

應用壓電驅動器於懸臂樑之實驗模態分析

王重杰、王柏村

國立屏東技術學院機械工程技術研究所

摘要

本論文旨在以壓電驅動器取代傳統使用之衝擊錘或激振器，配合加速度計作感應器，對懸臂樑作實驗模態分析。文中先以理論推導加速度計與壓電驅動器間之頻率響應轉換函術，並得知加速度振型為位移振型，而壓電驅動器振型為其兩端斜率差振型，在懸臂樑之應用，二者恰為鏡像映射關係，實驗證明可成功地得到前四個模態之自然頻率與阻尼比，除了低頻的第一個振型差異較大外，其餘振型皆與理論振型相當吻合。此測試方式將可應用到結構系統偵測，甚至遙控檢測。

關鍵辭：壓電驅動器，實驗模態分析，樑

一、前言

模態分析為結構動態分析常用的方法之一，而實驗模態分析則是利用頻率分析儀快速求到結構的頻率響應函數，再經由參數估測方法得到結構之模態參數，如自然頻率及振型。傳統的實驗模態分析，其轉換器(transducer)之選用，多以激振器或衝擊錘施加點力於結構作為驅動器，來激發結構的振動，並將加速度計則置於結構上，作為感應器，以求取結構之模態參數(Ebersbach and Irretier, 1989; Han and McConnell, 1991; Wright and Al-Hadid, 1991; El-Deeb and Royles, 1992; Song and Koss, 1993; Worden et al., 1994)。但傳統的驅動器及感應器都有體積大、實驗操作不便以及價格昂貴等缺點。

壓電材料質量輕、體積小、價格便宜的性質，以及具有良好的壓電特性，其中壓電片(PZT)適合當作驅動器。有關壓電片的理論模式，已有許多學者提出，Crawley and de Luis(1987)最早完整地提出壓電片與結構耦合(coupled)的靜態模式(static model)，包括理想黏在結構表面及嵌合於結構中兩種不同組合的驅動器；並以此推導與懸臂樑耦合之動態模式，最後以實驗證明理論模式。Im and Atluri(1989)則提出與壓電片耦合之樑，其統御方程式除了彎曲變形外，亦考慮剪力及軸向力的作用。Wang and Rogers(1991a)應用古典複合層板理論於壓電驅動器，得到驅動器的等效力及彎矩。Wang and Rogers(1991b)並利用其結果發展層板的應變能模式，導出純彎曲變形壓電片耦合於複合層板及樑的驅動模式。Clark et al.(1991)則探討簡支樑以壓電片驅動的理論模式，並與實驗相驗證，以上之研究，其壓電驅動器皆上下對稱耦合於結構。Gibbs and Fuller(1992)以及Charette et al.(1994)則發展非對稱性壓電片驅動樑的理論模式，考慮壓電片只激振樑的單邊，會因非對稱性而同時得彎曲方向的垂直位移及拉力方向的縱向位移。亦有研究將壓電轉換器發展於模態分析之應用，Sun et al.(1993)由壓電片的electric admittance推導出頻率響應函數，進行樑的實驗模態分析，得到曲率振型。Wang(1995)則推導出傳統轉換器與壓電轉換器四種組合，彼此頻率響應函數及振型的關係，其結果可應用於簡支樑的實驗模態分析。

本文目的，則是嘗試以產生純彎矩之壓電片(Wang and Rogers, 1991b)作驅動器以取代傳統之衝擊錘或激振器，匹配以加速度計作感應器，從事懸臂樑結構之實驗模態分析。文中以Wang(1995)之理論基礎，推導出懸臂樑之加速度計與壓電片間之頻率響應函數，以充份了解激振與響應間之關係，並以實驗驗證以壓電片作驅動器進行懸臂樑之模態分析，確實可以得到自然頻率、阻尼比與振型等模態參數。

二、理論分析

懸臂樑的自由振動分析

考慮長度為 L_b 之均勻懸臂樑，如圖1所示。引用尤拉樑理論，即忽略剪力變形(Shear deformation)及轉動慣量(Rotary Inertia)的效應，且不考慮阻尼效應，則懸臂樑自由振動的運動方程式為：

$$E_b I_b \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho_b b_b t_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (1)$$

其中 y 為懸臂樑的側向位移； E_b 為懸臂樑的楊氏係數； I_b 為懸臂樑的截面慣性矩； ρ_b 為懸臂樑的密度； b_b 為懸臂樑的寬度； t_b 為懸臂樑的厚度； $p(x, t)$ 為力量函數；下標 b 代表懸臂樑。

