

多自由度系統於簡諧激振狀態下之模態分析

計畫編號：NSC 89-2212-E-020-008

計畫名稱：智慧型材料結構系統於作業狀態之模態測試(1/3)

王栢村 胡華良

國立屏東科技大學 機械研究所

屏東縣內埔鄉學府路 1 號

摘要

本研究探討多自由系統於簡諧狀態下之模態分析，發展由操作變形振型估測模態振型之方法。以多自由度系統為例，假設在簡諧激振下，量測得操作變形振型，作為所發展模態振型預測模式之輸入，可求得系統之模態振型。預測模式中以最佳化分析理念，在找到設計變數即模態振型，使得預測與實測操作變形振型間誤差之目標函數為最小化，且能滿足模態振型為正交化之限制條件。由可行性分析，可知所發展預測模式可精確求得模態振型，又由實驗驗證分析，也分別由共振激振及非共振激振下量得之操作變形振型，可合理地預測系統之模態振型，且發現在非共振激振狀態時，因各模態分佈均勻性佳，所得預測之模態振型較準確。本研究將有助於如轉子系統於作業狀態下之模態分析，突破傳統實驗模態分析之限制，且後續研究應用可擴展至如多個簡諧激振及外力預測問題。

關鍵詞：實驗模態分析、操作變形振型、多自由度系統、簡諧激振、模態振型

一、前言

為提昇機械生產品質與穩定性及避免因共振造成損害，結構系統之振動問題於設計分析時，必須加以克服及改進，因此不論採用何種分析方法，獲得結構系統模態參數是為重要之課題。傳統上在求得模態參數，多以實驗模態分析，成功的實驗模態分析測試一般須在控制的輸入條件下，量測得輸出響應，傳統多以激振器或衝擊錘激振結構，而以加速度計量測結構響應，訊號經快速傅立葉轉換後，得結構輸入與輸出間頻率響應函數(frequency response function, FRF)，再由頻率響應函數進行曲線擬合或模態參數擷取，求得系統模態參數：自然頻率、模態阻尼及模態振型，最後導出振動系統參數。

在前述之量測 FRF 中，其限制及潛在缺點，因為通常結構系統必須是靜止的，若為土木結構如橋樑，會有風力、車輛行經等之干擾，運轉之機器則不易測試，且 FRF 須量測所有的分割格點之結構響應輸出，以及須是在已知之輸入條件下。訊號處理分析過程煩瑣，亦容易對系統振動特性產生影響。因此本文研討結構系統於操作狀態下之模態分析方法。

崔永晉[1]探討獲得操作變形振型(Operational Deflection Shape, ODS)之理論方法，包括移轉特性法、最大基本分量法及同相法等理論，以質量集中系統進行電腦模擬並與實驗進行比較驗證，結果顯示移轉特性法最為簡易，而最大基本分量法可有效用於模態估測。Dossing[2]於 1987 年對於操作變形振型之背景、量測與應用進

行歸納與探討，經由實例分析證實利用量測及模擬分析得到 ODS，可有效瞭解結構振動特性，作為減振或隔振設計之參考，且當系統於共振激振時，ODS 之線性組合可代表系統模態振型。Barney and Carne [3]提出一由自然激振響應訊號以自然激振技術(NExT)為基礎之新的模態參數估測算法，使用 NExT 可線性地呈現系統之操作狀態程度，應用於標準模態參數估測十分值得信賴。

獲得結構之操作變形振型，除了可瞭解實際結構動態特性之外，配合數值模擬分析或有限元素分析結果進行模態模型確認(modal verification)是第一步應用。Hermans and Auweraer[4]發展以僅已知輸出響應之模態辨識方法並應用於車輛、飛機、橋樑結構在外力激振源環境下，探討所發展方法之適應性。Farrar *et al.* [5]則對橋樑結構在模態測試中的各種激振方式作了比較分析，以可控制式之激振法固然有其可靠性，但需控制橋樑之車流量，但對風力等環境影響則不易控制。Hermans and Auweraer[6]回顧其研究單位近年來對於應用一般操作條件資訊從事模態確認之文獻及成果，作者提出操作變形振型之應用是多方面的，定期記錄之操作量測資料可作為分析判斷之參考，直接量測分析可改善傳統實驗模態分析之缺點，ODS 可用於相關之數值模型以及一般操作期間監測系統運轉。

實驗或理論分析得到操作變形模態後，經模態振型確認後，即可進行後續的應用，在眾多的應用中，以缺陷辨識、健康檢測數量最多。Marscher and Jen[7]藉由實驗及有限元素分析所得之操作變形振型判斷結構是否產生缺陷或鬆動，研究發現利用操作變形振型差可輕易地瞭解機構各部位之振動情形，並區別損害程度。由於操作

狀態下之模態分析，克服了傳統模態分析的限制，並可迅速、簡易、經濟且有效地呈現結構動態特性，因此適用於線上缺陷檢測，特別是對於旋轉機械。Pascual *et al.* [8]利用操作變形振型採頻率域確認法則以模態模型為基礎進行線上缺陷檢測，研究發現系統修正後，操作變形振型之反應靈敏度比模態振型高。Pai and Young[9]利用掃瞄式雷射振動計量測樑結構之操作變形振型，以模態化為基礎從事缺陷預測。

除了上述應用之外，亦可利用 ODS 配合系統頻率響應函數從事操作外力估測。Verhoeven[10]利用分析所得轉子/定子模型之頻率響應函數配合量測操作狀態下之振動響應訊號進行外力預測。

