

簡諧響應分析之阻尼模擬

Simulation of Damping Effects for Harmonic Response Analysis

王栢村¹ 王廷維²

¹教授 ²碩士生

國立屏東科技大學 機械工程系

wangbt@mail.npust.edu.tw

摘要

理論振動分析包含四種類型：模態分析、簡諧、暫態及頻譜響應分析，模態分析可忽略阻尼效應，其餘須加入阻尼效應，而阻尼效應之阻尼比須由實驗取得。本文首先分別簡介比例黏滯阻尼多自由度系統之模態分析與簡諧響應分析，再介紹不同阻尼模型之理論模型，特別針對 ANSYS 軟體阻尼設定指令做對應之使用說明。本文也探討一實際的懸臂樑結構，藉由實驗模態分析可求得其結構模態阻尼比，接著探討由實驗阻尼數據導入不同阻尼模型之設定，以能進行簡諧響應分析求得系統之頻率響應函數，並比較不同阻尼模擬方式對頻率響應函數之影響，本文最後提出可應用於各種工程結構實務問題，能包含阻尼效應的頻率響應函數之實務模擬程序與方式。

關鍵詞： 阻尼、簡諧響應分析、實驗模態分析

1. 前言

阻尼之模擬在工程應用上相當重要，例如：避震器、橋墩、減震器等，當需要研發新的避震器、橋墩、減震器等結構，往往會先用理論解析或軟體模擬，來模擬真實結構的阻尼效應。而結構的阻尼效應在實務上必須透過實驗方式才可求得，通常以模態阻尼比表示，模態阻尼比是以實驗模態分析 (EMA) 之手法，利用衝擊錘敲擊結構，用加速規當感測器之方式，以頻譜分析儀接收量測信號，所獲得結構之頻率響應函數，並透過曲線嵌合擷取到結構之模態參數，包括：自然頻率、模態阻尼比及模態振型。本文將探討結構之阻尼模擬方式，藉由實驗模態分析之手法，得知此結構之模態阻尼比，以不同阻尼模擬方式加入到理論之簡諧響應分析，得到符合實際結構特性之頻率響應函數。

Adhikari[1]提出一種阻尼模擬方法，假設系統為比例黏滯阻尼系統，並用數值分析方式，模擬實際阻尼效應，其中，假設質量矩陣、剛性矩陣及阻尼矩陣，最後可得模態阻尼比因子與激振頻率之關

係。Wang *et al.* [2]探討懸臂樑、PCB 板及碳纖板，經由實驗量測得模態阻尼比及累積阻尼比，以實驗之模態阻尼比及累積平均阻尼比加入理論阻尼矩陣模型，求得結構之頻率響應函數，並說明阻尼矩陣加入理論模型之模擬效果。第一種方法假設結構為比例黏滯阻尼系統，可得模態阻尼比、比例黏滯係數、質量與剛性勁度矩陣之關係式，求得比例黏滯阻尼係數，其中比例黏滯阻尼係數透過最佳化分析方式求得，最後在將比例黏滯阻尼係數當作理論模型之阻尼效應，得到結構之理論頻率響應函數。第二種方法則將實驗模態分析量測得各模態阻尼比，並加以累積平均所得之常數，稱為累積平均阻尼比。接著假設模態阻尼比皆為一累積平均阻尼比之常數，當作阻尼效應加入理論模型，求得結構之理論頻率響應函數。最後，利用懸臂樑、PCB 板及碳纖板加入兩種阻尼矩陣之理論模型，進行簡諧響應分析，求得結構加入阻尼效應之理論頻率響應函數，並與實驗模態分析所得之頻率響應函數結果相比較。

Adhikari *et al.* [3]定義線性黏滯阻尼之數學模型，來解決簡單之振動結構，並證明高階擾動法 (order perturbation method) 之可行性，利用彈簧-質量振盪器，推導線性黏滯阻尼之陣列數值，結果證明該方法，具有良好之準確性，也證明該方法推導黏滯阻尼之陣列數值的正確性。Adhikari[4]說明在一般線性阻尼系統，由實驗模態阻尼比可得到比例阻尼係數，而非線性阻尼系統，就無法由實驗模態阻尼比得到比例阻尼之係數。利用最佳化分析，得到比例阻尼係數，來接近非線性阻尼系統之阻尼矩陣。並利用統計學之觀念，可得非比例阻尼係數的平均值與標準差，得到最符合實際情況的非比例阻尼係數。

蔡等人[5]主要探討含內部黏滯阻尼之 Timoshenko 樑的自由與強迫振動特性。由數值計算的結果可得知，當局部阻尼值持續增加時，會趨近於剛體的特性，而失去阻尼消散能量的特質。Gounaris 和 Anifantis[6]以數值解析的方法，來模擬非線性結構阻尼系統，並探討以數值方法之激振響應下的阻尼效應及彎曲應力。