懸臂樑的邊界條件，一端為固定端，懸臂樑的位移及斜率為零；而一端為自由端，其彎矩及剪力為零：
在 $x=0$ ，

$$y(0) = \frac{\partial y(0)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

在 $x=L_b$ ，

$$E_b I_b \frac{\partial^2 y(L_b)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (E_b I_b \frac{\partial^2 y(L_b)}{\partial x^2}) = 0 \quad (3)$$

由自由振動分析可得自然頻率為：

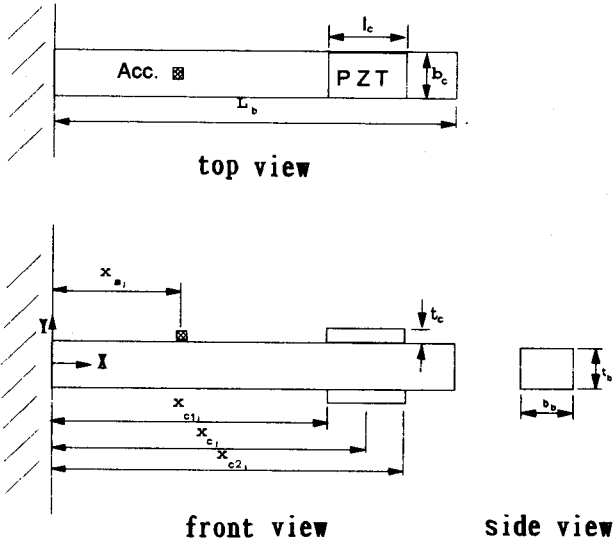


圖1. 加速度計與壓電驅動器於懸臂樑之位置系統圖

$$\omega_n = (\alpha_n L_b)^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b b_b t_b L_b^4}} = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{E_b I_b}{\rho_b b_b t_b}} \quad (4)$$

其中(Meirovitch, 1986)

$$\begin{aligned} \alpha_1 L_b &= 1.875104 \\ \alpha_2 L_b &= 4.694091 \\ \alpha_3 L_b &= 7.854757 \\ &\vdots \end{aligned}$$

而振型為：

$$\phi_n(x) = \cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x - \sigma_n (\sinh \alpha_n x - \sin \alpha_n x) \quad (5)$$

其中

$$\sigma_n = \frac{\sinh \alpha_n L_b - \sin \alpha_n L_b}{\cosh \alpha_n L_b + \cos \alpha_n L_b} \quad (6)$$

懸臂樑壓電片的強制振動分析

當壓電片 (piezoceramic patch) 對稱貼於懸臂樑上下兩端，且上下施以反相電壓，如圖1所示。此時壓電片兩端形成等效力矩，當考慮諧合激振時，所造成的力量函數為可表示成(Wang and Rogers, 1991b)：

$$p(x, t) = M_{eq} \left[\delta'(x - x_{c1j}) - \delta'(x - x_{c2j}) \right] e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$M_{eq} = C_0 \Lambda = \frac{t_b^2 E_b}{6} K b_c \Lambda \quad (8)$$

$$K = \frac{6}{6 + \Psi} \quad (9)$$

$$\Psi = \frac{E_b t_b}{E_c t_c} \quad (10)$$

$$\Lambda = \frac{d_{31} V_c}{t_c} \quad (11)$$

其中， x_{c1j} 、 x_{c2j} 為第j個壓電片兩端的位置座標； M_{eq} 為壓電片所形成的等效力矩；而此力矩分布於壓電片的兩端，則以脈衝函數的一次微分來表示。 M_{eq} 為下列參數之函數： Λ 為壓電片所產生的應變； Ψ 為有效勁度比 (effective stiffness ratio)； V_c 為施加電壓； d_{31} 為壓電應變常數 (piezoelectric dielectric strain constant)； E_c 為壓電片的楊氏係數； b_c 為壓電片的寬度； t_c 為壓電片的厚度；下標c代表壓電片。

假設系統亦為諧和運動，利用假設模態法 (Assumed

Mode method)，令 $y(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n \phi_n(x)$ ，代入運動方程

式，並乘上 $\phi_n(x)$ ，取積分 $\int_0^{L_b} dx$ ，因為 $\phi_n(x)$ 為正交函數，因此可化簡得

$$\bar{W}_n = \frac{1}{L_b} \frac{M_{eq} [\phi_n'(x_{c2j}) - \phi_n'(x_{c1j})]}{\rho_b b_b t_b (\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (12)$$