當系統於簡諧激振狀態下，其輸出響應亦會為簡諧形式，故本論文發展藉由量測單純輸出之加速度響應，即操作變形振型，以估測結構系統模態振型之分析模式。採用直接訊號分析之方式，不但可改善傳統模態分析之缺點，同時可提高模態測試分析之適用性、速度，對於降低成本，提昇效率有相當大的幫助，且量測獲得操作變形振型，不但可瞭解結構系統真實之振動行為，亦可配合其他模式及資訊，從事破壞檢測或外力預測等分析。

本文採用時域法、頻域法及移轉特性法三種操作變形振型量測方法量測多自由度系統操作變形振型，經確認分析後再代入模態振型預測最佳化程式，測得系統操作變形振型，並探討模態振型預測模式於共振激振及非共振激振狀態下之估測結果，以及固定激振頻率下，不同激振大小之估測結果，以瞭解模態振型估測模式之適用性與準確性。

二、操作變形振型分析

1. 操作變形振型量測原理

本文激振外力為正弦函數形式，故系統輸出響應亦可表示成簡諧函數形式，故概念上，以感測器直接量測同一時間條件下所有質塊響應，即可獲得系統 ODS。本文以阻抗頭，固定量測參考點響應，即激振質塊之響應，而以另二顆加速度計，移動量測其它自由度響應。由於有時域及頻域響應函數兩種響應訊號，故本文對應記錄訊號之不同，採用時域法及頻域法記錄作業狀態響應訊號。

(1) 時域法：

本文為對多自由度系統於 k 自由度，進行單一簡諧力激振 $f_k(t) = F_k e^{i\omega_s t}$ ， ω_s 為激振頻率 (rad/sec)， $\omega_s = 2\pi f_s$ ，激振訊號如圖 1(a)所示，可獲得激振外力振幅值 $|F_k|$ 及週期 T ，假設激振訊號為正弦波形，理想上 $f_k(0) = 0$ ，但實際量測時，可能存有時間差，故修正後激振外力為：

$$f_k(t) = F_k \sin \omega_s t = F_k \sin(2\pi f_s t - \phi_f) \quad (1)$$

圖 1(b)及圖 1(c)分別為參考點與移動點加速度響應訊號圖，因系統為簡諧激振，故各自由度響應亦會為簡諧形式，如圖 1 所示，可得加速度響應振幅 X_{ref} 與 X_j ，以及與激振訊號之時間差 t_{ref} 與 t_j ，經下式轉換，即可得響應訊號與激振訊號之相位差。

$$\phi_{ref} = t_{ref} \times 2\pi f_s \times 180/\pi - \phi_f \quad (2)$$

$$\phi_j = t_j \times 2\pi f_s \times 180/\pi - \phi_f \quad (3)$$

本文以參考點相位值為主，修正移動點量測結果，關係式如下：

$$\phi'_j = \phi_j + (\phi_{ref} - \phi_{ref,j}) \quad (4)$$

則參考點響應可表示成：

$$x_{ref}(t) = |X_{ref}| \sin(2\pi f_s t - \phi_{ref}) \quad (5)$$

$$\phi_{ref} = \angle X_{ref}(\omega_s) \quad (6)$$

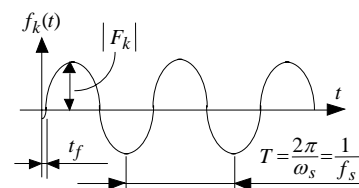
移動點 j 位移響應可表示成：

$$x_j(t) = |X_j| \sin(2\pi f_s t - \phi_j) \quad (7)$$

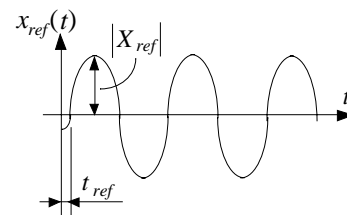
$$\phi_j = \angle X_j(f_s) \quad (8)$$

則時域法量測所得之系統操作變形振型為：

$$ODS = \{X(f_s)\} = \begin{Bmatrix} |X_1| e^{i\phi_1} \\ |X_2| e^{i\phi_2} \\ \vdots \\ |X_n| e^{i\phi_n} \end{Bmatrix} \quad (9)$$



(a) 激振外力



(b) 參考點響應

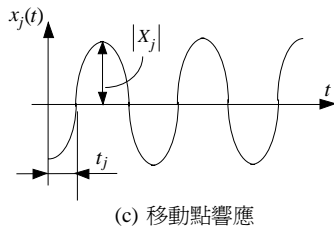
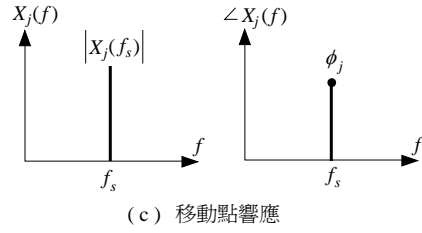


圖 1 ODS 量測之一時域法

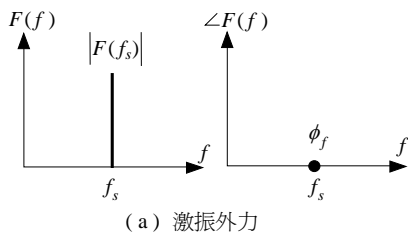


(2) 頻域法：

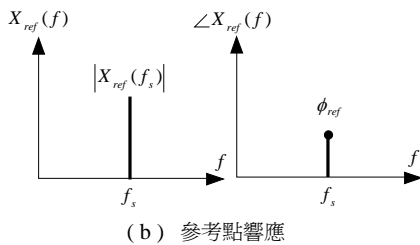
圖 2 為 ODS 量測之頻域法示意圖，其量測步驟與時域法相同，不同之處為量測頻域訊號表示 ODS。頻域法 ODS 量測，首先為記錄激振外力振幅 $|F(f_s)|$ 及相位 $\angle F(f_s)$ ，第二步為記錄參考點加速度響應振幅 $|X_{ref}(f_s)|$ 與相位 ϕ_{ref} ，以及移動點響應振幅 $|X_j(f_s)|$ 與相位 ϕ_j ，同理以參考點相位修正移動點相位，關係式同式(4)，修正後各自由度響應之連線即為 ODS，如圖 2(d)。表示式如下所示：

$$|ODS| = |X(f_s)| = \begin{Bmatrix} |X_1| \\ |X_2| \\ \vdots \\ |X_n| \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\angle ODS = \{\angle X(f_s)\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} \quad (11)$$