Qi *et al.*[7]主要以線性轉子系統進行操作模態分析 (OMA)，並探討以頻譜分析 (CTSA)、簡諧濾波



(HWF)、隨機減量(RDT)及希爾柏轉換(HT)之方法，處理操作模態分析之信號，可得 HT 曲線嵌合方法，獲得較佳的轉子系統之模態參數。

本文探討一實際的懸臂樑[2]結構，藉由實驗模態分析(EMA)求得結構之模態參數，再從結構之模態參數中的模態阻尼比，進行簡諧響應分析，求得系統之頻率響應函數，最後比較不同阻尼模擬方式對頻率響應函數之影響。首先回顧多自由度振動系統之模態分析與簡諧響應分析，接著介紹 ANSYS 軟體之阻尼模型及理論阻尼矩陣，阻尼模型包含無阻尼、比例黏滯阻尼(α 、 β)、比例黏滯阻尼(β)、常數阻尼比、模態阻尼比、元素比例黏滯阻尼、元素常數阻尼比及阻尼元素。並以一懸臂樑結構，進行實驗模態分析求得結構之模態參數，包括自然頻率、阻尼比及模態振型，並將實務所得之模態阻尼比帶入不同阻尼模擬方式，以進行簡諧響應分析，求得理論之懸臂樑頻率響應函數，並比較各阻尼模型對頻率響應函數之影響。

2. 多自由度系統之模態分析與簡諧響應分析

本節回顧多自由度系統之模態分析與簡諧響應分析，假設系統之阻尼矩陣為比例黏滯阻尼，可得比例黏滯阻尼之關係式，另外，ANSYS 軟體有三種求解模式(Full Method、Reduced Method、Mode superposition)，當為 Full Method 及 Reduced Method 求解模式，是透過定義機械阻抗矩陣(mechanical impedance matrix)進行求解，而當 Mode Superposition 求解模式，先將系統之頻率響應函數(FRF)以模態域響應之疊加求解。

典型之多自由度振動系統之運動方程式通式如下：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (1)$$

初始條件：

$$\{x(0)\} = \{x_0\}$$

$$\{\dot{x}(0)\} = \{v_0\}$$

其中， $[M]$ ：質量矩陣(mass matrix)， $[C]$ ：阻尼矩陣(damping matrix)， $[K]$ ：勁度矩陣(stiffness matrix)， $\{f\}$ ：外力向量(external force vector)， $\{\ddot{x}\}$ ：加速度向量(acceleration vector)， $\{\dot{x}\}$ ：速度向量(velocity vector)， $\{x\}$ ：位移向量(displacement vector)。其中， $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 為 $n \times n$ 之矩陣，而 n 為系統之自由度数。 $\{\ddot{x}\}$ 、 $\{\dot{x}\}$ 、 $\{x\}$ 及 $\{f\}$ 均為 $n \times 1$ 之向量。 $\{x_0\}$ ：初始位移向量， $\{v_0\}$ ：初始速度向量。

若假設阻尼矩陣 $[C]$ 為比例黏滯阻尼(proportional viscous damping)，係為質量矩陣 $[M]$ 及勁度矩陣 $[K]$ 之線性組合，可表示如下：

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2)$$

其中， α 及 β 為任意常數。具有上式關係之阻尼形式，也稱為雷利阻尼(Rayleigh damping)。

2.1 模態分析

本小節以多自由度系統進行正向模態分析(normal mode analysis)，可得到理論模態參數，包含自然頻率及模態振型。首先假設外力向量及阻尼矩陣為零，即 $\{f\} = \{0\}$ ， $[C] = [0]$ ，則式(1)簡化得：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (3)$$

令

$$\{x\} = \{X\} e^{i\omega t} \quad (4)$$

其中， ω 及 $\{X\}$ 為任意常數及任意向量，將式(4)代入式(3)，得：

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} e^{i\omega t} = \{0\} \quad (5)$$

其中， ω 及 $\{X\}$ 未知項待求解。由於 $e^{i\omega t} \neq 0$ ，因此，可得

$$[K]\{X\} = \omega^2[M]\{X\} \quad (6)$$

觀察上式可知為一般化特徵值問題(generalized eigenvalue problem)， $[M]$ 、 $[K]$ 矩陣為實數，一般為對稱矩陣(real and symmetric matrix)，則可求得 n 組不同(distinct)之特徵值(eigenvalue) ω_r^2 及對應之特徵向量(eigenvector) $\{X_r\}$ ，表示如下：

$$\omega_r^2 \rightarrow \{X_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

ω_r^2 與 $\{X_r\}$ 成對的常數與向量組合。在振動分析之物理意義上， $\omega_r = 2\pi f_r$ 為第 r 個自然頻頻率(rad/sec)， f_r 單位為 Hz， $\{X_r\}$ 為第 r 個模態振型向量。

模態振動 $\{X_r\}$ ，是可以取任意比例的(scalable)，可重新定義「對質量矩陣正交化模態振型向量」(mass-matrix normalized mode shape vector)如下：

$$\{\phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{X_r\} \quad (8)$$

其中，

$$m_r = \{X_r\}^T [M] \{X_r\} \quad (9)$$

可定義對質量矩陣正交化之模態矩陣(mass-matrix normalized modal matrix)如下：

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}] \quad (10)$$

則模態振型正交性關係之矩陣形式如下：

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (11)$$

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [2\xi_r \omega_r] \quad (12)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\omega_r^2] \quad (13)$$

