

應用旋轉角加速度計於自由樑之實驗模態分析

王栢村 蔡明建

國立屏東科技大學機械工程技術系

E-mail : wangbt@mail.npust.edu.tw

摘要

傳統上實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA)多採用加速度計為感測器，搭配衝擊錘為驅動器，以量測結構之頻率響應函數(Frequency Response Function, FRF)，本文擬用旋轉角加速度計評估取代加速度計之可行性及探討其在實驗模態分析之影響與限制。首先由理論分析推導自由樑點力及旋轉角加速度計之 FRF，並探討 EMA 執行方式對擷取模態參數之影響。同時建立有限元素分析(Finite element analysis)模型進行模態分析及簡諧分析，以求得理論模態參數及 FRF。EMA 則採旋轉角加速度計及加速度計為感測器，以衝擊錘為驅動器，分別以移動感測器或移動加速度計進行 EMA 共分四組實驗，分別探討 EMA 得到之模態參數差異及物理意義，結果顯示此實驗方法能適用於其他結構。

關鍵字：實驗模態分析、加速度計、頻率響應函數、旋轉角加速度計、模態參數、有限元素分析。

符號表：

A	面積
A_i	$x = x_i$ 處, 加速度響應振幅
$a(x, t)$	加速度響應函數
C	阻尼係數
E	樑楊氏係數
F_j	$x = x_j$ 處, 輸入點力
$f(x, t)$	外力函數
$H_{a_i f_j}$	$x = x_j$ 處, 點力輸入與 $x = x_i$ 處加速度輸出之頻率響應函數
$H_{\ddot{\theta}_i f_j}$	$x = x_j$ 處, 點力輸入與 $x = x_i$ 處角加速度輸出之頻率響應函數
I	樑截面慣性矩
$q_r(t)$	第 r 個模態座標
$w(x, t)$	樑側向位移響應函數
X_i	位移響應振幅
x_i	$x = x_i$ 處, 感測器位置座標
α_r	第 r 個特徵值
$\phi_r(x)$	第 r 個位移模態振型
ϕ_r^a	第 r 個加速度模態振型
ϕ_r^f	第 r 個點力模態振型
$\phi_r^{\ddot{\theta}}$	第 r 個角加速度模態振型

$\ddot{\theta}_i$	$x = x_i$ 處, 角加速度響應振幅
$\dot{\theta}_i$	在 x_i 之角速度
$\ddot{\theta}(x, t)$	角加速度函數
ρ	樑密度
ω_s	外力激振頻率
ω_r	第 r 個模態自然頻率

1. 前言：

實驗模態分析[14]傳統上一般以加速度計來量測結構之位移振型，而本次係嘗試使用旋轉角加速度計來量測結構之斜率振型，以作為感測元件更多元化之選用，並可適用於不同結構之探討，對於新量測技術貢獻有其重要性。

有關實驗模態分析所應用之各種感測元件的研究報告有，王等人[2]、王等人[8]、邱等人[9]、張等人[11]、Ekimov [13]以加速度計來量測結構之位移振型，馬等人[10]以應變計及加速計為感測元件，應用於懸臂樑之模態分析，發現加速度計所量出之自然頻率值比應變計所量出者為低，可能係加速計質量效應所造成，而在頻寬 800Hz 範圍內其 FRF 曲線嵌合所得模態參數非常一致，但在 800Hz 以上則雜訊比非常小，且其關聯性非常差，因此應變計進行 FRF 量測有其頻率之限制；王等人[5]則以旋轉角加速度計感測元件，應用於懸臂樑之模態分析，所測得之模態為斜率振型，有別於加速度計所測得之位移振型，於低頻 20Hz 以上所得模態參數與理論解大致相吻合；王等人[6]，Wang [17]則以壓電薄膜為感測器進行外力預測，其理論分析所得模態參數及響應預測結果相吻合，以上幾位學者所發表之論文，雖然所使用之感測元件不同，但所得結果比較並無明顯差異，誤差值皆相當小，因此經驗證後加速度計、應變規、旋轉角加速度計、壓電薄膜等感測元件，皆可應用於不同領域之實驗模態分析量測使用。

Wang[16]則以點力、力矩及 PZT 三種不同激振外力和加速度計、旋轉角加速度計及 PVDF 三種感測器，分別移動或固定感測器及激振外力，以連續樑側向振動之結構模態分析推導理論通式，並得到理論模態參數之不同物理意義，以模態振型而言，若激振外力為固定於一點之點力，移動旋轉角加速度計則可得到斜率振型，若激振外力為移動點力，固定角加速度計於一點則可得到位移振型。