(a) 激振外力



(b) 參考點響應

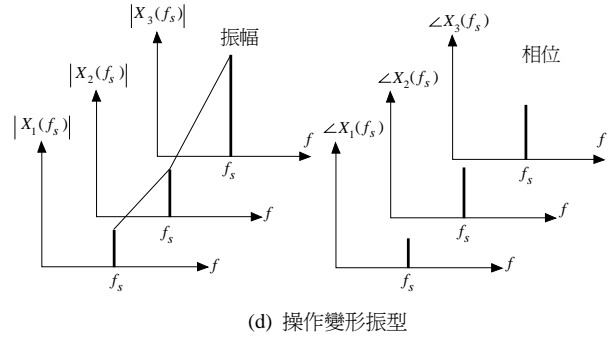


圖 2 ODS 量測之一頻域法

當結構系統於作業狀態下，其系統響應之形態即定義為操作變形型。有諸多之生產設備及加工機械，為往復式或旋轉式運轉形式，因此，本文假定系統處於簡諧激振之操作狀態。由簡諧響應分析，知當系統為簡諧激振狀態，其響應亦會為簡諧形式，解運動方程式，可得系統位移響應如下：

$$\{x\} = \{X(\omega_s)\} e^{i\omega_s t} = \begin{Bmatrix} X_1(\omega_s) \\ X_2(\omega_s) \\ \vdots \\ X_n(\omega_s) \end{Bmatrix} e^{i\omega_s t} \quad (14)$$

每一自由度之位移響應可表示為頻率響應函數與激振外力之乘積如式(15)：

$$X_j(\omega_s) = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{r,k} \phi_{r,j} F_k}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\zeta_r \omega_r \omega_s)} \quad (15)$$

$\{X(\omega_s)\}$ 即為單一簡諧激振下結構系統之操作變形振型。

三、操作變形振型估測模態振型

圖 3 為模態振型估測概念圖，當結構系統受簡諧激振，其響應必亦為簡諧形式，根據多自由度系統簡諧響應分析，結構系統節點簡諧響應為頻率響應函數與外力之乘積，而系統自然頻率及阻尼比可由頻率響應函數擷取，簡諧激振外力資訊為可知，因此，概念上只要一個操作變形振型，即可估測模態振型。

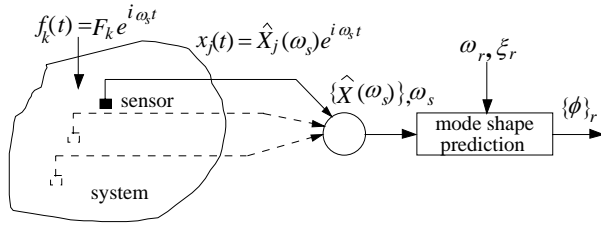


圖 3 模態振型估測概念圖

依循上述概念，設計發展一最佳化模態振型估測模式，以量測的與預測的 ODS 之 MAC 為 1 作為目標函數。因為理想預測之模態振型，具有良好之正交性，與理論模態振型之對角線元素 MAC 值必趨近於 1。故本文以理論的與預測的模態振型之 MAC 等於或小於 1，作為限制條件，進行最佳化，估測設計變數，即預測的模態振型。

目標函數(Objective function)：

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[MAC(\{X_j(\omega_s)\}, \{\hat{X}_j(\omega_s)\}) - 1 \right]^2 \\ & = \sum_{j=1}^n \left[MAC \left(\left\{ \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{r,j} \phi_{r,k} F_k}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega_s)} \right\}, \{\hat{X}_j(\omega_s)\} \right) - 1 \right]^2 \end{aligned} \quad (16)$$

設計變數(Design variables)：

$$\begin{aligned} & \phi_{1,1}, \phi_{1,2}, \dots, \phi_{1,n}, \\ & \phi_{2,1}, \phi_{2,2}, \dots, \phi_{2,n}, \\ & \dots \\ & \phi_{n,1}, \phi_{n,2}, \dots, \phi_{n,n} \end{aligned} \quad (17)$$

限制條件(Constraints)：

$$\left[MAC(\{\phi\}_j, \{\hat{\phi}\}_j) \right] - [1] \leq [0] \quad (18)$$

其中， $\{\hat{X}_j(\omega_s)\}$ 為實驗 ODS，而 $\{X_j(\omega_s)\}$ 為預測之 ODS， $\{\phi\}_j$ 為理論的模態振型， $\{\hat{\phi}\}_j$ 為預測的模態振型。

而操作變形振型估測模態振型流程，如圖 4 所示，估測開始，輸入初始模態振型及激振力大小，然後宣告激振頻率、阻尼比，輸入 ODS 量測驗證結果，求解最佳化問題，最後測得模態振型。若為模態振型估測模式可行性分析，則於第 4 步驟，改宣告理論 ODS 值為實驗 ODS 值。

