

簡支板實驗模態分析教具之製作

王柏村 陳榮亮

國立屏東技術學院機械工程技術研究所

摘要

本文主要是對簡支板從事實驗模態分析，首先根據理論之簡支板邊界條件及運動方程式，推導出理論之頻率響應函數與模態參數。其次探討簡支板簡支部份之實驗模擬方式，並實際做出簡支板之模型，再進行實驗模態分析得出結構之頻率響應函數、關聯性函數，再將頻率響應函數作曲線嵌合，得出實驗之模態參數。最後將實驗之結果與理論之結果作比較，以及將實驗與理論之振型以 MAC 與 MSF 判別正確性，經由理論與實驗之結果相驗證，簡支板結構之模擬結果能與理論相吻合。所以本文之簡支板結構可以作為實驗模態分析之示範教具，亦可從事相關之振動與噪音控制之後續研究。

關鍵詞：簡支板；實驗模態分析；頻率響應函數；模態參數；關聯性函數；振型；MAC；MSF；振動；噪音控制

一、前言

由於實際工程上所使用之結構都屬複雜之形狀，欲瞭解結構之動態特性，實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA)[1]是一個十分適合之方法，實驗模態分析是利用頻譜分析儀(FFT analyzer)[2]快速求得結構的頻率響應函數(Frequency Response Function)，再經由參數估測方法(modal parameter estimation method)，求得結構之模態參數(modal parameter)，如自然頻率(natural frequency)、阻尼比(damping ratio)、振型(mode shape)等。

實際上簡支之邊界條件狀況是非常不易模擬，而且也缺乏此類之文獻與資訊，其中 Ochs and Snowdion [3] 及 Champoux et al. [4] 曾經嘗試用剛性較軟之材質來模擬簡支的部份，並用實驗模態之方法成功的驗證模擬簡支之結果，本文即嘗試用這種模擬方式進行簡支板(Simply Supported Plate)之模擬，將其模擬之方法實際做出簡支板之結構，並利用實驗模態之方法驗證其可行性之探討。

本文實驗之方法是以衝擊錘施加點力於簡支板上作為驅動器(actuator)，來激振簡支板使它振動，並將加速度計(accelerometer)置於簡支板上，作為感應器(sensor)，並利用 BK 3550 訊號分析儀求得結構之頻率響應函數(Frequency Response Function, FRF)、關聯性函數(Coherence Function)[5]，再將頻率響應函數傳入 LMS CADA-PC [6]的曲線嵌合(curve fitting)軟體，作曲線嵌合求取結構之模態參數。除外並根據簡支板之邊界條件及運動方程式[7]，對簡支板作理論分析[8-10]，推導簡支板理論之方程式[11,12]，求取理論之簡支板模態參數及頻率響應函數[13]。藉由理論之模態參數驗證實驗之模態參數，探討其差異性，並觀察實驗之關聯性函數，探討實驗之頻率響應函數之可信度，以及將理論與實驗之頻率響應函數及其實驗之 Synthesize [5]結果作比較，最後再對理論之振型與實驗之振型作 MAC (Modal Assurance Criterion)與 MSF (Modal Scale Factor)[1,14]，分析實驗與理論振型之差異性，綜合以上各種實驗與理論比較方式，即可探討簡支板結構模擬之結果是否正確。

本文目的主要在探討如何模擬簡支板之邊界條件及其實際上架構之方式，並對簡支板結構進行實驗模態分析以進行驗證，並將簡支板之結構作為示範教具。

二、簡支板之振動分析

簡支板之振動分析包括簡支板之自由振動分析與簡支板之強迫振動分析，求取簡支板之理論自然頻率與頻率響應函數。

本文中簡支板之理論基本假設是根據克希荷夫板之基本假設[7]，可以根據克希荷夫板的假設定義出方板的運動方程式通式：

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho t_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{c} \frac{\partial w}{\partial t} = f(x, y, t) \quad (1)$$

其中

$$D = \frac{E_p t_p^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

$f(x, y, t)$: 外力函數

w : 簡支板之側向位移(transverse displacement)

ρ : 簡支板之密度

t_p : 簡支板之厚度

\bar{c} : 單位面積阻尼

E_p : 板之楊氏係數(Young's modulus)

ν : 蒲松比(Poisson ratio)

(一) 簡支板的自由振動分析

進行自由振動分析，首先令外力為零，並忽略阻尼效應，則可將(1)式之簡支板運動方程式表示為：

$$D\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)w + \rho t_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

簡支的邊界條件為在固定端僅承受簡力之作用，並不承受彎矩之作用，也就是位移與彎矩皆為零，由於本文考慮之簡支板為四邊都為簡支之情形，因此簡支板之邊界條件為如下所示：

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad x = 0, L_x \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad y = 0, L_y \end{aligned} \quad (5)$$