系統之振動模態(modes of vibration)，即系統之模態參數(modal parameter)，第 r 個振動模態包括：自然頻率 ω_r 、模態阻尼比 ξ_r 、模態振型向量 $\{\phi_r\}$ ，其中，

因為有式(2)阻尼形式之關係，可得

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \quad (14)$$

2.2 簡諧響應分析

本小節簡介多自由度系統之簡諧響應分析，可得到系統之第 j 個自由度外力輸入與第 i 個自由度位移輸出之頻率響應函數(FRF)與頻率響應函數矩陣 $[H(\omega)]$ 。

簡諧響應分析在求得系統之輸入與輸出間之頻率響應函數(frequency response function, FRF)，令外力向量如下：

$$\{f(t)\} = \{F\} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (15)$$

其中， $\{F\}$ 為簡諧外力振幅向量， $\omega = 2\pi f$ 為簡諧力之激振頻率(rad/sec)，其第 j 個自由度之簡諧力振幅為 F_j ，則系統之穩態位移響應可得下列形式：

$$\{x(t)\} = \{X\} e^{i\omega t} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (16)$$

其中， $\{X\}$ 為簡諧位移振幅向量，其第 i 個自由度之簡諧位移振幅為 X_i 。可定義求得此系統之第 j 個自由度外力輸入與第 i 個自由度位移輸出之頻率響應函數(FRF)如下：

$$H_{ij}(\omega) = \frac{X_i}{F_j} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{r,i} \phi_{r,j}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2\xi_r \omega_r \omega)} \quad (17)$$

又，另一種求得 FRF 方式，可將式(15)及(16)代入式(1)之系統方程式，可得：

$$\{([K] - \omega^2 [M]) + i(\omega [C])\} \{X\} e^{i\omega t} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (18)$$

定義機械阻抗矩陣(mechanical impedance matrix)如下：

$$[Z(\omega)] = ([K] - \omega^2 [M]) + i(\omega [C]) \quad (19)$$

則由式(18)得：

$$[Z(\omega)] \{X\} = \{F\} \quad (20)$$

對上式乘上 $[Z(\omega)]^{-1}$ ，則：

$$\begin{aligned} \{X\} &= [Z(\omega)]^{-1} \{F\} \\ &= [H(\omega)] \{F\} \end{aligned} \quad (21)$$

也就是，

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} \quad (22)$$

已知 ANSYS 軟體有三種求解模式，包括：Full

Method、Reduced Method 求解模式，需先求得系統的質量矩陣、阻尼矩陣及勁度矩陣，而 Mode superposition 求解模式為直接求解系統之模態域響應，帶入所需模態參數，例如：自然頻率 (ω_r)、阻尼比 (ξ_r) 及模態振型 ($\{\phi_r\}$) 則可求得頻率響應函數。

3. 懸臂樑結構之實驗模態分析

本節針對懸臂樑結構進行實驗模態分析 (EMA)，圖 1 為懸臂樑之實驗模態分析儀器架設示意圖，包括頻譜分析儀 (SigLab)、衝擊錘、單軸向加速度規、筆記型電腦等，並在懸臂樑之 x 方向規劃 30 個實驗量測點，採固定加速規，移動衝擊錘敲擊懸臂樑之 y 方向進行實驗量測。頻譜分析儀設定頻寬範圍為 0-1kHz、解析頻率 0.313Hz 及平均次數 3 次，並由實驗量測獲得的頻率響應函數(FRF)匯入曲線嵌合軟體，以求得懸臂樑之實際模態參數，包含自然頻率 $\hat{\omega}_r = 2\pi \hat{f}_r$ 、模態振型 $\{\hat{\phi}_r\}$ 及阻尼比 $\hat{\xi}_r$ ，其中，變數符號有頂線，代表實驗取得之數值。

圖 2 為分別為懸臂樑之同點點頻率響應函數，其中同點 ($i=30, j=30$)，即為輸入點為第 30 點，輸出點為 30 點，所獲得頻率響應函數稱為同點頻率響應函數(point FRF)，且同點頻率響應函數特性在兩兩共振點會一反共振點，由圖中可觀察得知曲線嵌合軟體所得合成 (Synthesized) 曲線與實驗 (Experimental) 曲線相當吻合，可證明曲線嵌合所得模態參數的正確性。

表 1(a)及 1(b)為懸臂樑之實驗與理論模態參數表，其中包含實驗量測之自然頻率 \hat{f}_r 、阻尼比 $\hat{\xi}_r$ 及模態振型 $\{\hat{\phi}_r\}$ 與理論之自然頻率 f_r 及模態振型 $\{\phi_r\}$ ，實驗之模態參數由曲線嵌合軟體所得，理論之模態參數由有限元素分析(FEA)進行模態分析，所得自然頻率與模態振型，並進行實驗與理論之自然頻率及模態振型比對，來驗證實驗與理論之自然頻率及模態振型的正確性。