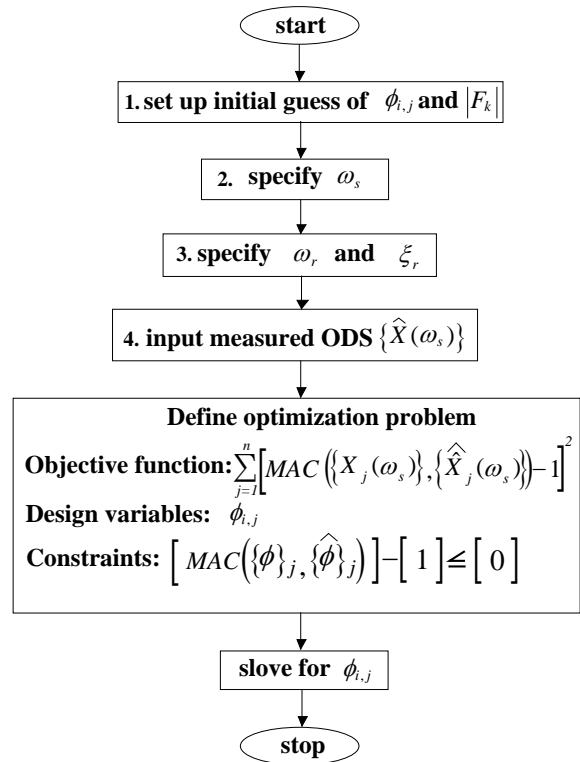


圖 4 模態振型估測流程圖

四、結果與討論

1. 模態振型估測模式可行性分析

依循前節所述模態振型估測流程，改以理論分析 ODS 值取代實驗值估測模態振型，驗證項目包括共振激振狀態(4.0Hz、11.5 Hz、16.5 Hz)及非共振激振狀態(7.75Hz、14.0 Hz、20 Hz)各 3 種激振頻率，驗證估測所得模態振型與理論值模態振型振幅誤差是否接近 0，而 MAC 及 MSF 值是否近似 1，共振激振狀態下，有 4.0Hz、11.5 Hz 及 16.5 Hz 三種激振頻率分析結果，而非共振激振狀態下，亦有 7.75Hz、14.0 Hz 及 20 Hz 三種激振頻率分析結果。以 $f_s = 4\text{Hz} \approx f_1$ ，激振力 0.10N 條件時之估測結果，分析探討如下：

- 表 1(a)為理論與估測 ODS 之比較，其估測誤差 0.65% 以內，又 $MAC(X, \hat{X}) = 0.9999$ ， $MSF(X, \hat{X}) = 0.9989$ ，可知 ODS 有很好之正交性。
- 表 1(b)為理論與預測之模態振型值，而表 1(c)為模態振型估測誤差，結果顯示，估測之模態振型誤差均在 $\pm 1\%$ 以內。
- 又表 1(d)及(e)分別為理論模態振型 $[\phi]$ 與預測模態振型 $[\hat{\phi}]$ 之 MAC 及 MSF 矩陣值，由表 1(d)可知 MAC 矩陣為 $[I]$ 矩陣，顯示 $[\phi]$ 及 $[\hat{\phi}]$ 有很好之正交性， MSF 對角線值趨近 1，非對角線有微小值，表示估測之模態振型值，略有偏差，由表 1(c)可知，此偏差在 $\pm 1\%$ 以內。

共振激振及非共振激振下之模態振型估測可行性分析結果，綜合討論如下：

- (1) 估測之 ODS 與理論推導之 ODS 相當吻合，亦即滿足目標函數最小化之意義。
- (2) 模態振型為設計變數，在此為 3 個自由度系統，共有 9 個設計變數，可證明模態振型估測誤差均在 1% 以內。
- (3) 所求得之設計變數即模態振型均合理地滿足限制條件如(16)式，即模態振型正交性條件。

經理論之可行性驗證分析，不同操作條件測試，證明所發展之模態振型估測模式為可行的，因此，可預期若實驗量測得到滿足理論多自由度比例系統假設之 ODS，激振狀態於線性範圍內，無儀器與雜訊影響，則本模態振型估測模式可得到不錯之分析結果。

2. 模態模型估測模式實驗驗證分析

本節內容為利用 ODS 量測驗證結果，依循圖 4 所示之模態振型估測最佳化分析流程，估測多自由度系統模態振型，驗證範疇包括共振激振狀態，激振頻率 4.0Hz、11.5 Hz 及 16.5 Hz，以及非共振激振狀態，激振頻率 7.75Hz、14.0 Hz 及 20 Hz，以瞭解模態振型估測模式之適用性與準確性。

(1) 共振激振狀態下

以表 2 近似第一自然頻率共振激振 $f_s = 4\text{Hz} \approx f_1$ ，激振力 0.185N，模態振型估測結果為例，作深入探討如下：

- a. 表 2(a)為近似第一自然頻率激振，激振力 0.061N 條件下，時域法量測的與估測的 ODS 分析結果，其中，ODS 量測值為經與理論驗證後之結果；估測值為實驗量測值代入理論模式求得之結果；而誤差是指實驗量測與估測 ODS 絕對值之比值；本文所分析之多自由度系統有 3 個質塊，因只考量單軸向振動，故一個質塊，一個自由度。結果顯示，實驗與估測 ODS 振幅值誤差 -0.442% 至 -4.156%，其 $MAC(X, \hat{X}) = 0.9952$ ， $MSF(X, \hat{X}) = 0.9978$ ，代表實驗與估測 ODS 形態振幅比例相近，而目標函數值 2.332×10^{-5} ，則代表最佳化執行結果有收斂。
- b. 表 2(b)為理論與估測之模態振型值，而表 2(c)為模態振型估測誤差，結果顯示，模態振型估測誤差值 -0.293% 至 8.428%，比實驗與估測 ODS 之誤差小，第三模態估測誤差最大，原因為量測之 ODS 包含較少第三模態特性。
- c. 又由表 2(d)及(e)分別為實驗與估測模態振型之 MAC 及 MSF 矩陣值，結果顯示，對角線值趨近 1，MSF 非對角線值 0.04 以下，表示估測之模態振型值，相當接近實驗量測值。