其中

L_x, L_y : 板之長度與寬度

利用分離變數法，即可求得其振型，如下所示：

$$\phi_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} \sin \frac{m\pi}{L_x} x \sin \frac{n\pi}{L_y} y \quad (6)$$

其中 \bar{W}_{mn} 為模態振幅(modal amplitude)，其表示形式由實際所受外力形式決定，於下節強迫振動分析作說明。

簡支板之自然頻率，如下：

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right] \sqrt{\frac{D}{\rho t_p}} \quad (7)$$

(二) 簡支板之強迫振動分析

假設此一外力為諧和激振的點力，則此點力可表示為：

$$f(x, y, t) = F_j \delta(x - x_{fj}) \delta(y - y_{fj}) e^{i\omega t} \quad (8)$$

其中

- F_j : 第 j 個點力之力量大小
- $\delta(x, y)$; 單位脈衝函數(Delta function)
- (x_{f_j}, y_{f_j}) : 點力作用位置座標

假設系統響應亦為諧和運動，由假設模態法(Assumed Mode method)則位移函數可表示成：

$$w(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{W}_{mn} \phi_{mn}(x, y) \quad (9)$$

因此當 $n = m$ 時，模態振幅為：

$$\bar{W}_{mn} = \frac{F_j \phi_{mn}(x_{f_j}, y_{f_j})}{\rho t_p \left(\frac{L_x}{2} \frac{L_y}{2}\right) [(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + i2\xi_{mn} \omega_{mn} \omega]} \quad (10)$$

其中

$$\xi_{mn} = \frac{\bar{c}}{2\omega_{mn} \rho t_b}$$

因此可求得在位置座標 (x_{a_i}, y_{a_i}) 之位移為：

$$w(x_{a_i}, y_{a_i}, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_{mn}(x_{f_j}, y_{f_j}) \phi_{mn}(x_{a_i}, y_{a_i})}{\rho t_p \left(\frac{L_x}{2} \frac{L_y}{2}\right) [(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + i2\xi_{mn} \omega_{mn} \omega]} \quad (11)$$

其中

- (x_{f_j}, y_{f_j}) : 第 j 個點力作用位置座標
- (x_{a_i}, y_{a_i}) : 第 i 個加速度計位置座標

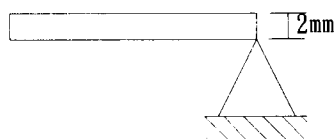
在 (x_{f_j}, y_{f_j}) 位置施加點力與在 (x_{a_i}, y_{a_i}) 位置測得加速度之頻率響應函數如下：

$$\alpha_{a_i f_j}(\omega) = \frac{\ddot{w}_i}{F_j} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_{mn}(x_{f_j}, y_{f_j}) \phi_{mn}(x_{a_i}, y_{a_i})}{\rho t_p \left(\frac{L_x}{2} \frac{L_y}{2}\right) [(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + i2\xi_{mn} \omega_{mn} \omega]} \quad (12)$$

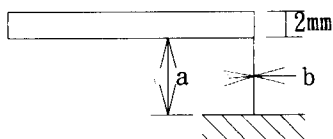
三、簡支板模型之分析與製作

(一) 簡支邊界之設計方法分析

簡支板理想的情形如圖一所示，板的邊緣上剪力為零，但彎矩不等於零。也就是說簡支板在邊緣上沒有上下移動之情形，但有旋轉的情形，由於圖一是一個理想的狀況，實際上並無法真正模擬出此狀況，所以在不影響簡支情形之邊界條件下，可利用圖二的情形來模擬簡支之部分，也就是用厚度為 b 的薄板將結構支撐住，來進行簡支的模擬[4]。