本文則以旋轉角加速度計量測斜率振型特性，將之應用於實驗模態分析領域，並與加速計所測得之模

態參數相驗證，以自由樑為分析結構，經由移動及固定感測元件所得輸出訊號，經修改 FEA 模型得到真正能代表原形之有限元素模型，以供材料參數改變時，能快速建構 FEA 模型作各項響應預測，以作為研發參考，再經由曲線嵌合得到結構之模態參數異同比較，並與 FEA 所得之模態參數驗證比較相當吻合，證明旋轉角加速度計於 EMA 之適用性。

2. 自由樑側向振動理論分析：

本文探討一自由樑結構如圖 1，其對應之結構材料常數及幾何參數如表 1，距端點 x_j 處受一點力 $f(x,t)$ ，於 x_i 處則分別有加速度計及旋轉加速度計等感測元件，利用自由樑側向之自由振動分析，以求得自然頻率，並以自由樑側向之強制振動分析求得輸出位移與輸入外力之頻率響應函數，依據薄樑理論假設，不考慮樑之旋轉慣性及剪變形效應可得薄樑之側向強制振動方程式[1]：

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (1)$$

其邊界條件在 $x=0$ 及 $x=L$ 時，其側向彎曲力矩及剪力均為零，可表示為

$$\left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$\left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]_{x=0} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (5)$$

2.1 自由樑側向之自由振動分析

為進行模態分析，令外力函數 $f(x,t)=0$ ，且忽略阻尼效應令

$$w(x,t) = \phi(x)q(t) \quad (6)$$

由前項假設將式(6)代入式(1)，並利用分離變數法，由前項假設將式(6)代入式(1)以及式(2)~(5)之邊界條件代入式(1)，可得自由樑特徵方程式[12]：

$$\cos \alpha_r L \cosh \alpha_r L = 1 \quad (7)$$

求解(7)式可得特徵值：

$$\alpha_r L \quad r=1,2,\dots \quad (8)$$

利用數值方法求解得特徵值為

$$\alpha_1 L = 4.73004074$$

$$\alpha_2 L = 7.85320462$$

$$\alpha_3 L = 10.9956078$$

$$\alpha_4 L = 14.1371655$$

$$\alpha_5 L = 17.2787597$$

$r > 5$ 時， $\alpha_r L = (2r+1)\frac{\pi}{2}$ ，因此自由樑之自然頻率及模態振型可得如下：

$$\omega_r = 2\pi f_r = (\alpha_r L)^2 \left[\frac{EI}{\rho AL^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad r=1,2,\dots \quad (9)$$

$$\phi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho AL}} [\cosh \alpha_r x + \cos \alpha_r x - \sigma_r (\sinh \alpha_r x + \sin \alpha_r x)] \quad (10)$$

其中， $\sigma_r = \left(\frac{\cosh \alpha_r L - \cos \alpha_r L}{\sinh \alpha_r L - \sin \alpha_r L} \right)$ ，並可得模態正交性關係：

$$\int_0^L \rho A \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \delta_{rs} = \begin{cases} 0, \dots, r \neq s \\ 1, \dots, r = s \end{cases} \quad (11)$$

$$\int_0^L \phi_r(x) \left(EI \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} \right) dx = \delta_{rs} \omega_r^2 = \begin{cases} 0, \dots, r \neq s \\ \omega_r^2, \dots, r = s \end{cases} \quad (12)$$

若假設系統為比例阻尼，則

$$\int_0^L \phi_r(x) (c \phi_s(x)) dx = \delta_{rs} 2\xi_r \omega_r = \begin{cases} 0, \dots, r \neq s \\ 2\xi_r \omega_r, \dots, r = s \end{cases} \quad (13)$$

2.2 簡諧響應分析：

本文係以衝擊錘為驅動器，分別使用旋轉角加速度計及加速度計為感測器進行實驗模態分析，本節將推導感測器與驅動器間之頻率響應函數，令外力函數於 $x=x_j$ 處，受一理想簡諧外力 $f(x,t) = F_j \delta(x-x_j) e^{i\omega_s t}$ 作用，則由擴充原理[1]，可假設樑之側向位移響應為：

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \times q_r(t) \quad (14)$$

因為係簡諧外力輸入，因此將是簡諧響應輸出，可表示為：

$$w(x_i,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x_i) Q_r e^{i\omega_s t} \quad (15)$$

將式(15)取一次及二次偏微分代入式(1)得

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = N_r(t), r=1,2,\dots \quad (16)$$

其中，

$$N_r(x) = \int_0^L \phi_r(x) f(x,t) dx = F_j \phi_r(x_j) e^{i\omega_s t} \quad (17)$$

令

$$q_r(t) = Q_r e^{i\omega_s t} \quad (18)$$

將式(18)之一次及二次微分及式(17)代入式(16)得到：

$$(-\omega_s^2 + i2\xi_r \omega_r \omega_s + \omega_r^2) Q_r e^{i\omega_s t} = F_j \phi_r(x_j) e^{i\omega_s t}$$

則

$$Q_r = \frac{F_j \phi_r(x_j)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \quad (19)$$