表 3 為近似第二自然頻率 11.5Hz 激振，激振力 0.121N 操作狀態下，實驗與估測之 ODS 及模態振型估測結果，討論如下：

- a. 由表 3(a)實驗與估測 ODS 結果發現，實驗與估測 ODS 誤差 6.3% 以下，表示實驗量測符合要求。實驗與估測 ODS 之 MAC 趨近於 1，MSF 絕對值 0.96，表示兩 ODS 具良好比例關係，振幅大小接近。
- b. 表 3(b)為模態振型估測結果，表 3(c)為模態振型估測誤差，結果顯示，模態振型估測誤差 0.0644% 至 12.579%，模態振型估測誤差較 ODS 估測誤差大，且與第一自然頻率激振分析結果相比，誤差較大，原因為量測品質及模態特性較差所致。
- c. 又由表 3(c)及(d)實驗與估測模態振型之 MAC 及 MSF 矩陣值，MAC 對角線值趨近 1，非對角線絕對值有微小值，表示估測之模態振型值，略有偏差，MSF 對角線值 1.0 左右，表示實驗量測與估測模態振型振幅大小接近。

表 4 為近似第三自然頻率 16.5Hz 激振，激振力 1.5N 操作狀態下，實驗與估測之 ODS 及模態振型估測結果，討論如下：

- a. 表 4(a)為實驗與估測 ODS 之誤差，誤差結果 -5.156%~26.832% 較近似第一及第二自然頻率激振時大，原因為 ODS 量測訊雜比不理想。
- b. 由表 4(b)實驗與估測 ODS 之 MAC 及 MSF 結果絕對值 0.97 以上，可知兩 ODS 形態相似，振幅值比例具高關係。
- c. 又由表 4(c)實驗與估測模態振型誤差最大值分別為 25.59%、27.23% 及 19.89%，亦比第二自然頻率激振時大。原因為量測之 ODS 其第一、二之模態貢獻較小，特性較弱。
- d. 但由表 4(d)實驗與估測模態振型之 MAC 對角線值趨近 1，以及表 4(e)MSF 對角線值 1 左右，表示模態振型具良好比例關係。

(2) 非共振激振狀態下

以表 5 激振頻率 7.75Hz，亦即介於第一及第二個自然頻率之間，激振力 1.50N 操作狀態下，模態振型估測結果為例，討論如下：

- a. 表 5(a)為頻率激振 7.75Hz，激振力 1.50N 條件下，驗證結果最佳之頻域法量測的與估測的 ODS 之分析結果，ODS 估測誤差 -2.5061%， $MAC(X, \hat{X}) = 0.9979$ ， $MSF(X, \hat{X}) = 1.0214$ ，表示兩 ODS 具良好之比例關係，振幅大小接近。最佳化目標函數值 4.3203×10^{-6} 有收斂，代表估測執行順利完成。
- b. 表 5(b)為理論與預測之模態振型值，而表 5(c)為模態振型估測誤差，結果顯示，誤差在 3.9% 以內，模態振型估測成功，且

與共振激振估測結果相比誤差較小。

- c. 又由表 5(d)及(e)分別為實驗與估測模態振型之 MAC 及 MSF 矩陣值，結果顯示，對角線值趨近 1，非對角線有微小值，表示估測之模態振型值，偏差非常小，量測與估測模態振型相似。

表 6 為激振頻率 14.0Hz，亦即介於第二及第三個自然頻率之間，激振力 1.7N 狀態下，ODS 及模態振型估測結果，討論如下：

- a. 由表 6(a) 為實驗與估測 ODS 及其誤差，結果顯示，實驗與估測 ODS 之最大誤差 5.8% 以下，且兩 ODS 之 MAC 值趨近於 1，顯示兩 ODS 具良好之比例關係，振幅差距相當小，而兩 ODS 之 MSF 絕對值 0.97，代表實驗與估測 ODS 振幅比例關係。
- b. 表 6(c) 為模態振型估測誤差，結果顯示估測與理論模態振型差距 6.35% 以下，顯示此一激振狀態下，可由 ODS 準確測得系統模態振型，且估測誤差亦優於共振激振。
- c. 又由表 6(d)理論與估測模態振型之 MAC 對角線值趨近於 1，表示兩模態振型比例相近，而 MSF 對角線值 1 左右，代表估測與理論模態振型振幅相差不大。

表 7 為非共振激振，激振頻率 $20.0\text{Hz} > f_3$ ，激振力 0.90N 操作狀態下，實驗與估測之 ODS 及模態振型估測結果，討論如下：

- a. 由表 7(a)實驗與估測 ODS 比對結果，最大誤差值 6.66%，代表 ODS 量測品質符合要求，可代入估測模式測得模態振型，又由實驗與估測 ODS 之 MAC 值趨近於 1，且實驗與估測 ODS 之 MSF 絕對值 0.919 及 0.939，代表兩 ODS 振幅具良好之比例關係，形態趨勢相近。
- b. 表 7(c)為模態振型估測誤差，結果顯示，模態振型估測誤差最大值 1.2607%，是所有模態振型估測分析中最佳的。
- c. 表 7(d)所示為理論與估測模態振型 MAC 值，結果顯示，對角線值為 1，其餘為 0，代表兩模態振型極為相似，而兩模態振型之 MSF 結果，對角線值 1 左右，亦代表兩模態振型比例相近。