圖一、簡支板理想之簡圖



圖二、簡支板模擬情形的簡圖

(二) 簡支邊界材料選擇之方法

根據簡支撐之情形分析，簡支撐之等值旋轉彈簧常數(equivalent rotational spring constant) c' 為[4]：

$$c = \frac{E_b^3}{12a} \quad (13)$$

其中

E_s ：支撐材料之楊氏係數

b ：支撐材料之厚度

a ：支撐材料之高度

而簡支撐之旋轉彈簧常數 c' 必須小於結構之等值旋轉彈簧常數 c_x 、 c_y ，此常數定義為：

$$c_x = \frac{E_p I_p^3}{12l_x} \quad (14)$$

$$c_y = \frac{E_p I_p^3}{12l_y} \quad (15)$$

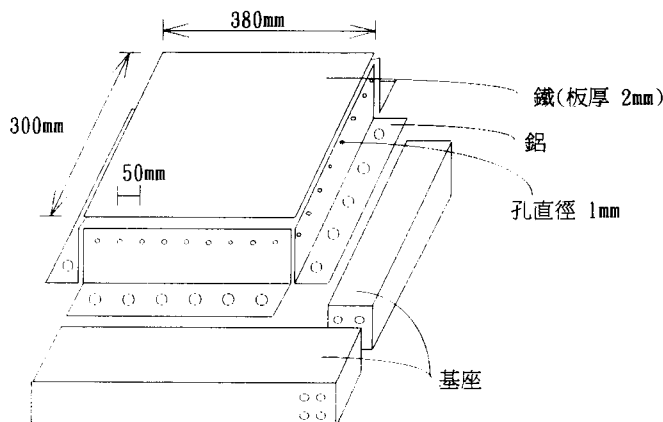
板之材料屬性如下表一所示，根據表一上的數據可以求出板之旋轉彈簧常數 $c_x = 363.16N$ 、 $c_y = 460N$ 。經過查詢與比對，可以使用 $a=100mm$ 、 $b=1.6mm$ L 型鋁材來模擬簡支的部份，鋁的楊氏係數為 $68.9 GPa$ ，因此可以根據(13)式求得 $c' = 235.18N$ ，完全符合 $c' < c_x < c_y$ 之要求，因此所選用簡支部份的材料能符合理論的要求。

表一、簡支板之材料性質

材料	鋼
長度 L_x	0.38 m
寬度 L_y	0.3 m
厚度 t_p	0.002 m
密度 ρ	7870 kg/m ³
楊氏係數 E	207×10 ⁹ N/m ²
蒲松比 ν	0.292

(三) 簡支板模型之建立

根據圖二簡支部份之模擬應用於簡支板之情形如圖三所示，在製作上簡支板之模擬是將鐵板四邊厚度的部份及 L 型鋁材高度之側面，長度大約每格 50mm 鑽一直徑為 1mm 之小孔，再利用小螺栓把板與 L 型鋁材鎖緊，將板支撐住，完成簡支部份之模擬，再用螺栓將簡支板固定於基座上，即完成簡支板之製作。