其中， \bar{W}_n 為模態振幅 (modal amplitude)。故位移為：

$$y(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_b} \frac{\phi_n(x) M_{eq} [\phi_n'(x_{c2j}) - \phi_n'(x_{c1j})]}{\rho_b b_b t_b (\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (13)$$

可推導在 x_{c1j} 、 x_{c2j} 位置之壓電片受 V_c 電壓作用與在 x_a 位置加速度之頻率響應函數如下：

$$\alpha_{acj}(\omega) = \frac{\ddot{y}}{V_c} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_b} \frac{C_0 d_{31} \phi_n(x_a) [\phi_n'(x_{c2j}) - \phi_n'(x_{c1j})]}{\rho_b b_b t_b (\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (14)$$

若令 x_{c_j} 為第j個壓電片中點的位置座標， x_n 為第i個壓電薄膜中點的位置座標，如圖1所示， $x_{c1j} = x_{c_j} - l_c/2$ ， $x_{c2j} = x_{c_j} + l_c/2$ ，考慮比例阻尼 (proportional damping)，則頻率響應函數可表示成：

$$\alpha_{acj} = \frac{\ddot{y}_a}{V_c} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_b b_b t_b} \frac{\Phi_n^a \Phi_n^c}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i2\zeta_n \omega_n \omega} \quad (15)$$

其中

$$\Phi_n^a = \sqrt{\frac{1}{L_b}} \phi_n(x_a) \quad (16)$$

$${}_j\Phi_n^i = \sqrt{\frac{1}{L_c}} k_c [\phi_n'(x_{c_j} + l_c/2) - \phi_n'(x_{c_j} - l_c/2)], k_c = \frac{C_{\phi d_{31}}}{t_c} \quad (17)$$

$$\phi_n'(x) = \alpha_n [\sinh \alpha_n x + \sin \alpha_n x - \sigma_n (\cosh \alpha_n x - \cos \alpha_n x)] \quad (18)$$

${}_i\Phi_n^*$ 、 ${}_j\Phi_n^i$ 分別為加速度、壓電片的第 n 個振型的第 i 或 j 個元素， ${}_i\Phi_n^*$ 為懸臂樑之正交化位移振型，而 ${}_j\Phi_n^i$ 為懸臂樑之在壓電片兩端的斜率差振型。Wang (1995) 證明在簡支梁之應用時，此壓電振型恰與位移振型成比例關係。但是在此懸臂樑之應用並非如此，圖 2 及圖 3 分別顯示由式 (16) 及 (17) 理論分析所得的懸臂樑前四個模態之位移振型及在壓電片兩端的斜率差振型，由比較圖 2 與圖 3 可看出壓電轉換器其節點特性與傳統轉換器相同；但其固定端之振幅最大，而自由端之振幅最小，與傳統轉換器相反，恰成鏡像映射 (mirror image)。