表 1 $f_s = 4\text{Hz} \approx f_1$ 理論 ODS 估測模態振型結果 ($F = 0.10\text{N}$)

(a) 操作變形振型

自由度 \ ODS	理論值, X	估測值, \hat{X}	誤差(%)
1	0.0005444 - 0.0001573i	0.0005479 - 0.0001583i	0.6491
2	0.0009929 - 0.0002850i	0.0009964 - 0.0002860i	0.3574
3	0.0012553 - 0.0003560i	0.0012533 - 0.0003554i	-0.1625

備註: $MAC(X, \hat{X}) = 0.999990$; $MSF(X, \hat{X}) = 0.998978 - 0.000004i$
 誤差 = $(\hat{X} - X) / X \times 100$

(b) 模態振型估測結果

模態振型 \ 自由度	理論值, $[\phi]$			估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3210	0.7198	0.5797
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.5798	0.3209	-0.7198
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.7198	-0.5797	0.3210

(c) 模態振型估測誤差

模態振型 \ 自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	0.7307	0.4030	0.4231
2	0.4395	0.2173	0.4924
3	-0.0821	0.0905	-0.1986

備註: 估測誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(d) 模態振型保證指標 ($MAC([\phi], [\hat{\phi}])$)

[ϕ] 理論 \ [$\hat{\phi}$] 預測	1	2	3
	1	1.0000	0.0000
2	0.0000	1.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	1.0000

(e) 模態振型比例因子 ($MSF([\phi], [\hat{\phi}])$)

[ϕ] 理論 \ [$\hat{\phi}$] 預測	1	2	3
	1	0.9981	-0.0031
2	-0.0012	0.9973	-0.0008
3	0.0016	-0.0008	0.9961

表 2 $f_s = 4.0\text{Hz} \approx f_1$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 0.185\text{N}$)

(a) 操作變形振型分析結果

自由度 \ ODS	實驗量測值, X	估測值, \hat{X}	誤差(%)
1	$(-0.939355 + 0.324914i) \times 10^{-3}$	$(0.950708 - 0.274850i) \times 10^{-3}$	-0.4420
2	$(-1.854932 + 0.872865i) \times 10^{-3}$	$(1.888476 - 0.542083i) \times 10^{-3}$	-4.1560
3	$(-2.184637 + 0.662911i) \times 10^{-3}$	$(2.178126 - 0.617255i) \times 10^{-3}$	-0.8413

備註: $MAC(X, \hat{X}) = 0.995172$; 目標函數值 = 2.3324×10^{-5}

$MSF(X, \hat{X}) = -0.97341 - 0.07585i$; 誤差 = $(\hat{X} - X) / X \times 100$

$$MSF(X, \hat{X}) = 0.95923 + 0.04980; \text{誤差} = (\hat{X} - X) / X \times 100$$

(b) 模態振型估測結果

模態振型 自由度	理論分析值, $[\phi]$			估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3109	0.7148	0.5918
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.6130	0.3109	-0.6969
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.6974	-0.5919	0.3487

備註：為時域法所得 ODS 估測結果

(b) 模態振型估測結果

模態振型 自由度	理論分析值, $[\phi]$			估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3587	0.7230	0.5733
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.5854	0.2896	-0.7167
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.6658	-0.6442	0.3213

備註：為頻域法所得 ODS 估測結果

(c) 模態振型估測誤差

模態振型 自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	-2.4171	-0.2932	2.5111
2	6.2052	-2.8964	-2.7016
3	-3.1977	2.2060	8.4280

備註：估測誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(c) 模態振型估測誤差

模態振型 自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	12.5790	0.8525	-0.6964
2	1.4099	-9.5579	0.0644
3	-7.5829	11.2211	-0.1152

備註：估測誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(d) 模態振型保證指標 $(MAC([\phi], [\hat{\phi}]))$

$[\hat{\phi}]$ 預測 $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	0.9980	0.0004	0.0015
2	0.0003	0.9997	0.0000
3	0.0014	0.0000	0.9986

(d) 模態振型保證指標 $(MAC([\phi], [\hat{\phi}]))$

$[\hat{\phi}]$ 預測 $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	0.9955	0.0045	0.0000
2	0.0040	0.9960	0.0000
3	0.0000	0.0000	1.0000

(e) 模態振型比例因子 $(MSF([\phi], [\hat{\phi}]))$

$[\hat{\phi}]$ 預測 $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	0.9964	-0.0200	0.0392
2	0.0160	0.9967	-0.0009
3	-0.0368	-0.0005	0.9953

(e) 模態振型比例因子 $(MSF([\phi], [\hat{\phi}]))$

$[\hat{\phi}]$ 預測 $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	1.0188	-0.0651	0.0004
2	0.0645	0.9634	-0.0048
3	0.0021	0.0027	1.0022

表 3 $f_s = 11.5\text{Hz} \approx f_2$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 0.121\text{N}$)

表 4 $f_s = 16.5\text{Hz} \approx f_3$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 1.5\text{N}$)

(a) 操作變形振型分析結果

ODS 自由度	實驗量測值 X	估測值 \hat{X}	誤差 (%)
1	$(-0.024377 + 0.217327i)e-3$	$(-0.015973 + 0.224221i)e-3$	4.1611
2	$(-0.008116 + 0.089181i)e-3$	$(-0.020792 + 0.091161i)e-3$	4.8131
3	$(0.022622 - 0.189716i)e-3$	$(0.0024382 - 0.200947i)e-3$	6.2952