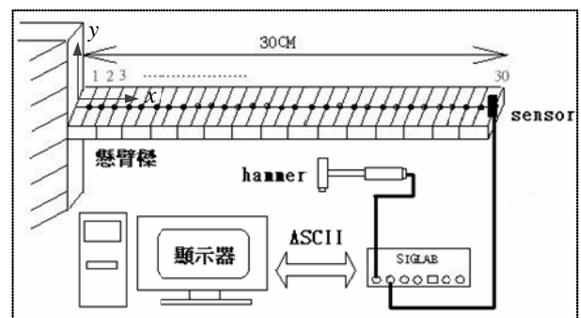


圖 1、懸臂樑之實驗模態分析儀器架設示意圖[2]

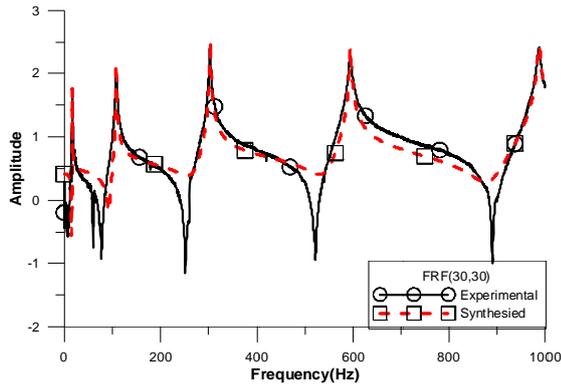


圖 2、懸臂樑之頻率響應函數 ($i=30, j=30$) [2]

表 1、懸臂樑之實驗與理論模態參數表[2]

(a)自然頻率及模態阻尼比

Mode	\hat{f}_r (Hz)	f_r (Hz)	誤差百 分比 (%)	$\hat{\xi}_r$ (%)	累積平均 阻尼比 $\bar{\xi}$ (%)	物理意 義
1	17.17	17.28	0.64	0.330	0.330	第 1 Bending mode
2	108.13	108.23	0.18	0.666	0.498	第 2 bending mode
3	303.28	303.50	0.16	0.839	0.612	第 3 Bending mode
4	594.22	596.43	0.40	1.038	0.718	第 4 Bending mode
5	987.57	989.40	0.14	1.278	0.830	第 5 Bending mode

4. 懸臂樑結構之有限元素分析

4-1 阻尼模型

本節針對 ANSYS 軟體模擬實際結構加入阻尼效應進行簡諧響應分析，首先就 ANSYS 軟體之阻尼矩陣模擬之通式表示如下：

$$\begin{aligned}
 [C] &= \alpha[M] + (\beta + \beta_c)[K] \\
 &+ \sum_{j=1}^{N_m} \left[\left(\beta_j + \frac{2}{\omega} \xi_j \right) [K_j] \right] \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_c} [C_k] + [C_\varepsilon] \\
 &\downarrow \quad \downarrow \\
 &G \quad C, D
 \end{aligned} \tag{23}$$

其中個參數彙整如表 2、表 3，表 2 為各個阻尼模型之阻尼矩陣內涵與 ANSYS 指令及求解方式對照表，表 3 為各阻尼模型於簡諧響應分析之優缺點比較表，綜合說明如下：

表 2 為阻尼模型之阻尼矩陣與 ANSYS 指令及求解方式對照表，表中可得模型 A 為無阻尼效應，免設定阻尼效應，三種求解方式都可求解，無法符合實際結構，模型 B 之 α 及 β 係數須以實驗模態阻尼比為基準，由曲線嵌合方式，得到最佳化之 α 、 β 係數。 α 、 β 係數的最佳化問題定義如下：

$$\text{設計變數: } X = (\alpha, \beta) \text{ 及 } X = (\beta) \tag{24}$$

$$\text{目標函數: } \Phi(X) = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\xi_r - \hat{\xi}_r}{\hat{\xi}_r} \right)^2 \tag{25}$$

$$\xi_r = \frac{\alpha}{2\bar{\omega}_r} + \frac{\beta\bar{\omega}_r}{2} \tag{26}$$

其中，找到一組設計變數 X 為 (α, β) 或 (β) ，使得目標函數為模態阻尼比的誤差平方和有最小值，其中， ξ_r 為預測之第 r 個模態阻尼比， $\hat{\xi}_r$ 為第 r 個實驗所得之模態阻尼比， α 、 β 為比例黏滯阻尼係數， $\bar{\omega}_r$ 為第 r 個實驗所得之模態自然頻率。模型 B 需要設定 ALPHAD、BETAD 數值，且三種求解方式都可進行求解。

模型 C 是以實驗模態分析之累積平均阻尼比值帶入，並設定 DMPRA，都可使用三種求解方式都可求解。

模型 D 是以各模態阻尼比設定到 DMPRA 之數值，只能使用 Mode Superposition 求解方式求解，缺點為當模態阻尼比數值很多時，就需一一輸入，非常麻煩。模型 E 為元素比例黏滯阻尼，設定 MP、DAMP 值，此值為模型 B 的 BETAD 數值，只能用 Full、Reduced Method 進行求解，求結時間較長，優點為可由材料性質設定之，可對不同材料、不同組件設定對應的元素及設定不同之元素阻尼。