在此特別說明的是，當驅動器之激振點固定時，懸

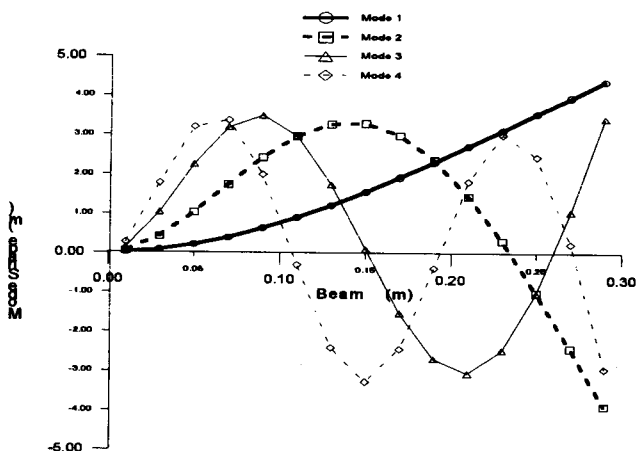


圖 2. 理論分析前四個模態加速度計之位移振型

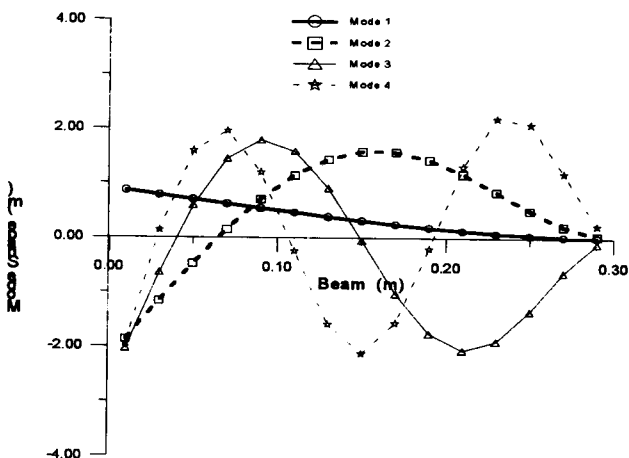


圖 3. 理論分析前四個模態之壓電轉換器兩端斜率差振型

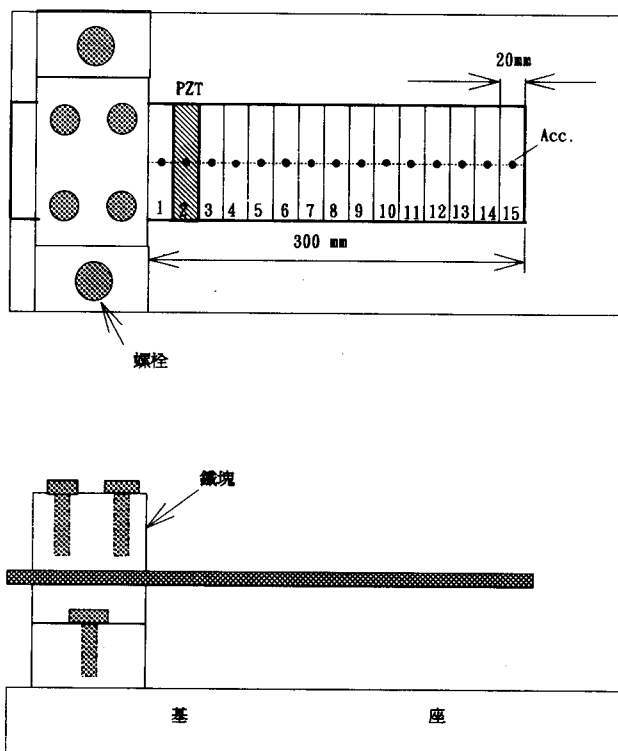


圖 4. 實驗模擬之懸臂樑

臂樑之振型由感應器之振型決定；反之，當感應器之測量點固定時，懸臂樑之振型由驅動器之振型決定 (Wang, 1995)。在實驗中乃將壓電片固定，而移動加速度計，故可正確得到位移振型，此點將在結果部份再作討論。

三、實驗分析

實驗模態分析是利用頻率分析儀快速求到結構的頻率響應函數，再經由參數估測方法得到結構之模態參數。本文實驗用壓電片作為驅動器，以及用加速度規作為感應器，並利用 BK3550 訊號分析儀，以及 LMS CADA-PC 軟體的曲線嵌合 (curve fitting) 功能求得模態參數。

實驗裝置用兩鐵塊以螺栓鎖緊，固定於基座上，兩鐵塊中間夾一鋼片，作為模擬之懸臂樑，此鋼片長為

表 1. 懸臂樑之材料性質

材料	鋼
長度(L)	0.3m
寬度(b)	0.04m
厚度(h)	0.002m
密度(ρ)	7870 kg/m ³
楊氏係數(E)	207 × 10 ⁹ N/m ²

表2. 壓電材料性質

壓電片
$E_c = 6.3 \times 10^{10} (N/m^2)$
$\rho_c = 7650 (kg/m^3)$
$\nu_c = 0.28$
$d_{31} = d_{32} = 166 \times 10^{-12} (m/V)$
$t_c = 1.905 (mm)$

0.3m，寬為0.04m，厚度為0.002m；將懸臂樑於長度方向分成15格，幾何形狀如圖4所示，儀器連線圖如圖5，實驗所使用鋼樑之物理性質如表1，壓電片之性質，則列於表2。

如圖4所示，將壓電片割成與方格同樣大小(0.02m×0.04m)，將兩塊壓電片上下對稱貼於第二格，並以導線由訊號產生器輸入White noise之連續性的Random

表3. 數值分析前十模態之自然頻率

模態數	自然頻率(Hz)
1	18.411
2	115.377
3	323.058
4	633.064
5	1046.501
6	1563.291
7	2183.440
8	2906.946
9	3733.812
10	4664.034

訊號，使壓電片產生應變，進而激振懸臂樑，激振平均數為30次。加速度計則依序安置於14個格子的中點(除第二格外)，如此則可獲得14組頻率響應函數，再將其傳入CADA-PC軟體中處理，即可求得模態參數。