圖三、簡支板實際模擬的模型

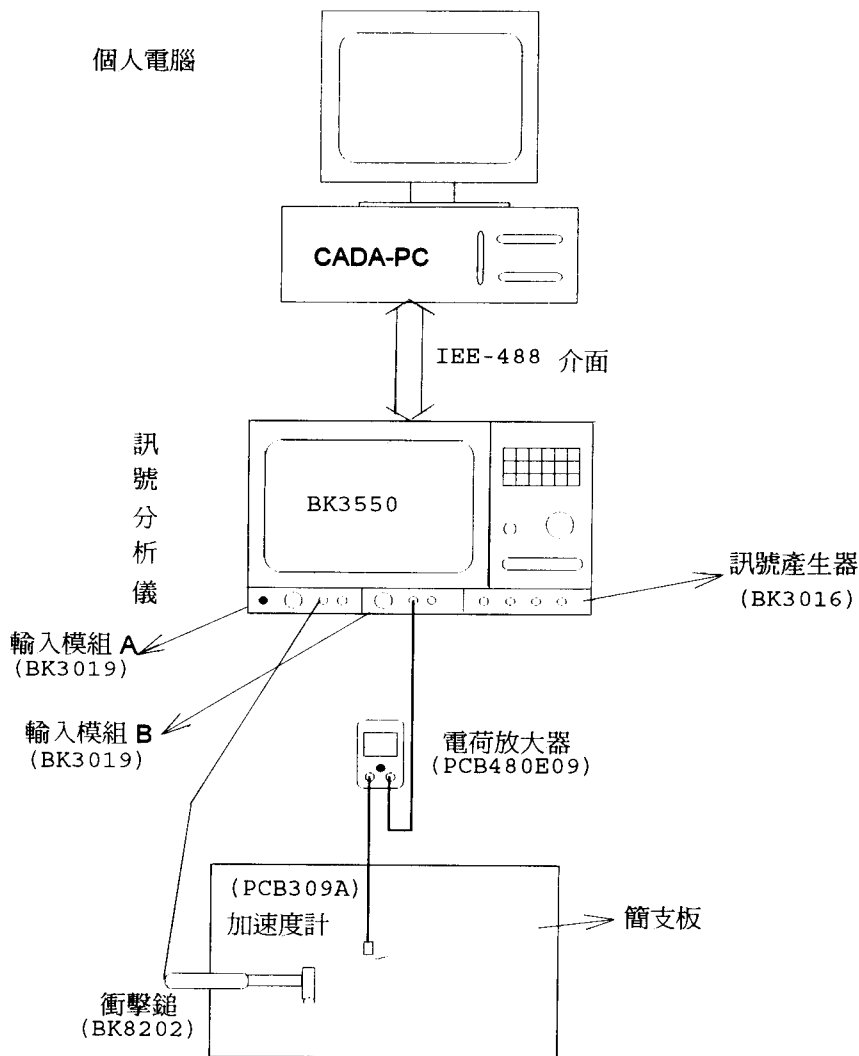
四、實驗模態分析簡介

實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA)是一個瞭解結構之動態特性十分合適的方法，實驗模態分析主要利用訊號分析儀(FFT analyzer)快速求得結構之頻率響應函數(Frequency Response Function, FRF)，再經由參數估測方法(Modal parameter estimation method)，求得結構之模態參數(modal parameter)，如自然頻率(natural frequency)、阻尼比(damping ratio)、振型(mode shape)等。

以下將藉著實驗模態分析方法，對簡支板結構進行模態測試，實驗之儀器架構與實驗之方法及步驟敘述如下。

(一) 實驗儀器之架構

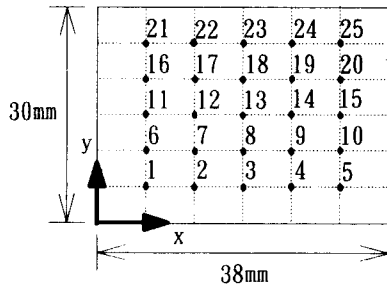
本實驗儀器之架構情形如圖四所示，將衝擊錘用導線接於訊號分析儀之 A 輸入模組，以及將加速度計用導線經過電荷放大器接於訊號分析儀之 B 輸入模組，再透過 IEE-488 介面將訊號分析儀與個人電腦相連接。其實驗之動作原理為，用衝擊錘作驅動器對簡支板結構激振，以加速度計作感應器，量取結構之響應訊號，經過電荷放大器將訊號傳入雙頻道訊號分析儀，由訊號分析儀對輸入之訊號作快速傅立葉轉換，求得簡支板結構之頻率響應函數，最後再將頻率響應函數結果傳入 CADA-PC 軟體作曲線拟合(curve fitting)的工作，即可求得簡支板之模態參數，即自然頻率、阻尼比、振型等。



圖四、實驗儀器架構圖

(二) 實驗方法與步驟

由於本實驗主要觀察簡支板前四個模態，所以在簡支板上僅取25點來做實驗即可，也就是在板的四邊各劃分為六個等分，並依序給予編號，如圖五所示。將加速度計固定在圖五中之 21 點，而移動衝擊錘敲擊在板上之每一點，其中當加速度計與衝擊錘接在 21 點時，需將加速度計固定在板之反面上，每一個點平均敲擊三次，即可得到 25 組頻率響應函數，再將之傳入 CADA-PC 軟體求作曲線嵌合，以取簡支板之模態參數。



