Busby, H. R., 1987, "Solution of an Inverse Dynamics Problem Using an Eigenvalue Reduction Technique," *Computer and Structure*, Vol. 25, pp. 109-117.
10. Fabunmi, J. A., 1987, "Feasibility of Dynamic Load Determination from Measured Mobilities," *Proceeding of the 1987 SEM Conference on Experimental and Mechanics*, pp. 845-850.
11. Lee, J. C., Huang, K. F., and Chou, Y. F., 1993, "Dynamic Characteristics Prediction for Rotating Elastic Bodies," *Proceedings of the 11th International Modal Analysis Conference*. pp. 572-580.
12. James, G. H., III, Carne, T. G., and Lauffer, J. P., 1995, "The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter extraction from operating Structures," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 10, No. 4, pp. 260-277.
13. Rivory, J. F., and Hansen, C. H., 1994, "Further Studies of the Dynamic Response of a Simply Supported Beam Excited by a Pair of Out-of-Phase Piezoelectric Actuators," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 5, pp. 654-664.
14. Zhang, P. Q., and Wu, Q. M., 1992, "Experimental Modal Analysis of Miniature Objects by Optical Measurement Technique," *The International Journal of Analysis and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, No. 4, pp. 243-253.
15. Sriram, P., Hanagud, S., and Craig, J. I., 1992,

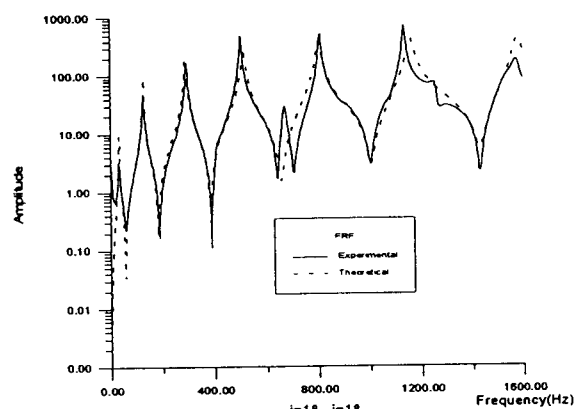
- “Mode Shape Measurement Using A Scanning Laser Doppler Vibrometer,” *The International Journal of Analysis and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, No. 3, PP. 169-178.
16. Wang, B. T., 1996, “Characterization of Transfer Functions for Piezoceramic and Conventional Transducers,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 7, pp. 390-398.
17. Clark, R. L., Fuller, C. R., and Wick, A., 1991, “Characterization of Multiple Piezoelectric Actuators for Structure Excitation,” *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 90, pp. 346-357.
18. Wang, B. T., and Wang, C. C., 1997, “Feasibility Analysis of Using Piezoceramic Transducer for Cantilever Beam Modal Testing,” *Smart Material Structure*, Vol. 6, pp. 106-116.
19. 陳榮亮, 1997, 「應用壓電材料於簡支板之實驗模態分析」, 碩士論文, 國立屏東技術學院, 屏東。
20. Champoux, Y., Brunet, S., and Berry, A., 1996, “On the Construction of a Simply Supported Rectangular Plate for Noise and Vibration Studies,” *Experimental Techniques*, Vol. 20, No. 1, pp. 24-26.
21. Ochs, J. B., and Snowdon, J. C., 1975, “Transmissibility Across Simply Supported Thin Plates. I. Rectangular and Square Plates with and without Damping Layers,” *Journal of Acoustical Society America*, Vol. 58, No. 4, pp. 832-840.
22. Wang, B. T., and Chen, R. L., 1997, “Experimental Modal Analysis of a Simply Supported Plate,” *Bulletin of National Pingtung University of Science and Technology*, Vol. 6, No. 4, pp. 273-281. (in chinese)
23. Meirovich, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York.
24. 王柏村, 1996, 振動學, 全華科技圖書股份有限公司, 台北。
25. 王柏村, 王家仁, 官宏仁, 1995, 「簡支板之實驗模態分析」, 屏東。
26. LMS Inc., 1993, *LMS CADA-PC User Manual*.
27. Trethewey, M. W., and Cafeo, J. A., 1992, “Tutorial: Signal Processing Aspects of Structure Impact Testing,” *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, No. 2, pp. 129-149.

附錄

圖八為由實驗所得之簡支板頻率響應函數，其頻率範圍由 0Hz~1.6kHz，圖八 (a) 為轉移頻率響應函數，即 $i=2, j=18$ ，圖八 (b) 為同點頻率響應函數，即 $i=18, j=18$ ；由圖八可知除了在 670Hz 外之相對極大值，即自然頻率，結果與理論值之前七個模態相吻合，如表八所示。



(a) $i=2, j=18$



(b) $i=18, j=18$

圖八、實驗與理論之頻率響應函數 (0Hz-1.6kHz)

表八、實驗與理論之自然頻率比較

自然頻率	實驗值 (Hz)	理論值 (Hz)	誤差 (%)
第一模態	32.18	32.20	-0.062
第二模態	125.26	128.84	-2.85
第三模態	296.20	289.89	2.13
第四模態	504.67	515.36	-2.12
-	670	無	-
第五模態	812	805.25	0.83
第六模態	1130	1159.56	-2.58
第七模態	1560	1578.29	-1.17

**The Validation of Modal Properties
for Simply Supported Beam**

Chun-Hsien Chiu, Bor-Tsuen Wang, Der-Ho Wu
Department of Mechanical Engineering
National Pingtung University of Science and
Technology
Pingtung, Taiwan, R. O. C.

ABSTRACT

This paper presents the experimental modal analysis (EMA) of a simply supported beam. The accuracy of the boundary conditions of the simply supported beam is demonstrated. The modal testing of the simply supported beam is performed by roving the impact hammer and fixing the accelerometer. A series of frequency response functions (FRFs) is obtained as well as the corresponding coherence functions. By the operation of modal parameter estimation method on FRFs, the structural modal parameters can be determined. Results show that the experimental and theoretical results, including FRFs, natural frequencies, modal damping ratios and mode shape, agree well. The constructed simply supported beam is validated and can be used as the demonstration tools of EMA as well as for the study of the structural vibration control.

Keywords : simply supported beam, experimental modal analysis(EMA), structural modal parameters