備註： $MAC(X, \hat{X}) = 0.99563$; 目標函數值 = 1.90853×10^{-5}

(a) 操作變形振型分析結果

ODS 自由度	實驗量測值 X	估測值 \hat{X}	誤差 (%)
1	$(0.1547048 - 0.264216i)e-3$	$(0.131236 - 0.259042i)e-3$	-5.156
2	$(-0.136620 + 0.432250i)e-3$	$(-0.089646 + 0.390492i)e-3$	-11.620
3	$(-0.175146 - 0.259274i)e-3$	$(-0.156466 - 0.167119i)e-3$	-26.832

備註： $MAC(X, \hat{X}) = 0.99052$; 目標函數值 = 9.05026×10^{-5}

$$MSF(X, \hat{X}) = 0.85772 - 0.07883i; \text{誤差} = (\hat{X} - X) / X \times 100$$

$$MSF(X, \hat{X}) = 0.52586 + 0.87565i; \text{誤差} = (\hat{X} - X) / X \times 100$$

(b) 模態振型估測結果

模態振型 自由度	理論分析值, $[\phi]$			估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3821	0.7750	0.4743
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.5795	0.2843	-0.6890
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.7651	-0.6024	0.2850

備註：為頻域法所得 ODS 估測結果

(b) 模態振型估測結果

模態振型 自由度	理論分析值, $[\phi]$			估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3279	0.7249	0.5828
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.5780	0.3160	-0.7171
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.6924	-0.6072	0.3227

備註：為時域法所得 ODS 估測結果

(c) 模態振型估測誤差

模態振型 自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	19.8973	8.0951	-17.8330
2	0.3959	-11.2193	-3.8036
3	6.1997	4.0022	-11.3828

備註：誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(c) 模態振型估測誤差

模態振型 自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	2.9132	1.1188	0.9575
2	0.1364	-1.3100	0.1145
3	-3.8928	4.8344	0.3396

備註：估測誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(d) 模態振型保證指標 ($MAC([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\hat{\phi}]$ 預測 \ / \ $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	0.9972	0.0005	0.0023
2	0.0003	0.9969	0.0028
3	0.0026	0.0025	0.9949

(d) 模態振型保證指標 ($MAC([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\hat{\phi}]$ 預測 \ / \ $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	0.9994	0.0006	0.0000
2	0.0004	0.9996	0.0000
3	0.0000	0.0000	1.0000

(e) 模態振型比例因子 ($MSF([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\hat{\phi}]$ 預測 \ / \ $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	0.9440	-0.0219	-0.0528
2	0.0153	0.9533	-0.0584
3	0.0483	0.0479	1.0999

表 5 $f_s = 7.75\text{Hz} \approx f_{12}$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 1.50\text{N}$)

(e) 模態振型比例因子 ($MSF([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\hat{\phi}]$ 預測 \ / \ $[\phi]$ 理論	1	2	3
1	1.0173	-0.0241	0.0045
2	0.0208	0.9784	0.0014
3	-0.0022	-0.0032	0.9957

表 6 $f_s = 14\text{Hz} \approx f_{23}$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 1.7\text{N}$)

(a) 操作變形振型分析結果

ODS 自由度	實驗量測值 X	估測值 \hat{X}	誤差 (%)
1	$(-0.209976 - 0.348769i)e-3$	$(-0.396783 + 0.009483i)e-3$	-2.5061
2	$(-0.258221 - 0.433687i)e-3$	$(-0.493690 + 0.003051i)e-3$	-2.1871
3	$(-0.120579 - 0.178162i)e-3$	$(-0.211923 - 0.017196i)e-3$	-1.1687

備註： $MAC(X, \hat{X}) = 0.99792$ ；目標函數值 = 4.3203e-6

(a) 操作變形振型分析結果

ODS 自由度	實驗量測值 X	估測值 \hat{X}	誤差 (%)
1	$(-0.073145 + 0.325311i)e-3$	$(0.3395637 + 0.014059i)e-3$	1.9259
2	$(0.022282 - 0.102712i)e-3$	$(-0.1038826 + 0.039600i)e-3$	5.7786
3	$(0.074714 - 0.270040i)e-3$	$(-0.284647 - 0.039983i)e-3$	2.5899

備註： $MAC(X, \hat{X}) = 0.99011$ ；目標函數 = 9.7728e-5

$$MSF(X, \hat{X}) = -0.17634 + 0.95558; \text{誤差} = (\hat{X} - X) / X \times 100$$

$$MSF(X, \hat{X}) = 0.93840 + 0.04447i; \text{誤差} = (\hat{X} - X) / X \times 100$$

(b) 模態振型估測結果

自由度	理論分析值, $[\phi]$			實驗估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3047	0.7421	0.5733
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.5826	0.3156	-0.7158
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.7056	-0.5811	0.3433

備註：為頻域法所得 ODS 估測結果

(b) 模態振型估測結果

自由度	理論分析值, $[\phi]$			實驗估測值, $[\hat{\phi}]$		
	1	2	3	1	2	3
1	0.3186	0.7169	0.5773	0.3203	0.7207	0.5838
2	0.5772	0.3202	-0.7163	0.5791	0.3201	-0.7253
3	0.7204	-0.5792	0.3216	0.7170	-0.5804	0.3251

備註：為頻域法所得 ODS 估測結果

表 7 $f_s = 20\text{Hz} > f_3$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 0.90\text{N}$) (續)

(c) 模態振型估測誤差

自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	-4.3752	3.5099	-0.6889
2	0.9248	-1.4382	-0.0662
3	-2.0522	0.3387	6.7393

備註：估測誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(c) 模態振型估測誤差

自由度	估測誤差 (%)		
	1	2	3
1	0.5093	0.5278	1.1313
2	0.3179	-0.0391	1.2607
3	-0.4689	0.2159	1.0686