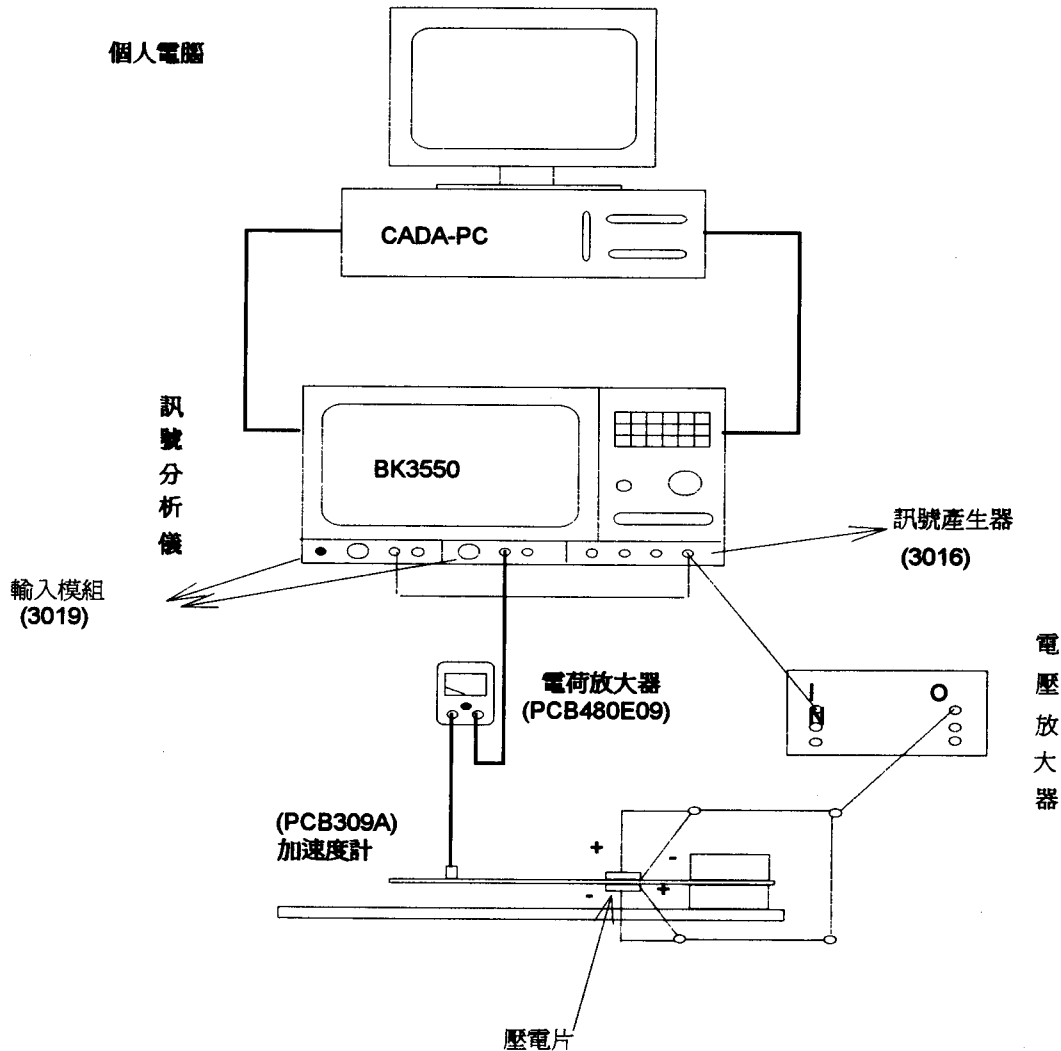


圖5. 實驗儀器架構圖

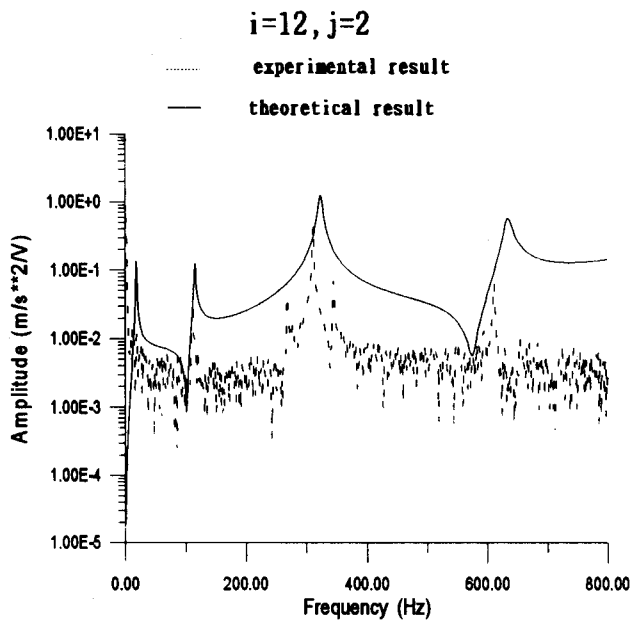


圖6. 以加速度計匹配壓電片(Acc./PZT)，理論與實驗頻率響應函數之比較(i=12, j=2)