模型 F 為元素常數阻尼比，設定 MP、DMPR，帶入之數值為模型 C 的累積平均阻尼比的數值，只能使用 Full Method 及 Mode Superposition 方式進行求解，優點為可由材料性質設定之，可對不同材料、不同組件設定對應的元素及設定不同之元素阻尼。

模型 G 為阻尼元素，就相當於加入一個彈簧元素，進行求解分析，只能使用 Full、Reduced Method 進行求解。本文將探討懸臂樑結構之頻率響應函數(FRF)的解析，主要以模型 A、B、C、D、E、F 作深入的探討，並沒有模型 G 之阻尼效應探討。

表 2、阻尼模型之阻尼矩陣與 ANSYS 指令及求解方式對照表

阻尼模型	阻尼矩陣	ANSYS 指令	求解方式		
			Full Method	Reduced Method	Mode Superposition
A. 無阻尼 (undamped)	$[C] = [0]$	免設定	可	可	可
B. 比例黏滯阻尼 (α, β) (proportional viscous damping)	$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ $\xi_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2}$	ALPHAD BETAD	可	可	可
C. 常數阻尼比 (ξ) (constant damping ratio)	$\xi_1 = \xi_2 \dots = \xi_n = \xi$ $\beta_c = \frac{2\xi}{\omega} [C] = \beta_c [K]$	DMPRA	可	可	可
D. 模態阻尼比 (ξ_r) (modal damping ratio)	$\xi_r, r = 1, 2, 3, \dots, n$	MDAMP	否	否	可
E. 元素比例黏滯阻尼 (β_j) (element proportional viscous damping)	$[C] = \sum_{j=1}^{N_e} \beta_j [K_j]$	MP, DAMP	可	可	否
F. 元素常數阻尼比 (ξ_j) (element constant damping ratio)	$[C] = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{2}{\omega} \xi_j [K_j]$	MP, DMPR	可	否	可
G. 阻尼元素 (damping element)	$[C] = \sum_{k=1}^{N_e} [C_k]$	ET,1,Combin14	可	可	否

4-2 有限元素分析

本節主要說明以有限元素分析軟體，對懸臂樑結構進行模態分析及簡諧響應分析之有限元素模型設定，圖 3 為懸臂樑之示意圖，而圖 4 為懸臂樑之有限元素模型，使用立方體元素(Solid 45)進行建構材料參數包含楊氏係數 180GPa，浦松比為 0.32215，密度為 7952.3kg/m³，有限元素模型採魚網式分割 (mapped mesh)，長 50 等分、寬 2 等分、高 1 等分，共分割 2000 個元素及 3333 個節點，設定固定邊界及無外力負荷之方式進行模態分析，求得理論模態參數，包括自然頻率、模態振型。接著以三種求解方式，設定頻寬為 0~1000Hz，解析度為 0.5Hz，並加入無阻尼模型(模型 A)、比例黏滯阻尼模型(模型 B1、模型 B2)、常數阻尼比模型(模型 C)、模態阻尼比(模型 D)、元素比例黏滯阻尼(模型 E)及元素常數阻尼比(模型 F)，最後再將 1218 號節點設定 z 方向之一單點力，也就是假設進行 EMA 時，衝擊錘施加於該點之衝擊力，進行簡諧響應分析求得理論頻率響應函數。

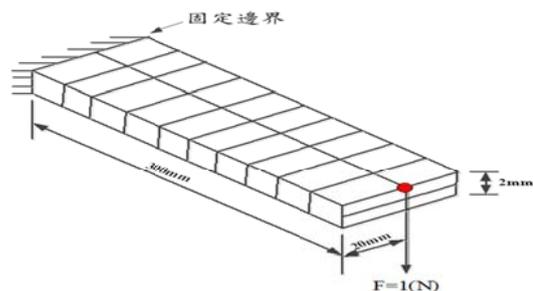


圖 3、懸臂樑之示意圖[2]

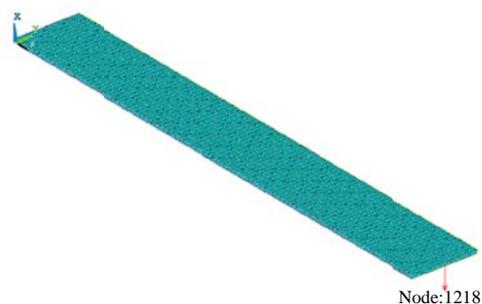


圖 4、懸臂樑之有限元素示意圖[2]

5. 結果與討論

本節主要以懸臂樑結構之有限元素模型，加入 7 種阻尼模型 A、B1、B2、C、D、E 及 F，進行理論簡諧響應分析，可得到理論之頻率響應函數，並與實際頻率響應函數進行比較，得到各阻尼模型之差異性。