因此樑在 $x=x_i$ 處可得到位移響應如下：

$$w(x_i,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_j \phi_r(x_j)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} e^{i\omega_s t} \quad (20)$$

本文同時使用加速度計及旋轉角加速度計，下列推導將依照 Wang[16]之論文，當加速度計感測器在 $x=x_i$ 時，其加速度為

$$a(x_i,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} [w(x_i,t)]$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} -\omega_s^2 \frac{F_j \phi_r(x_j) \phi_r(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi\omega_r\omega_s)} e^{i\omega_s t}$$

$$= A_i e^{i\omega_s t} \quad (21)$$

當輸出加速度響應於 $x = x_i$ 處與輸入點力於 $x = x_j$ 處，可得頻率響應函數：

$$H_{a_i f_j} = \frac{A_i}{F_j} = -\omega_s^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r(x_j) \phi_r(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi\omega_r\omega_s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^f(x_j) \phi_r^a(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi\omega_r\omega_s)} \quad (22)$$

其中，

$$\phi_r^f(x_j) = \phi_r(x_j) \quad (23)$$

$$\phi_r^a(x_i) = -\omega_s^2 \phi_r(x_i) \quad (24)$$

同理當旋轉角加速度計在 $x = x_i$ 時，其角加速度為：

$$\ddot{\theta}(x_i, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x} [w(x_i, t)]$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} -\omega_s^2 \frac{F_j \phi_r(x_j) \phi_r'(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi\omega_r\omega_s)} e^{i\omega_s t}$$

$$= \ddot{\Theta}_i e^{i\omega_s t} \quad (25)$$

當輸出角加速度響應於 $x = x_i$ 處與輸入點力於 $x = x_j$ 處，亦可得頻率響應函數：

$$H_{\ddot{\theta}_i f_j} = \frac{\ddot{\Theta}_i}{F_j} = \sum_{r=1}^{\infty} -\omega_s^2 \frac{\phi_r(x_j) \phi_r'(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi\omega_r\omega_s)}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^f(x_j) \phi_r^{\theta}(x_i)}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi\omega_r\omega_s)} \quad (26)$$

其中，

$$\phi_r^f(x_j) = \phi_r(x_j) \quad (27)$$

$$\phi_r^{\theta}(x_i) = -\omega_s^2 \phi_r'(x_i) \quad (28)$$

方程式(22)為加速度計的頻率響應函數表示式，方程式(23)之 $\phi_r^f(x_j)$ 係衝擊錘激振器模態振型，而方程式(24)之 $\phi_r^a(x_i)$ 為加速度計感測器的模態振型，從 Wang[16]之論文中得知 $\phi_r^f(x_j)$ 及 $\phi_r^a(x_i)$ 其物理意義係位移模態振型，進行 EMA 時，當移動加速度計而固定衝擊錘，則加速度計感測器模態振型相當於位移振型將可獲得對照，進行 EMA 時，當移動衝擊錘激振器，可得到位移振型，因此得知無論是移動衝擊錘或是加速度計都將得到位移振型。

方程式(26)係旋轉角加速度計的頻率響應函數表示式，方程式(27)之 $\phi_r^f(x_j)$ 係衝擊錘模態振型，而方程式(28)之 $\phi_r^{\theta}(x_i)$ 為旋轉角加速度計的模態振型，係相當於斜率振型，所以當移動旋轉角加速度計同時固定衝擊錘時，進行實驗模態分析將會得到斜率振型，此斜率振型可應用於其他如缺陷檢測。

2.3 有限元素分析：

本次係利用 ANSYS5.5 版作為有限元素分析軟體，圖 2 係由 ANSYS 所得自由樑之有限元素模型，採用二維樑元素(Beam3)為分析架構，共分成 15 個元素，

16 個節點，所得模態參數及頻率響應函數將與實驗模態分析值相比較。

3. 模態分析實驗步驟：

3.1 主要實驗設備：

表 2 係主要實驗設備表，包括實驗模態訊號分析儀、旋轉角加速度計、加速度計、衝擊錘、旋轉角加速度計放大器，本次所使用旋轉角加速度計之優點係可選擇移動或固定感測器，而分別得到斜率振型或位移振型，且因為旋轉角加速度計輸出之響應非常大約 10 伏特，因此對於微小之缺陷檢測將可獲非常明顯之響應差異，但因受限於本感測器有方向性選擇，因此量測時角度之擺設對頻率響應將會有很大影響；加速度計無論是移動或固定感測器僅可得到位移振型，輸出之響應較小約 0.4 伏特，無方向性限制，可減少量測時角度擺設誤差。