四、實驗結果與討論

以下實驗結果係以加速度計與壓電片(Acc./PZT)之組合作實驗模態分析，同時也以加速度計與衝擊鎚(Acc./Hammer)實驗之結果作比較。

頻率響應函數

以加速度計為感應器，壓電片為驅動器(Acc./PZT)作模態分析可量測其頻率響應函數，因壓電片係對稱地黏貼於懸臂樑之第二格上下兩邊，故無法放置加速度器於該位置作量測，故只能求出14組之轉換頻率響應函數(transfer FRF)，而無法測得其同點頻率響應函數(point FRF)，一典型之理論與實驗轉換頻率響應函數(i=12, j=12)如圖6，實線為理論FRF可看出此系統模態明顯分開(well seperated)，如預期共有四個共振尖峰，虛線為實驗FRF，明顯的尖峰有五處，分別出現於111Hz、268Hz、310Hz、344Hz、610Hz，其中268Hz與344Hz應是旋轉模態，圖7顯示對應於圖6之關聯性函數(coherence function)只有在共振點附近關聯性值較高，其中310Hz的關聯性值達0.8以上，610Hz的關聯性值為0.6，另外三個

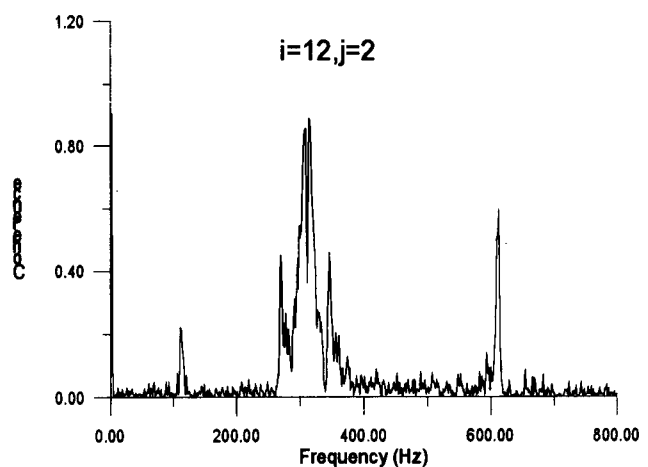


圖7. 以加速度計匹配壓電片(Acc./PZT)實驗之關聯性函數圖(i=12, j=2)

尖峰之關聯性值皆不到0.5，其餘各處的關聯性值接近於0，也就是僅共振模態，能被壓電片有效激振，在非共振點顯然壓電片激振能量不足。儘管如此，仍舊嘗試對量測所得14組之FRF作曲線嵌合，以求取模態參數，以下則分別就自然頻率、振型與阻尼比做比較討論。

自然頻率

以加速度計為感應器，壓電片或衝擊鎚為驅動器作測試，經曲線嵌合所得之自然頻率如表4。此表可看出此四個自然頻率，皆比理論值大，且使用壓電片比使用衝擊鎚之誤差為大。同時，使用Acc./Hammer時，自然頻率之誤差隨模態數增加而減小，此可能為理論假設之鋼材性質之影響。而使用Acc./PZT時，自然頻率之誤差隨模態數增加而增加，此乃可能黏貼壓電片影響結構特性所致，仍須進一步確認，不過所測得之自然頻率誤差都在3.3%以下，因此綜合以上比較可知，應用加速度計與壓電片於懸臂樑結構實驗模態分析，確可成功地預測到自然頻率。

振型

同樣以加速度計為感應器，壓電片為驅動器(Acc./PZT)的實驗，曲線嵌合所得之振型如圖8。第一模態的振型與理論振型差異最大；模態數愈大，其振型之曲線愈平滑。且第二~四模態的振型，其節點數與理論相符合。值得注意的是以加速度計與壓電片之組合實驗，所得

表4. 實驗分析所得前四個模態之自然頻率(Hz)

模態數	理論	Acc./PZT	誤差	Acc./Hammer	誤差
1	18.411	18.05	-1.958%	18.01	-2.18%
2	115.377	112.22	-2.736%	113.58	-1.56%
3	323.058	312.62	-3.231%	318.00	-1.59%
4	633.064	612.65	-3.225%	624.39	-1.83%