5-1 不同阻尼模型之模態阻尼比

本節說明不同阻尼模型之各模態阻尼比之對應數值，其中模態阻尼比及常數阻尼比為實驗數據所得，另外，比例黏滯阻尼(模型 B1)、比例黏滯阻尼(模型 B2)、元素比例黏滯阻尼(模型 E)及元素常數阻尼比(模型 F)之阻尼模型，需由實驗數據之模態阻尼比及累積平均阻尼比所推得，彙整如表 4，表 4 為不同阻尼模型之模態阻尼比總表，而不同阻尼模型之各模態阻尼比討論說明如下：

表 4 為不同阻尼模型之模態阻尼比總表，表中得知模型 E 係數為模型 B 的數值，模型 F 係數為模型 C 的數值。

圖 5 及圖 6 為實驗阻尼比與比例黏滯阻尼模型(B1、B2)預測阻尼比之圖形比較，圖中可得有當 α 值時左邊曲線有上翹之趨勢，而 β 為線性曲線。

表 5 及表 6 為比例黏滯阻尼(B1、B2)之模態阻尼比預測結果，表中顯示當有 α 值比無 α 得到之最佳化結果較好，平方平均根值為 36.34%，相較於 B2 模型之結果好。

5-2 不同阻尼模型之懸臂樑頻率響應函數比較

此節主要以懸臂樑結構加入不同阻尼模型，以有限元素分析軟體，進行簡諧響應分析，來求得理論之頻率響應函數，並探討懸臂樑結構加入不同阻尼模型之頻率響應函數之差異，彙整如圖 7 及表 7，綜合討論如下：

圖 7 為各種不同阻尼模擬之懸臂樑同點頻率響應函數比較($i=30, j=30$)，圖 7(a)為無阻尼模型，峰值較尖銳，無法符合實際結構，圖 7(b)、(c)為比例黏滯阻尼模型，第四峰值前的阻尼效應符合實際結構之頻率響應函數，在第四峰值之後較無法符合實際結構

圖 7(d)取累積平均阻尼比，所以各個頻率下之峰值較為平均，第四峰值較為接近，視為最常用於加入理論簡諧響應分析之手法。

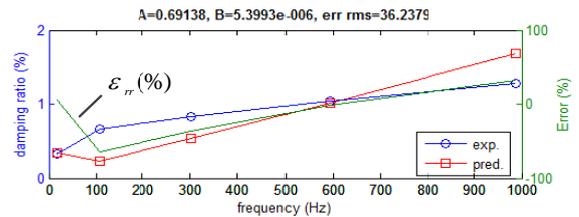
表 7 為不同阻尼模擬之懸臂樑頻率響應函數數值， f (Hz)為自然頻率，對應 7 種不同阻尼模型之同點頻率響應函數振幅值，表中得知，當在低頻率 17Hz、108Hz 及 303Hz，模型 D 阻尼效應模擬較接近實際結構之懸臂樑同點頻率響應函數數值，模型 B1、模型 B2 與模型 C 次之，模型 A 最差。在高頻率 594Hz、988Hz，模型 C 最接近實際結構之懸臂樑同點頻率響應函數數值，其餘都較差。

表 4、不同阻尼模型之模態阻尼比總表

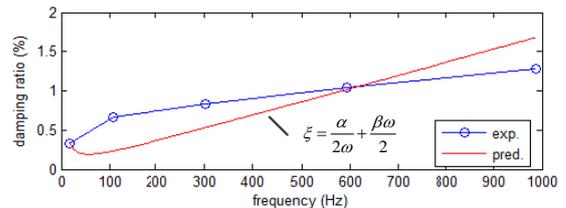
Mode	EXP	A	B1	B2	C	D	E	F
		無阻 尼	$\xi_r = \frac{\alpha}{2\bar{\omega}_r} + \frac{\beta\bar{\omega}_r}{2}$ (%)	$\xi_r = \frac{\beta\bar{\omega}_r}{2}$ (%)	ξ (%)	ξ_r (%)	$\xi_r = \frac{\beta\bar{\omega}_r}{2}$ (%)	ξ_j (%)
1	0.330	0	0.349	0.030	0.830	0.330	0.030	0.830
2	0.666	0	0.234	0.192	0.830	0.666	0.192	0.830
3	0.839	0	0.533	0.537	0.830	0.839	0.537	0.830
4	1.038	0	1.017	1.052	0.830	1.038	1.052	0.830
5	1.278	0	1.681	1.749	0.830	1.278	1.749	0.830

表 5、比例黏滯阻尼模型(B1)之模態阻尼比預測結果
($\alpha = 0.69138, \beta = 5.3993 \times 10^{-6}$)

Mode	\hat{f}_r (Hz)	$\hat{\xi}_r$ (%)	$\xi_r = \frac{\alpha}{2\bar{\omega}_r} + \frac{\beta\bar{\omega}_r}{2}$ (%)	誤差 (%)
1	17.17	0.330	0.349	5.77
2	108.13	0.666	0.234	-64.82
3	303.28	0.839	0.533	-36.52
4	594.22	1.038	1.017	-2.00
5	987.57	1.278	1.681	31.52
5 個模態阻尼比之誤差的平方平均根值				36.24