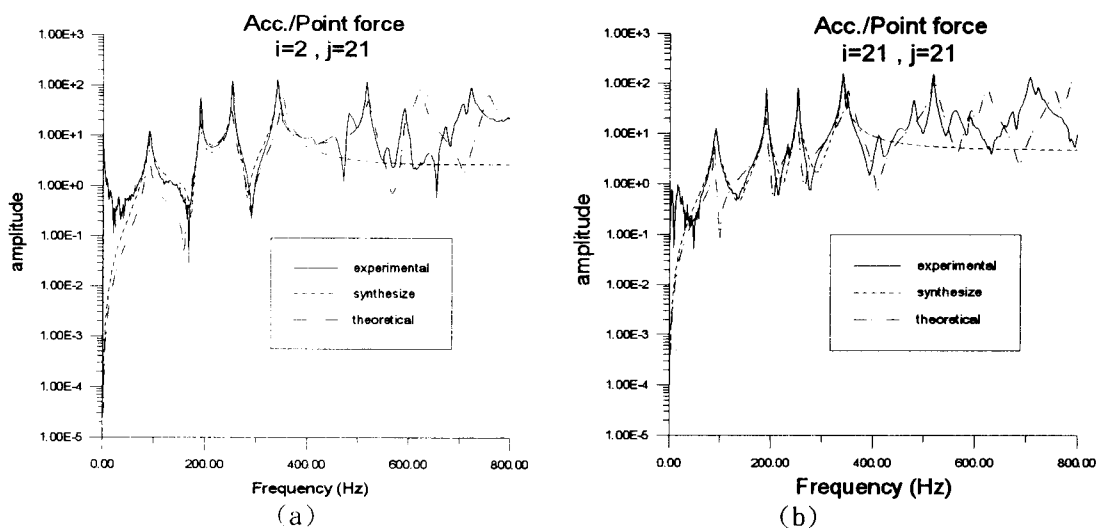
圖五、簡支板之分割情形及編號

五、結果與討論

以下將針對本文之實驗與理論結果，如頻率響應函數、模態參數及 MAC 與 MSF 作驗證與說明。

(一) 頻率響應函數之驗證

本實驗與理論之頻率響應函數(FRF)之結果如圖六(a)-(b)所示，圖六(a)中 $i=2$ 、 $j=21$ ，即輸入點為第 21 點，輸出點為第 2 點，所得之頻率響應函數稱為轉移頻率響應函數(transfer FRF)；圖六(b)中 $i=21$ 、 $j=21$ ，即輸出與輸入點皆為第 21 點，其頻率響應函數稱為同點頻率響應函數(point FRF)，圖中 3 條曲線分別為理論、實驗及 synthesize 之頻率響應函數曲線，其中 synthesize 曲線為曲線嵌合得到之模擬曲線，可看出在前四個自然頻率範圍與實驗曲線若相當吻合顯示曲線嵌合之正確性。

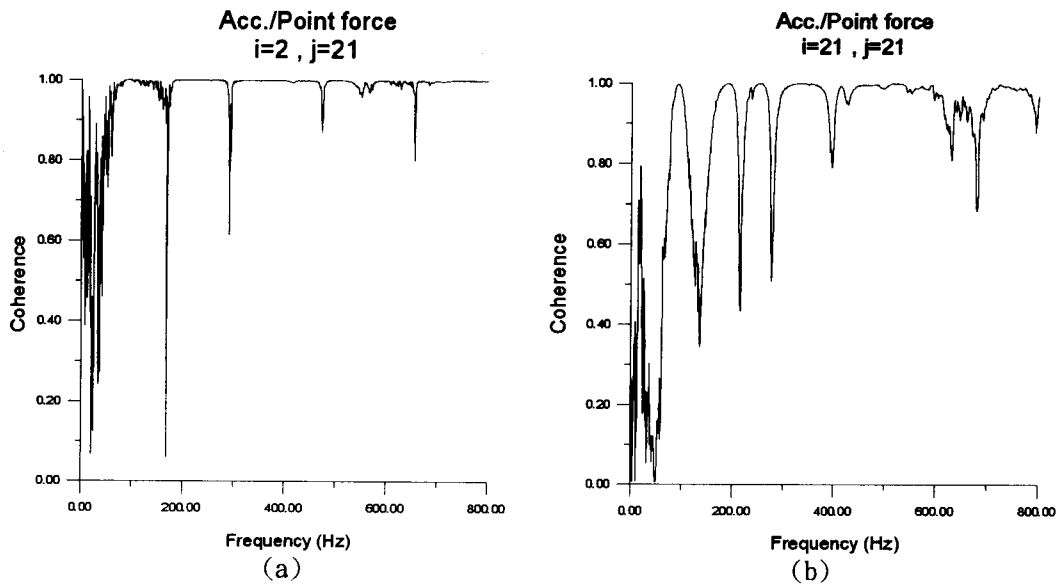


圖六、實驗與理論之頻率響應函數之比較 (a) $i=2, j=21$ (b) $i=21, j=21$

根據實驗之結果而言，由圖六(a)-(b)中可以看出，實驗之前四個模態的頻率響應函數與 Synthesize 之結果相當之吻合，但實驗之頻率響應函數在低頻上比起 Synthesize 與理論之情形就稍差些，主要是實驗上之雜訊所引起，雖然如此仍不會影響前四個模態之結果，由此可證明曲線嵌合之結果相當正確。而在理論與實驗之比較中，圖六(a)之第一個模態理論與實驗誤差稍大些，但是峰值仍出

現在同一個頻率上，圖六(b)之第一個模態實驗之反共振點與理論之反共振點並不一致，但仍不會影響實驗之結果。

關聯性函數越接近於 1，代表結構之頻率響應函數可信度越高，對應於圖六之關連性函數結果如圖七(a)-(b)所示，圖七(a)中之關聯性函數大約接近在 1，但是低頻處及反共振點附近，關聯性函數值偏低，此乃因為響應小會導致關聯性偏低。而圖七(b)中之關聯性函數大致上稍差些，尤其是在反共振點附近，但整體而言大致上仍約保持在 1，所以本實驗之結果整體來說仍為可接受。