3.2 實驗規劃：

如圖 3 係自由樑量測規劃圖，於樑中心線上平均分割成 16 個量測點，圖 4 係實驗設備接線示意圖，將自由樑以彈性尼龍繩固定於支架上，以衝擊錘為激振器，敲擊樑上各規劃，經加速計及旋轉角加速度計等感測器，量測各種輸出訊號，透過放大器及 Siglab 訊號處理器，將訊號由 SCSI 傳輸線送至 Siglab 分析軟體，轉換成頻率響應函數圖形資料檔，圖 5 係實驗設備實際接線圖，表 3 係實驗模態分析實驗設計表，共分 4 組實驗，即移動旋轉角加速度計，同時固定衝擊錘，以 R_f-H_f 表示；固定旋轉角加速度計，同時移動衝擊錘以 R_f-H_r 表示；移動加速度計，同時固定衝擊錘，以 A_r-H_f 表示；固定加速度計，同時移動衝擊錘，以 A_r-H_r 表示。

4. 結果與討論：

經四次實驗模態分析所得之輸出訊號，由 Siglab 分析軟體轉換成頻率響應函數圖形資料檔，再經由 ME'Scope 實驗模態分析之軟體，將實驗模態分析所得之頻率響應函數，經曲線嵌合過程得到實驗合成 (Synthesized) 之頻率響應函數曲線，並與 ANSYS 所解得之理論解比較驗證，且可得到之結構模態參數，包含自然頻率、阻尼比、及模態振型，比較驗證如下：

4.1 頻率響應函數驗證

圖 6 及圖 7 係以衝擊錘激振，分別以旋轉角加速度計及加速度計所得之頻率響應函數圖示，每個圖有三條曲線，分別為實驗、實驗合成及理論，實驗頻率響應曲線係從實驗列資料計算得到，實驗合成頻率響應曲線係由所得模態參數重建得到，理論頻率響應曲線係由有限元素分析得到，綜合討論如下：

- 1) 圖 7 係加速度計量測所得三條曲線，僅有那些純彎曲模態出現，即在 5000Hz 以下有四個共振峰值出現，其吻合性非常好。

- 2) 圖 7(a)係同點($i=j$)頻率響應函數曲線曲線,如預期於共振點峰值間有反共振點出現。
- 3) 圖 7(b)係不同點($i \neq j$)所得之頻率響應函數曲線,僅有一個反共振點峰值出現。
- 4) 量測所得之頻率響應函數曲線,其曲線嵌合情形相當良好。
- 5) 圖 6 係旋轉角加速度試驗,4 組主要彎曲模態 無論是實驗或者理論所得頻率響應函數曲線幾乎非常接近,除此之外實驗所得頻率響應函數也有幾個小峰值出現,一些峰值可能係扭轉模態造成,理論上在自由樑中線上是不會產生那些扭轉模態,但因旋轉角加速度計有方向性限制,因此擺設角度稍有偏差即可能測到扭轉模態效應。
- 6) 理論與實驗所得 4 個主要彎曲模態共振峰值相當吻合,總之無論使用加速度計或旋轉角加速度計配合衝擊鉗可發現頻率響應函數吻合性皆相當良好,由頻率響應函數能求得模態參數,在下一個單元對自由樑的有限元素模態振型做數值分析,亦是可行的。

4.2 模態參數驗證

本節係比較模態參數,探討 4 組實驗模態分析的實驗與有限元素分析,表 4 係理論、有限元素分析及 4 組實驗模態分析所得自然頻率比較表,而理論之自然頻率係由方程式(9)所計算出,綜合討論如下:

- 1) 表 4 理論與有限元素分析所自然頻率誤差值在 -1.1976% 以下,顯示有限元素分析法結果之正確性。
- 2) 有關加速度計量測,例如表 4 之 A_r-H_f 及 A_f-H_r 試驗所得自然頻率誤差幾乎相同,可解釋加速度計之質量效應非常小,即使移動感測器或者激振器都有相同的自然頻率。最大誤差 -3.468 %。
- 3) 有關旋轉角加速度計量測,由表 4 之 R_r-H_f 及 R_f-H_r 試驗所得自然頻率誤差,一般皆比加速度計試驗所得值高,那是因為旋轉角加速度計質量效應所影響之結果,再者旋轉角加速度計所得結果比真實樑的自然頻率為低。
- 4) 有關表 4 R_r-H_f 試驗所得自然頻,因旋轉角加速度計固定所以質量完全緊貼於樑上,因此 R_r-H_f 試驗率誤差皆高於 A_r-H_f 及 A_f-H_r 試驗所得自然頻率,不過所得自然頻率皆在一個合理誤差範圍內。

表 5 係 4 組實驗模態分析所得之阻尼比,因為使用加權於頻率響應量測,因此所得阻尼比必須加以修正其加權效應值,綜合討論如下:

- 1) 所得阻尼比無論是移動激振器或者感測器皆有微小差異產生。
- 2) 模態數越高其阻尼比相對減少,係質量矩陣主導之阻尼效應所致。

圖 8 及圖 9 分別為 R_r-H_f 、 A_r-H_f 2 組實驗模態分析試驗所得之前 4 個模態振型,所有實驗與理論所得之模態振型皆繪製在圖上比較,綜合討論如下:

- 1) 所有實驗與理論所得之模態振型,除了以旋轉角加速度計為感測器所測得之少數幾個點較差外,大致上皆相當吻合。
- 2) 有關所有模態振型除了 R_r-H_f 及 A_r-H_f 試驗以外,所有模態振型皆為位移振型,此原因已再第二節討論過。
- 3) 有關 R_r-H_f 試驗所得模態振型如圖 8 所示,其物理意義為斜率振型,表示係樑之斜率,因為感測器如為旋轉角加速度計,則其模態振型能夠由方程式(26)證明為斜率振型。
- 4) 表 6 係 4 組實驗與理論所得模態振型之模態保證指標 (Modal Assurance Criterion),其對角線值皆接近 1,表示模態振型吻合性相當高,非對角線趨近於 0,則表示模態振型具有正交性。
- 5) 由圖 8 係 R_r-H_f 試驗,有些模態振型量測點其理論與實驗無法完全吻合,可能係樑上小孔所致,因此表 5 之 MAC 值,係使其對角線值無法趨近於 1 之原因所在。

5. 結論:

本次研究係針對加速度計及旋轉角加速度計配合衝擊鉗,以自由樑為分析架構,應用於實驗模態分析領域,本次試驗係分別以移動感測器及激振器作為模態分析過程,以旋轉角加速度計為感測器,應用於實驗模態分析領域是可行的,且模態振型皆有良好吻合性,特別是 R_r-H_f 試驗所得之斜率振型是不同於其他試驗所得之位移振型,此斜率振型特性能運用於其他缺陷檢測,綜合實驗與理論分析比較結果,無論在自然頻率、阻尼比、模態振型、MAC 及頻率響應函數皆相當吻合,因此旋轉角加速度計可用於實驗模態分析之感測器使用,對於希望得到斜率之模態振型者,將可直接應用旋轉角加速度計從事於實驗模態量測。

6. 參考文獻:

1. 王栢村,2000,振動學,全華科技圖書股份有限公司,台北市。
2. 王栢村,吳德和,吳建德,2000,「智慧型材料結構系統應用於未知外力之預測」,第十七屆機械工程研討會論文,第 907-914 頁。
3. 王栢村,張家華,黃立鑫,2002,「連續螺栓結合結構之動態特性分析」,空軍軍官學校航太工程學術研討會,高雄市,第 107-115 頁。
4. 王栢村,曹文昌,2002,「應用有限元素分析與實驗模態分析之結構模型驗證」,中華民國振動與噪音工程學會九十一年年會暨第十屆學術研討會,第 131-138 頁。
5. 王栢村,陳柏宏,2002,「應用旋轉角加速度計於實驗模態分析」,空軍軍官學校航太工程學術研討會,高雄市,第 S-01-S04-10 頁。
6. 王栢村,陳榮亮,2002,「應用壓電薄膜感測器於結構之實驗模態分析」,中華民國振動與噪音

- 工程學會九十一年年會暨第十屆學術研討會，第 253-262 頁。
7. 王栢村，黃瑞光，1999，「高爾夫球桿振動模態參數之測定」，第二十三屆全國力學會議論文集，新竹市，第 457-464 頁。
 8. 王栢村，熊京民，巫崧佑，林志祥，陳建豪，2000 「風扇噪音之感嵌式品質檢測器」，第十七屆機械工程研討會論文高雄市，第 809-816 頁。
 9. 邱俊賢，王栢村，吳德和，1998，「簡支梁之製作與模態特性驗證」，中國機械工程學會，第 15 屆全國學術研討會論文集，第 291-298 頁。
 10. 馬志高，陳春忠，李建鋒，2002，「應變計在結構模態實驗應用上之探討」，中華民國振動與噪音工程學會九十一年年會暨第十屆學術研討會，第 235-244 頁。
 11. 張志偉，徐茂濱，1999，「輪胎實驗模態分析」，第二十三屆全國力學會議論文集，新竹市，第 479-486 頁。
 12. Blevins, R. D., 1995, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger publishing company.
 13. Ekimov, A. E., Didenkulov, I. N., and Kazakov, V. V., 1999, "Modulation of Torsional Waves in a Rod with a Crack," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 106, No.3, pt.1, pp. 1289-1292.
 14. Ewins, D. J., 1994, *Modal Testing : Theory and Practice*, Research Studies Press LTD .
 15. Michael, V. D., and Jsoerry, H. G. , 2001, "Mode isolation : A new algorithm for modal parameter identification," *The Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 110, No.3, pp. 1371-1378.
 16. Wang, B. T., 1998, "Structural Modal Testing with the Use of Various Forms of Actuators and Sensors," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 12, No.5, pp.627-639.
 17. Wang, B. T., and Chen, R. L., 2000, "The Use of Piezoceramic Transducers for Smart Structural Testing," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 11, No.9, pp. 713-724.