(a) 實驗與預測阻尼比及誤差示意圖

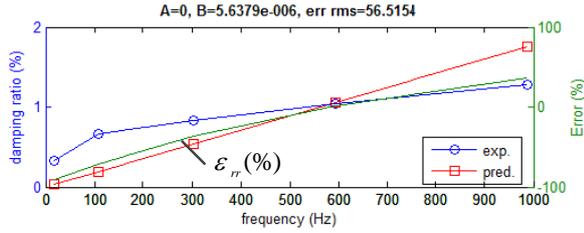


(b) 實驗與預測阻尼比示意圖

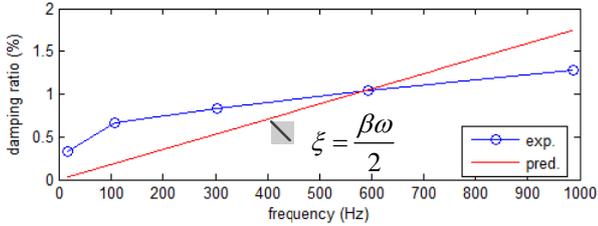
圖 5、實驗阻尼比與比例黏滯阻尼模型(B1)預測阻尼比之圖形比較

表 6、比例黏滯阻尼模型(B2)之模態阻尼比預測結果
($\alpha = 0, \beta = 5.6379 \times 10^{-6}$)

Mode	\hat{f}_r (Hz)	$\hat{\xi}_r$ (%)	$\xi_r = \frac{\beta\bar{\omega}_r}{2}$ (%)	誤差 (%)
1	17.17	0.330	0.030	-90.77
2	108.13	0.666	0.192	-71.24
3	303.28	0.839	0.537	-35.97
4	594.22	1.038	1.052	1.40
5	987.57	1.278	1.749	36.87
5 個模態阻尼比之誤差的平方平均根值				56.51

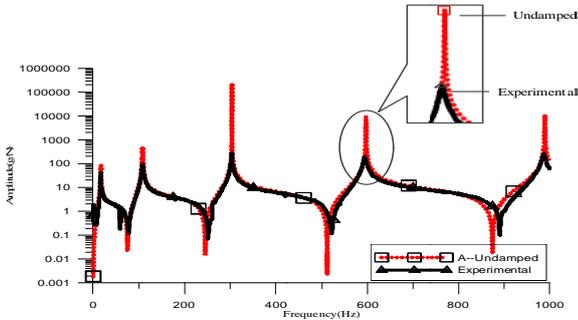


(a) 實驗與預測阻尼比及誤差示意圖

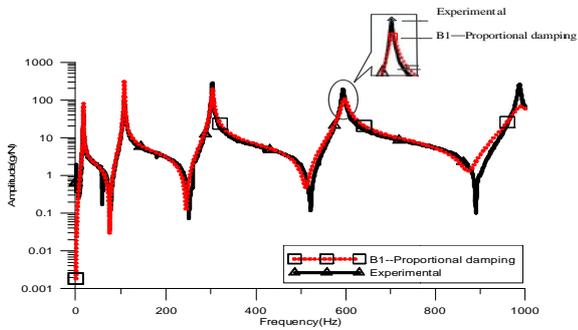


(b) 實驗與預測阻尼比示意圖

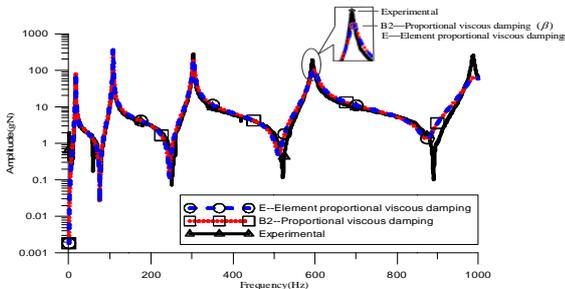
圖 6、實驗阻尼比與比例黏滯阻尼模型(B2)預測阻尼比之圖形比較



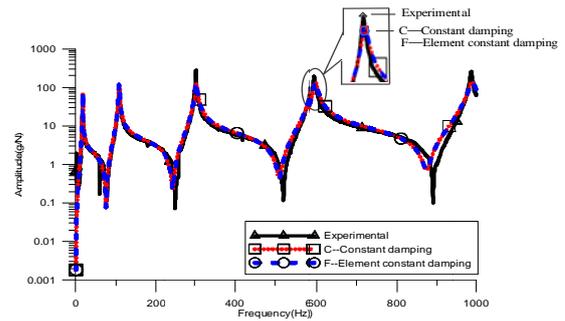
(a) 實驗(Experimental)與模型 A(無阻尼)