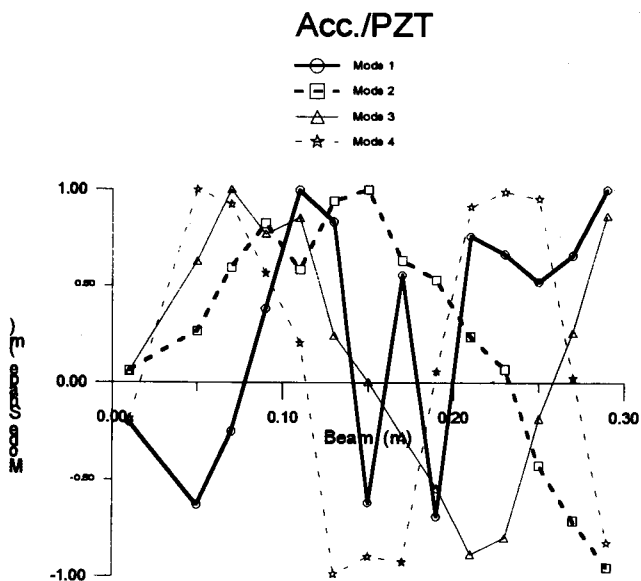


圖8. 以加速度計匹配壓電片(Acc./PZT)實驗，曲線嵌合所得前四個模態之振型

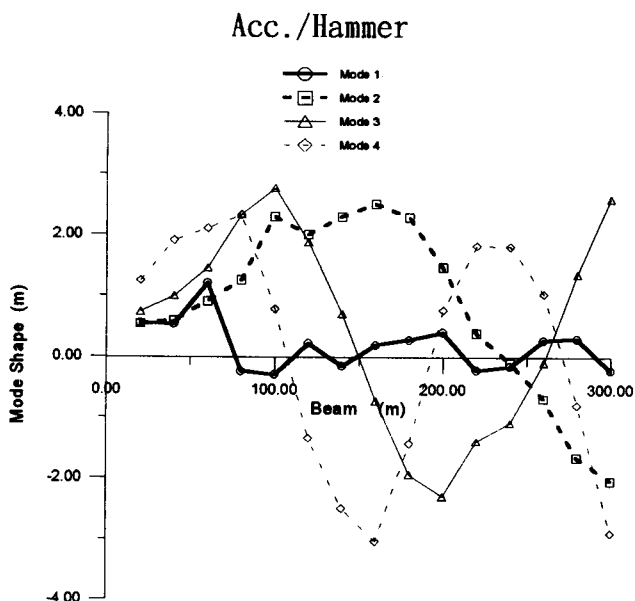


圖9. 以加速度計匹配衝擊錘(Acc./Hammer)實驗，曲線嵌合所得前四個模態之振型

到的振型仍為位移振型，此點由前述頻率響應函數之加速度計振型恰為位移振型可證明。同時為作比較，Acc./Hammer實驗所得之振型如圖9，第一模態的振型與理論振型差異仍大，其餘振型均與位移振型相當吻合，因此應用加速度計與壓電片於結構實驗模態分析，也可成功地預測到位移振型。

表5. 實驗分析所得前四個模態之阻尼比

模態數	Acc./PZT	Acc./Hammer
1	6.33%	3.98%
2	0.39%	0.78%
3	0.15%	0.18%
4	0.12%	0.17%

在此特別說明，在加速度計匹配壓電片(Acc./PZT)之組合，作實驗模態分析與曲線嵌合後，將可成功地得到位移振型，因為只要固定壓電片位置，而移動如加速度計之點轉換器，即可以得到位移振型，反之，若固定加速度計位置，而移動如壓電片之壓電轉換器，則將得到轉換器兩端斜率差振型，如圖3所示恰為位移振型對夾持邊之鏡像映射。

阻尼比

鋼之阻尼比一般約0.1%左右，然而常因材質與結構關係有些微變化，為比較Acc./PZT之實驗結果，Acc./Hammer也同時進行，表5顯示兩種實驗所得之前四個模態阻尼比，可看出阻尼比有其一致性，其中第一模態阻尼比相當大，此乃在Acc./Hammer實驗中，Acc.響應加exponential window增大阻尼效果所致，對模態數愈高之阻尼比影響愈小所以在第三、四個模態阻尼比接近0.1%，而在Acc./PZT實驗中，因為隨機激振使用Hanning window並無對外加阻尼之影響，可能因低頻部份實驗之解析不佳造成高阻尼效應，總體而言，應用加速度計與壓電片於結構實驗模態分析，可有效地預測到阻尼比。