Application of Rotational Accelerometer to Experimental Modal Analysis for Free-Free Beam

Bor-Tsuen Wang, Ming Chien Tsai

Department of Mechanical Engineering

National Pingtung University of Science and Technology

E-mail : wangbt@mail.npust.edu.tw

Abstract

Conventional experimental modal analysis (EMA) adopts the accelerometer as the sensor and the hammer as the actuator to measure the structural frequency response functions (FRFs). This work evaluates the feasibility and effects of the rotational accelerometer, instead of accelerometer, in performing EMA on a free-free beam structure. First, the FRF between the actuator input and sensor output is derived. The effect of testing procedures, either roving the sensor with the fixed actuator or roving the actuator with the fixed sensor, is then be discussed. Finite element analysis (FEA) by using commercial code is also carried out to obtain structural modal parameters

and FRFs for comparison. In experiments, both the rotational accelerometer and accelerometer sensors are used, respectively, while the impact hammer is used as the actuator. Four pairs of experiments for different testing procedures are conducted to extract experimental modal parameters. The discrepancy and physical meaning of mode shapes among experiments are well interpreted. The test method can then be adopted for other structures as well.

Keyword : experimental modal analysis, accelerometer, frequency response functions, rotational accelerometer, modal parameters, finite element analysis.

7. 圖表：

表 1、自由樑結構材料常數及幾何參數表

材 質	密度 (kg/m ³)	長度 (m)	寬度 (m)	厚度 (m)	楊氏係數 (N/m ²)	浦松比
中 碳鋼	8000	0.4	0.08	0.013	207*10 ⁹	0.3

表 2 主要實驗設備表

設備名稱	廠牌型號	適用頻寬	靈敏度	質量
實驗模態訊號分析儀	Siglab-20-42	20KHz		
旋轉角加速度計	KISTLER 8696	8KHz	0.476mv/rad/s ²	10g
加速度計	PCB 352B10	3-10KHz	9.745mv/N	0.7g
敲擊錘	PCB 86C03	8KHz	2.15mv/N	140g
旋轉角加速度計放大器	KISTLER 5130A	8KHz	0.476mv/rad/s ²	

表 3、實驗模態分析實驗設計表

實驗組合	R _r -H _f	R _r -H _r	A _r -H _f	A _r -H _r
實驗設定				
Sensor 種類	Rotational Acclerometer	Rotational Acclerometer	Acclerometer	Acclerometer
Sensor 位置	移動於中線軸各點	固定於中線軸第 16 點	移動於中線軸各點	固定於中線軸第 16 點
Actuator 方式	固定 Hammer 於中線軸 第 16 點敲擊	移動 Hammer 於中—線 軸各點敲擊	固定 Hammer 於中線軸 第 16 點敲擊	移動 Hammer 於中線軸 各點敲擊
設定頻寬	5000Hz	5000Hz	5000Hz	5000Hz

備註：R：Rotational Acclerometer；A：Acclerometer；H：Hammer；r：Roving；f：Fifed
R_r-H_f係表示試驗時旋轉角加速度計移動，衝擊錘固定於一點敲擊。

表 4.自然頻率比較表

自然 頻率	理論值	FEA	誤差(%)	R _r -H _f	誤差(%)	R _r -H _r	誤差(%)	A _r -H _f	誤差(%)	A _r -H _r	誤差(%)
第一 模態	424.837	423.920	-0.216%	420.880	-0.932%	419.940	-1.153%	421.520	-0.781%	421.510	-0.783%
第二 模態	1171.081	1165.500	-0.477%	1150.900	-1.723%	1151.400	-1.681%	1155.030	-1.371%	1154.900	-1.382%
第三 模態	2295.787	2277.400	-0.801%	2241.490	-2.365%	2237.350	-2.545%	2243.190	-2.291%	2243.200	-2.291%
第四 模態	3795.052	3749.600	-1.198%	3659.470	-3.573%	3654.440	-3.705%	3663.450	-3.468%	3663.500	-3.466%

5.修正阻尼比統計表

修正阻尼比%	R _r -H _f	R _r -H _r	A _r -H _f	A _r -H _r
第一模態	0.393596	0.295466	0.416725	0.418725
第二模態	0.118083	0.116083	0.131255	0.130083
第三模態	0.072575	0.074975	0.076975	0.076675
第四模態	0.050642	0.049825	0.051242	0.052542

表 6. 模態保證指標 MAC

(a) R_f-H_f

mode	1	2	3	4
1	0.9641	0.0015	0.1547	0.0003
2	0.0003	0.8216	0.0028	0.0752
3	0.0929	0.0048	0.7538	0.0072
4	0.0012	0.1087	0.0031	0.5333