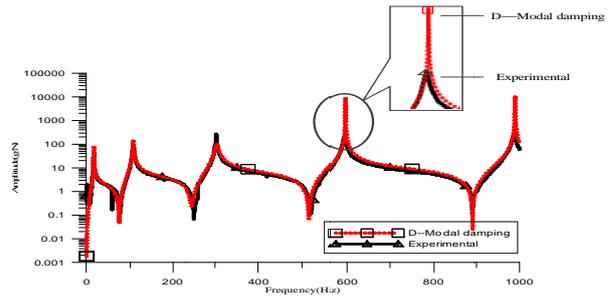
(b) 實驗(Experimental)與模型 B1(比例黏滯阻尼)



(c) 實驗(Experimental)、模型 B2(比例黏滯阻尼)與模型 E(元素比例黏滯阻尼)



(d) 實驗(Experimental)與模型 C(常數阻尼比)與模型 F(元素常數阻尼比)



(e) 實驗(Experimental)與模型 D(模態阻尼比)

圖 7 各種不同阻尼模擬之懸臂樑同點頻率響應函數比較($i=30, j=30$)

表 7、不同阻尼模擬之懸臂樑同點頻率響應函數數值 (g/N)

f (Hz)	17	108	303	594	988
EMA	43.50	90.02	281.10	185.55	242.03
A--Undamped	65.08	505.43	651.79	260.94	775.01
B1--Proportional damping(α, β)	63.64	338.42	192.19	97.07	65.42
B2--Proportional damping(β)	65.07	374.35	190.68	94.26	62.92
C--Constant damping	57.76	124.48	126.52	114.94	130.27
D--Modal damping	63.78	152.86	102.01	260.18	772.76
E--Element Proportional damping	65.07	374.35	190.68	94.26	62.92
F--Element Constant damping	57.76	124.48	126.52	114.94	130.27

6. 結論

本文主要回顧理論模態分析及簡諧響應分析，並說明 ANSYS 軟體之阻尼模型的阻尼矩陣，阻尼模型包含無阻尼模型(A)、比例黏滯阻尼模型(B1、B2)、常數阻尼模型(C)、模態阻尼模型(D)、元素比例黏滯阻尼模型(E)、元素常數阻尼模型(F)及阻尼元素(G)，進而說明各模型對應的阻尼矩陣、求解模式與各優缺點，接著以前 7 種阻尼模型對懸臂樑結構進行理論簡諧響應分析，可得 7 種理論頻率響應函數，再與實驗之頻率響應函數進行比較，可發現模型 A、B1、B2、C、D、E 及 F 各個阻尼效應之差異性，未來本篇論文可當作日後阻尼模擬的參考依據。

7. 參考文獻

- [1] Adhikari, S., "Damping Modeling and Identification Using Generalized Proportional Damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 293, Issue 1-2, pp. 156-170, 2006.
- [2] Wang, B. T., Li, J. X., and Shiu, J. J., "Theoretical Simulation of Damping Effect Base on Experimental Measurement," *The 15th National Conference on Sound and Vibration*, Taipei, pp. 35-40, 2007.
- [3] Adhikari, S., and Woodhouse, J., "Identification of Damping: Part 1, Viscous Damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 243, pp. 43-61, 2001.
- [4] Adhikari, S., "Optimal Complex Modes and an Index of Damping Non-Proportionality," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 18, pp. 1-27, 2004.
- [5] 蔡定江，陳瑞頡，曹家豪，「含內部阻尼樑之動態分析」，第十六屆中華民國振動與噪音工程學術研討會，台北，第461-465頁，2008。
- [6] Gounaris, G.D., and Anifantis, N.k., "Structural Damping Determination By Finite Element Approach," *Computers and Structures*, Vol. 73, pp. 445-452, 1999.
- [7] Qi, K., He, Z., Li, Z., Zi, Y., and Chen, X., "Vibration Based Operational Modal Analysis of Rotor Systems," *Measurement*, Vol. 41, pp. 810-816, 2008.

Simulation of Damping Effects for Harmonic Response Analysis

Bor-Tsuen Wang¹ Ting-Wei Wang²
¹Professor ²Graduate Student
Department of Mechanical Engineering
National Pingtung University of Science and Technology
Pingtung, 91201, Taiwan

Abstract

Vibration analysis contains four types of analyses, i.e. modal analysis, harmonic, transient and spectrum response analyses. Normal mode assumption neglecting damping is generally adopted for modal analysis and adequate for structural calibration to identify structural modal parameters. Other analyses should include structural damping effects for accurate and reliable simulations. This paper briefly presents the modal analysis and harmonic response analysis for both proportional and non-proportional viscous damping multiple degree-of-freedom (MDOF) systems, respectively. Different damping models are then introduced. In particular, the related commands in ANSYS are shown and compared for their usages. A practical cantilever beam structure is also considered to perform EMA so as to obtain the structural modal damping ratios. This work shows the procedures to determine the frequency response function (FRF) via harmonic response analysis by including damping effects for different damping models base on experimental damping data and compares the differences of FRFs. This work finally summarizes and proposes the procedures for FRF simulation including damping effects that is useful for practical applications.

Keywords: damping, harmonic response analysis, experimental modal analysis,