五、結論

本文成功地應用加速度計與壓電片為感應器與驅動器作懸臂樑之模態測試，實驗證明將壓電片固定，移動加速度計，以量測一系列之頻率響應函數進行曲線嵌合，可成功地得到前四個模態之自然頻率、位移振型及阻尼比，除了低頻的第一個振型差異較大外，其餘振型均與理論分析相當吻合，將來可推廣在其他輕型結構之實驗模態分析，又因壓電片質輕、體積小，可輕易黏貼於結構上，可應用於如機翼結構之破壞診斷，或如太空機結構之遙感檢測，更可進一步結合控制器作振動或結構噪音控制。

六、參考文獻

Charette, F., Guigou, C., Berry, A., and Plantier, G., "Asymmetric Actuation and Sensing of a Beam Using Piezoelectric Materials," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 96, pp. 2272-2283 (1994).

Clark, R. L., Fuller, C. R., and Wicks, A., "Characterization of Multiple Piezoelectric Actuators for Structural Excitation," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 90, pp. 346-357 (1991).

Crawley, E. F. and de Luis, J., "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures," *AIAA Journal*, Vol. 25, pp. 1373-1385 (1987).

Ebersbach, P. and Irretier, H., "On the Application of Modal-Parameter Estimation Using Frequency-domain Algorithms," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 4, pp.109-116 (1989).

El-Deeb, K. M. M. and Royles, R., "Modal Examination of an Echinodome," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, pp.51-63 (1992).

Gibbs, G. P. and Fuller, C. R., "Excitation of Thin Beams Using Asymmetric Piezoelectric Actuators," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol 92, pp. 3221-3227 (1992).

Han, S. and McConnell K. G., "Analysis of Frequency Response Functions Affected by the Coupled Modes of the Structure," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 6, pp.147-159 (1991).

Im, S. and Atluri, S. N., "Effects of a Piezo-Actuator on a Finitely Deformed Beam Subjected to General Loading," *AIAA Journal*, Vol. 27, pp. 1801-1807 (1989).

Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill Book Company (1986).

Song, S. H. and Koss, L. L., "Dynamic Characteristics of an Oil Ball Damper," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 8, pp.263-283 (1993).

Sun, F. P., Liang, C., and Rogers, C. A., "Experimental Modal Testing Using Piezoceramic Patches as Collocated Sensor-Actuators," *Proceedings of the 1994 SEM Spring Conference and Exhibits*, Vol. pp. 871-879 (1994).

Wang, B. T. and Rogers, C. A., "Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators," *Journal of Composite Materials*, Vol. 25, pp. 433-452 (1991a).

Wang, B. T. and Rogers, C. A., "Modeling of Finite-Length Spatially Distributed Induced Strain Actuators for Laminate Beams Structures," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 2, pp. 38-58 (1991b).

Wang, B. T., "Characterization of Transfer Functions for Piezoceramic and Conventional Transducers," *Proceedings of ACTIVE-95*, pp. 805-816 (1995).

Worden, K., Wright, J. R., Al-Hadid, M.A., and Mohammed, K. S., "Experimental Identification of Multi Degree-of-freedom Nonlinear Systems Using Restoring Force Methods,"

The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 9, pp.35-55 (1994).

Wright, J. R. and Al-Hadid, M. A., "Sensitivity of the Force-State Mapping Approach to Measurement Errors," *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 6, pp.89-103 (1991).

Applications of Piezoceramic Actuators to Experimental Modal Testing of Cantilever Beam

Chung-Chei Wang
Bor-Tsuen Wang

Department of Mechanical Engineering
National Pingtung Polytechnic Institute

Abstract

This paper presents the use of piezoceramic (PZT) actuators in the replacement of conventional actuators, such as hammers or shakers, in conjunction with the use of accelerometers as sensors for experimental modal testing of cantilever beams. The frequency response functions (FRFs) between accelerometers and PZT actuators are first derived. The accelerometer mode shapes and PZT actuator mode shapes are obtained and shown to possess the relationship of mirror image in particular for the cantilever beam. Experiments show that the use of accelerometers and PZT actuators for modal testing can successfully determine natural frequencies and damping ratios of the first four modes of the cantilever beam. The mode shapes extracted from experimental FRFs match very well with those from theoretical analysis except the first mode shape due to its low frequency. The modal testing technique can be applied to structural health monitoring as well as for remote structural testing.

Keywords: piezoceramic actuator, experimental modal testing, beam