(c) A_f-H_f

mode	1	2	3	4
1	0.9952	0.0001	0.0015	0.0003
2	0.0001	0.9858	0.0012	0.0002
3	0.0014	0.0008	0.9889	0.0000
4	0.0020	0.0006	0.0007	0.9762

(b) R_f-H_r

mode	1	2	3	4
1	0.9975	0.0001	0.0008	0.0000
2	0.0000	0.9946	0.0003	0.0003
3	0.0047	0.0002	0.9901	0.0001
4	0.0265	0.0282	0.0511	0.6754

(d) A_f-H_r

mode	1	2	3	4
1	0.9971	0.0001	0.0003	0.0001
2	0.0002	0.9929	0.0001	0.0000
3	0.0022	0.0002	0.9893	0.0000
4	0.0001	0.0021	0.0004	0.9855

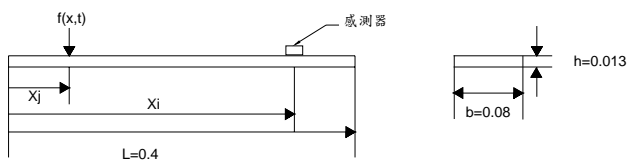


圖 1、自由樑結構圖

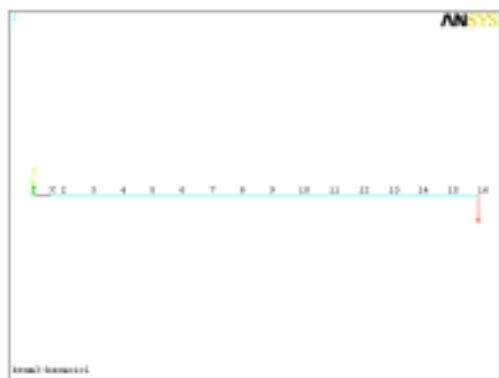


圖 2、自由樑之有限元素模型示意圖

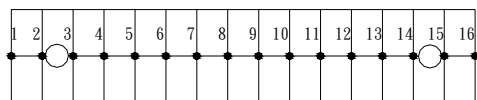


圖 3、自由樑量測規劃圖

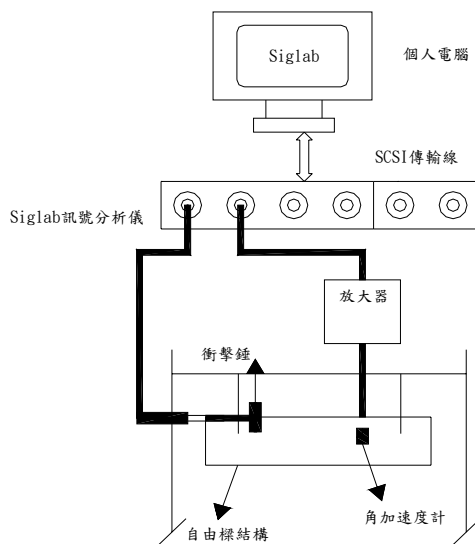