圖七、關聯性函數之圖形 (a) $i=2, j=21$ (b) $i=21, j=21$

(二) 自然頻率之驗證

由於本實驗只看前四個模態，所以自然頻率僅分析前四個模態之自然頻率，而實驗與理論之前四個自然頻率之比較如表二所示，由此表可以看出其自然頻率誤差百分比呈現於正負之間變動，並沒有完全偏向正或負，若自然頻率誤差百分比之結果完全偏向正或負，則代表結構或是實驗有問題，所以由表二可以判斷出本實驗架構之簡支板相當正確的。

表二、理論分析與實驗分析前四個自然頻率之誤差百分比

自然頻率	實驗值 (Hz)	理論值 (Hz)	誤差百分比 (%)
$f_{1,1}$	90.12	87.711608	2.746
$f_{2,1}$	189.96	188.744605	0.644
$f_{1,2}$	252.20	249.813438	0.955
$f_{2,2}$	341.23	350.846434	-2.741

(三) 阻尼比之驗證

由於理論分析並無法求得阻尼比，因此理論分析中之阻尼比一律假設為 0.01。但是實驗上可以藉由參數估測方法求得阻尼比，由於實驗量測中，加速度計響應加入對數函數(Exponential function)之加權函數(weighting function)之效應，所以加速度計所量之訊號會有加重阻尼之效應，因此實驗所得到之阻尼比並非結構真正之阻尼比，所以必須加以修正(15)，而修正之結果如表三所示。由此可知(1,1)模態之阻尼比顯然比較大，其餘三個模態之阻尼比就比較接近一般鐵材之阻尼比。一般而言，對於結構之阻尼比會隨著模態數增加而減少，而且修正之幅度也比較小，主要因為模態數越高、阻尼之影響越小。由表三得知(2,2)模態之阻尼比卻反而增加，但是其阻尼比依舊很小，也很接近實際一般鐵材之阻尼比，可能由實驗之誤差所引起。針對其修正之幅度而言，完全符合模態數越高修正之幅度越小之情形。