備註：估測誤差 = $([\hat{\phi}] - [\phi]) / [\phi] \times 100$

(d) 模態振型保證指標 ($MAC([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\phi]$ 理論	$[\hat{\phi}]$ 預測		
	1	2	3
1	0.9997	0.0000	0.0003
2	0.0000	0.9997	0.0003
3	0.0002	0.0003	0.9995

(d) 模態振型保證指標 ($MAC([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\phi]$ 理論	$[\hat{\phi}]$ 預測		
	1	2	3
1	1.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	1.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	1.0000

(e) 模態振型比例因子 ($MSF([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\phi]$ 理論	$[\hat{\phi}]$ 預測		
	1	2	3
1	1.0124	0.0000	0.0175
2	-0.0040	0.9814	-0.0177
3	-0.0155	0.0156	0.9950

表 7 $f_s = 20\text{Hz} > f_3$ 實驗 ODS 估測模態振型結果 ($F = 0.90\text{N}$)

(e) 模態振型比例因子 ($MSF([\phi], [\hat{\phi}])$)

$[\phi]$ 理論	$[\hat{\phi}]$ 預測		
	1	2	3
1	1.0009	-0.0039	0.0016
2	-0.0003	0.9964	-0.0020
3	0.0008	0.0001	0.9882

四、結論

(a) 操作變形振型分析結果

自由度	實驗量測值 X	估測值 \hat{X}	誤差 (%)
1	$(-0.011298-0.004098i)e-3$	$(-0.011732-0.004716i)e-3$	5.2048
2	$(0.032194+0.004862i)e-3$	$(0.032936+0.008149i)e-3$	4.2072
3	$(-0.072608-0.009962i)e-3$	$(-0.078025-0.004681i)e-3$	6.6538

備註： $MAC(X, \hat{X}) = 0.99600$ ；目標函數 = $1.6023e-5$

本文主要目的為進行結構系統於簡諧激振下之模態分析，發展一模態振型估測模式，由系統操作變形振型預測模態振型，首先進行可行性分析，以理論 ODS 取代實驗 ODS 進行估測，探討共振激振及非共振激振狀態，確認研究模式為可行後，最後以實驗量測 ODS 估測模態振型。為瞭解研究模式之適用性，實驗驗證分析項目包括共振激振及非共振激振狀態，理論 ODS 估測模態振型結果證實，本文所發展之模態振型最佳化估測模式為可行的，而實驗驗證

證分析更證實，不論共振激振或非共振激振狀態下，均能獲得理想之估測結果，且在系統線性範圍內，激振力愈大，訊雜比愈大，模態振型估測結果愈好。其中，非共振激振因量測之 ODS 較平均包含各模態特性，模態振型估測效果較好，因此估測模式於非共振激振時適用性較大。

五、誌謝

本文承蒙行政院國家科學發展委員會計劃支持，計畫編號：NSC 89-2212-E-020-008。

六、參考文獻

1. 崔永晉，1992，「操作中結構之模態分析」，國科會計劃編號 NSC-82-0401-E-006-175，國立成功大學機械工程系。
2. Dossing, O., 1987, "Operational Deflection Shapes : Background, Measurement and Application," *Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference*, pp. 1372-1378.
3. Barney, P., and T. Carne, 1999, "Modal Parameter Extraction Using Natural Excitation Response Data," *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, pp. 49-55.
4. Hermans, L., and H. Van der Auweraer, 1999, "Modal Testing and Analysis of Structures Under Operational Conditions : Industrial Applications," *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing*, pp. 193-216.
5. Farrar, C. R., T. A. Dufey, P. J. Cornwell, and S. W. Doebling, 1999, "Excitation Methods for Bridge Structures," *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, 1063-1068.
6. Hermans, L., and H. Van der Auweraer, 1999, "Applications of Structural Model Identification During Normal Operating Conditions: An Overview of the Eureka Project Synopsis," *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, pp. 27-34.
7. Marscher, W. D., and C. W. Jen, 1999, "Use of Operating Deflection and Mode Shapes for Machinery Diagnostics," *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, pp. 2065-2071.
8. Pascual, R., J. C. Golinval and M. Razeto, 1999, "On-Line Damage Assessment Using Operating Deflection Shape," *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference*, pp. 238-243.
9. Pai, P. F., and L. G. Young, 2001, "Damage Detection of Beams

using Operational Deflection Shapes," *Journal of Solids and Structures*, No. 38, pp. 3161-3192.

10. Verhoeven, J., 1988, "Excitation Force Identification of Rotating Machines Using Operational Rotor/Stator Amplitude Data and Analytical Synthesized Transfer Functions," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 1, pp. 307-314.

Modal Analysis for MDOF System in Harmonic Excitation Condition

Bor-Tsuen Wang and Hua-Liang Hu

Department of Mechanical Engineering
National Pingtung University of Science and
Technology

Abstract

This work presents the modal analysis for multiple degree-of-freedom system in harmonic excitation conditions and develops the method to obtain mode shapes from the measured operational deflection shape (ODS). This work chose time domain method and frequency domain method to measure ODS. The prediction formula theory feasibility analysis presented is precisely. Several experimental examples include resonant and anti-resonant excitation are presented to demonstrate the feasibility of the predictive algorithm and shown successful in determining all of the mode shape vectors. The anti-resonant excitation predicts mode shape accuracy than resonant excitation states, because the measure ODS its modal characteristic uniformly when anti-resonant excitation state. The predictive model can also be extended to rotary system in operating conditions and break through the traditional experimental modal analysis's limit. The study can to expand to multiple harmonic excitations and force prediction problem.