圖 4、實驗設備接線示意圖



圖 5、實驗設備實際接線圖

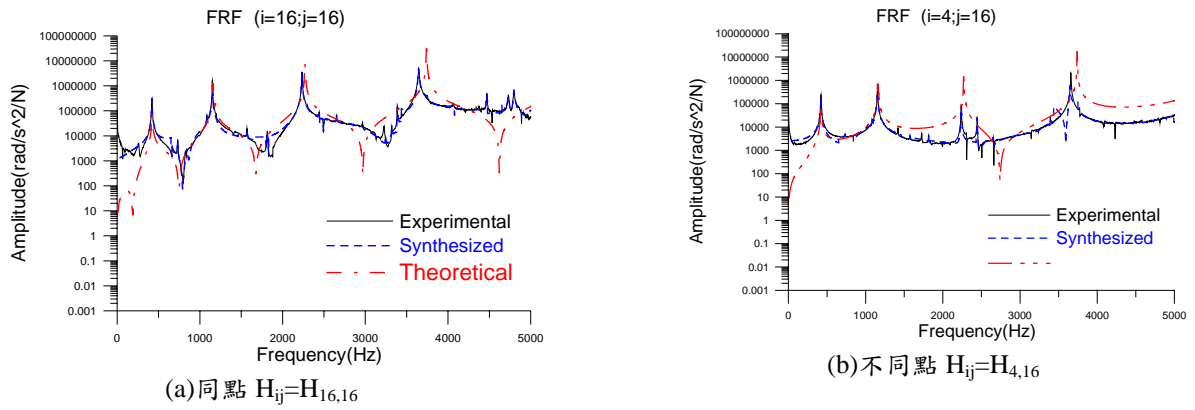


圖 6、 R_r-H_f 旋轉角加速度計與衝擊錘所得頻率響應函數曲線圖

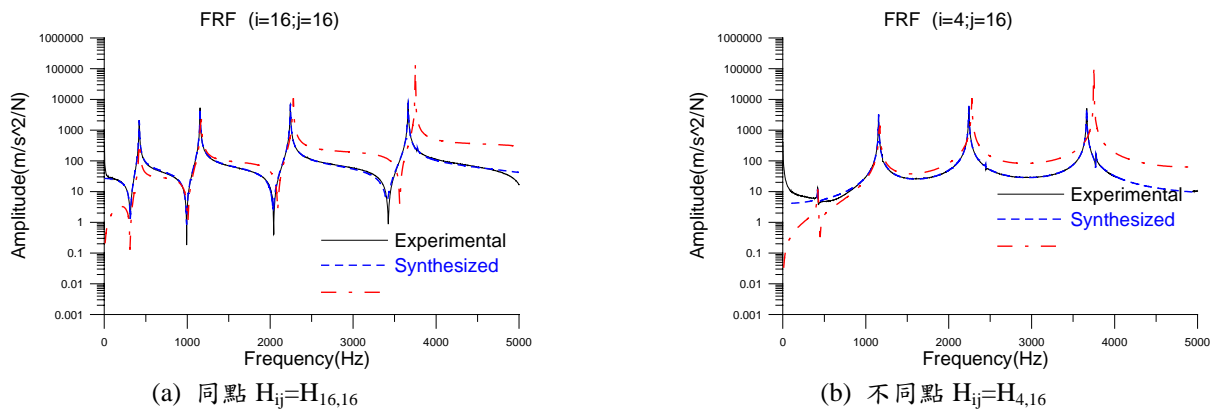
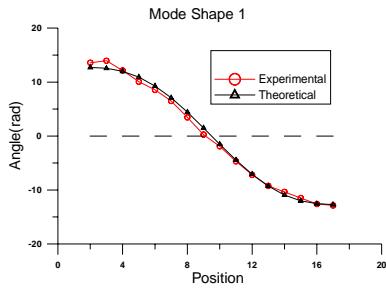
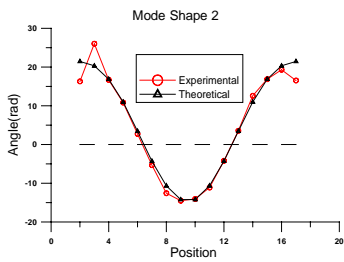


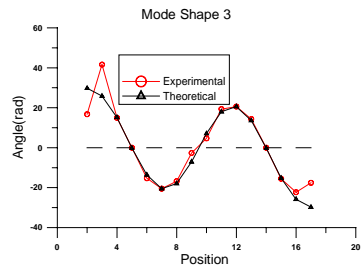
圖 7、 A_r-H_f 加速度計與衝擊錘所得頻率響應函數曲線圖



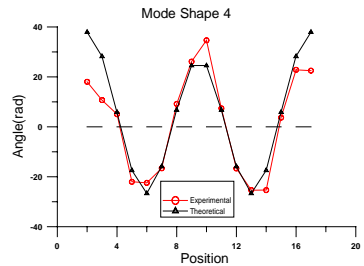
(a) 第一模態



(b) 第二模態

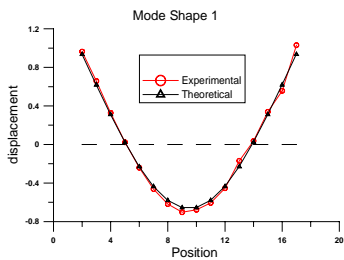


(c) 第三模態

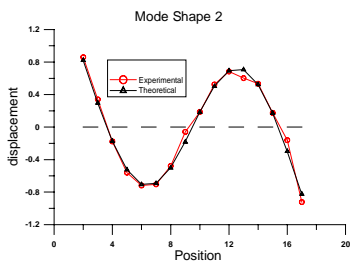


(d) 第四模態

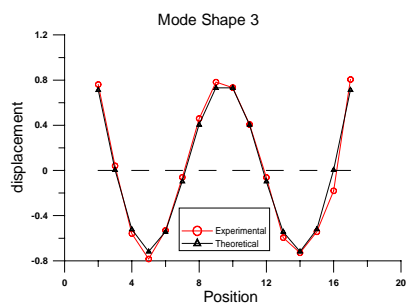
圖 8、 R_r-H_f 理論與實驗模態振型比較圖



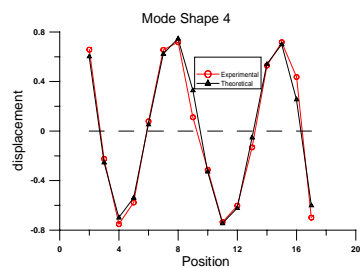
(a) 第一模態



(b) 第二模態



(c) 第三模態



(d) 第四模態

圖 9、 A_R-H_F 理論與實驗模態振型比較圖