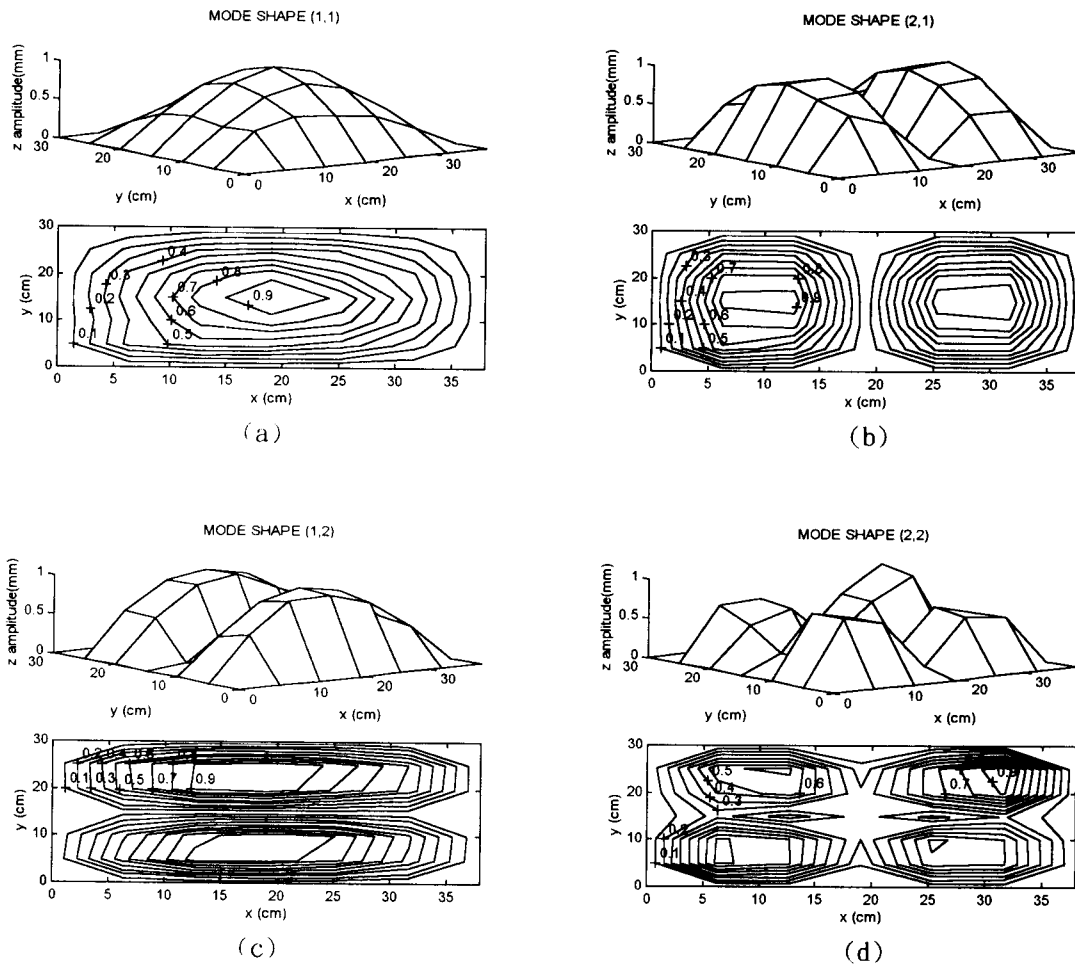
表三、阻尼比之誤差百分比

阻尼比	實驗值 (%)	修正值 (%)
$\xi_{1,1}$	2.8	2.241
$\xi_{2,1}$	0.41	0.145
$\xi_{1,2}$	0.36	0.16
$\xi_{2,2}$	0.62	0.4724

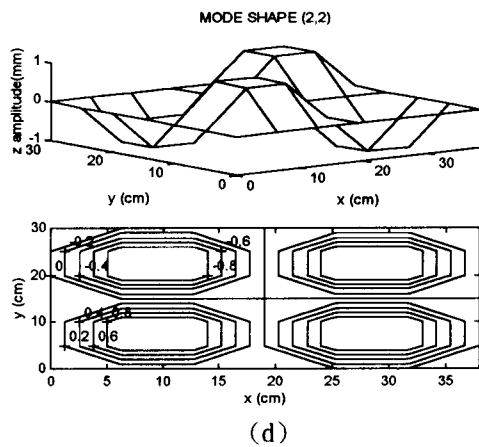
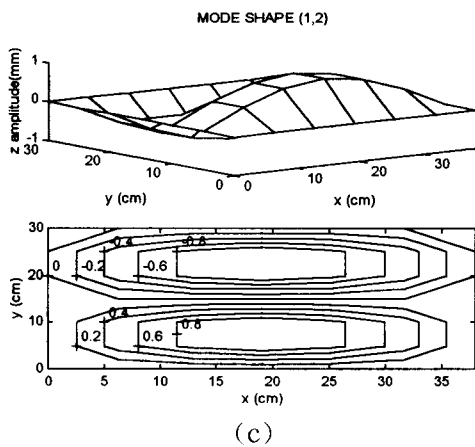
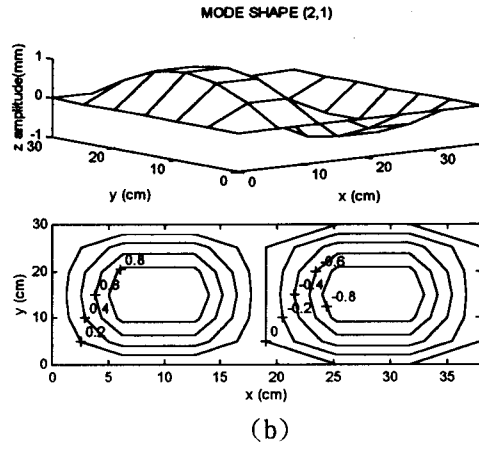
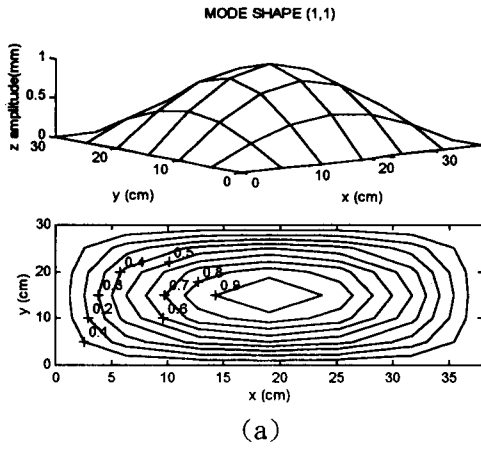
(四) 振型之驗證

由於本實驗目標僅探討前四個模態，所以實驗上與理論上皆僅列出前四個模態之振型，如圖八 (a)-(d) 及圖九 (a)-(d) 所示。由圖八(b)-(d)可以看出實驗上所得之振型是取其振幅之大小 (amplitude) 之絕對值，因此所畫出之振型圖形皆為正值。根據實驗上與理論上之振型比較，如圖八 (a)-(d) 及圖九 (a)-(d) 所示，實驗與理論之各個模態振型皆相當吻合。

實驗振型與理論振型之 MSF 與 MAC 矩陣如表四及表五所示，由表中可看出 MSF 與 MAC 對角線之值都大於 0.9，而且也非常的接近 1，而非對角線之值遠低於 0.05，由此可判斷實驗與理論之振型相當一致，其中 MSF 值出現複數，此乃因為實驗得到之振型為複數振型，包含阻尼效應所致，微小的虛數即表示實際振型有微小之相位角變化，在理論分析所之振型則為純實數振型 (real mode)，因為自由振動之實驗分析未包含阻尼效應。



圖八、實驗之振型 (a) (1,1)模態 (b) (2,1)模態 (c) (1,2)模態 (d) (2,2) 模態



圖九、理論之振型 (a) (1,1)模態 (b) (2,1)模態 (c) (1,2)模態 (d) (2,2) 模態

表四、實驗振型與理論振型之 MSF

mode	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
(1,1)	0.996-i0.001	0.0154-i0.0013	-0.0411+i0.0091	-0.0113+i0.0025
(2,1)	-0.0028-i0.0105	-0.996-i0.023	0.0122-i0.0254	0.0161+i0.0114
(1,2)	0.0173-i0.00002	0.0083+i0.0205	0.997+i0.0116	0.0174-i0.0005
(2,2)	-0.0064-i0.0064	0.0103+i0.0035	-0.0022-i0.0025	-0.964+i0.0388

表五、實驗振型與理論振型之 MAC

mode	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
(1,1)	0.9914	0.00024	0.0017	0.00013
(2,1)	0.000008	0.9912	0.00015	0.00026
(1,2)	0.0003	0.00007	0.9931	0.0003
(2,2)	0.00004	0.0001	0.000005	0.9287

六、結論

根據本實驗對簡支板模型之實驗模態分析及其理論分析所得出結果，如頻率響應函數、關聯性函數及模態參數等，可以歸類出以下幾個結論：

1. 由頻率響應函數可知，實驗之頻率響應函數比起理論之頻率響應函數在低頻及高頻上稍差些，主要分別受實驗之雜訊與取樣點太少所引起，但在前四個模態之頻率範圍仍相當好，所以實驗與理論模擬結果相吻合。
2. 由關聯性函數及頻率響應函數之圖形可判斷出，由於接近反共振點的附近響應小，關聯性函數較差，在共振附近關聯性函數接近於 1，因此可知實驗之正確性。
3. 實驗得到之自然頻率之誤差百分比並沒有完全偏向正或負的情形，而且都在 3% 以內，所以證明簡支板結構實驗相當正確。
4. 在阻尼比之修正方面，除了(1,1)模態阻尼比偏高外，其餘都很接近鐵材之阻尼比，且阻尼比修正之幅度，也有模態數越高修正幅度越小之情形，表示頻率越低阻尼影響越大，所以修正之幅度也越大。
5. 由振型、MAC、MSF 之比較得知，實驗與理論之振型形狀相當吻合，證明簡支板實驗結果之正確性。
6. 由以上之結論中可推斷出，本實驗之簡支板結構製作上相當的正確，完全可以模擬出理論簡支板之情形，可供實驗模態分析之示範教具，更可作為後續振動與噪音控制之相關研究。

七、參考文獻

1. Ewins, D. J., 1986, *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire England.
2. B&K Inc., 1992, *Multichannel Analysis System Type 3550 Documentation*.
3. Ochs, J. B., and Snowdon, J. C., 1975, "Transmissibility Across Simply Supported Thin Plates. I. Rectangular and Square Plates with and without Damping Layers," *Journal of Acoustical Society America*, Vol. 58, No. 4, pp. 832-840.
4. Champoux, Y., Brunet, S. and Berry, A., 1996, "On the Construction of a Simply Supported Rectangular Plate for Noise and Vibration Studies," *Experimental Techniques*, Vol. 20, No. 1, pp. 24-26.
5. Park, Y., 1994, "Improved Estimation of Frequency Response Function," *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 9, No. 2, pp. 99-110.
6. LMS Inc., 1993, *LMS CADA-PC User Manual*.
7. Szilard, R., 1974, *Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
8. Meirovich, L., 1986, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York.
9. Meirovich, L., 1967, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York.
10. William, T. T., 1972, *Theory of Vibration with Application*, Chapman & Hall, New York.
11. Gorman, D. J., 1978, "Free Vibration Analysis of The Complifely Free Rectangular Plate by The Method of Superposition," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 57, No. 3, pp. 437-447.
12. Leissa, A. W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 31, No. 3, pp. 257-293.
13. 王重杰，1995，「應用壓電材料於結構之實驗模態分析」，碩士論文，國立屏東技術學院，屏東。
14. Heylen, W., and Janter, T., 1990, "Extensions of the Modal Assurance Criterion," *Transactions of the ASME*, Vol. 112, pp. 468-472.
15. Trethewey, M. W., and Cafeo, J. A., 1992, "Tutorial: Signal Processing Aspects of Structural Impact Testing," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, No. 2, pp. 129-149.