

模型驗證工具程式發展與結構模型更新之應用

王栢村 謝宗廷 黃俞憲

國立屏東科技大學 機械工程系

wangbt@mail.npust.edu.tw [王栢村 教授]

摘要

本文應用數值運算軟體 MATLAB 撰寫模型驗證分析工具，介紹一般進行模型驗證之理念及方法，並說明模型驗證模組的使用方法。模型驗證模組包含模態保證指標計算模組、自然頻率誤差計算模組及頻率響應函數繪圖模組，此模組用於比對模態參數，如自然頻率、模態振型及頻率響應函數曲線，透過此模組可大量縮減實驗及理論模態參數比對之後處理時間。文中以實際結構講解模型驗證分析工具，應用於模型更新中之模態參數比對，確認更新後分析模型能更等效於實際結構，模型驗證分析工具模組更能用於比對實驗之重現性及重複性。

關鍵詞：模型驗證、模態參數、模態保證指標

1. 前言

近年來工業發展迅速，市場需求瞬息萬變，為滿足消費者的需求以及同業的競爭，如何縮短產品開發週期；減少製造成本，提升產品競爭力，是現今產業界努力的目標。電腦輔助設計(computer aided design, CAD)利用電腦快速建構虛擬模型，可有效提升設計效率，但卻無法了解結構系統內涵，而電腦輔助工程分析(computer aided engineering, CAE)則是適用於探討系統內涵的一項工具，其中以有限元素法(finite element method, FEM)廣為業界所使用。利用有限元素法中有限元素模型的建立，進行虛擬測試(virtual testing, VT)了解結構系統內涵，使得設計者在設計時能得知，結構的受力情況及強度，即時進行模型更新或設計變更，讓設計端不只是設計，更能驗證結構強度。

Allemang[1]講解模態保證指標(modal assurance criterion, MAC)過去 20 年的發展及應用，模態保證指標在 1970 年代被開發出，利用模態量直交(modal vector orthogonality)比對實驗與有限元素分析之模態向量，若兩個模態向量成比例，其值為 1，若為直交則值為 0。Caponero *et al.*[2]利用模態保證指標確認鋁平板之理論與實驗模態振型的對應。

王與曹[3]以自由平板結構為目標結構，以實驗模態分析驗證有限元素分析模型，應用模態保證指標及頻率響應函數(frequency response function, FRF)的比對，確認理論模型的系統響應與實際結構是否對應，結果顯示文中平板結構之有限元素模型系統響應等同於實際結構。王等人[4]與王等人[5]亦應用模態保證指標，作為實驗與理論振型是否對應的判斷依據。

本文應用數值運算軟體 MATLAB 撰寫模型驗證分析模組，該模組包含進行模型驗證時常進行的模態保證指標(MAC)運算模組、自然頻率誤差運算模組及頻率響

應函數繪圖模組。透過模態保證指標的運算可快速比對模態振型間的直交性；自然頻率誤差模組可將 MAC 值較高之模態挑出，並計算其理論分析及實驗所得自然頻率誤差，以方便確認是否為相同模態；FRF 繪圖模組可快速繪製 FRF 曲線圖。文中先介紹模型驗證分析模組的操作方法及流程，再以工具機背板結構為例，進行模型驗證示範操作模型驗證分析模組，說明模型驗證的流程以及模型更新的理念。

2. 模型驗證流程

電腦輔助工程分析，是利用虛擬分析模型以虛擬測試取代實際測試，為避免因錯誤的參數設定而導致結果無參考價值的情況產生，虛擬分析模型的驗證與認證便是必須的，圖 1 是以振動的手法對有限元素模型進行驗證的流程圖，分成理論及實驗兩部分，理論部分從虛擬分析模型的建構開始，參考實際結構假設其數學模型，再依數學模型的假設進行有限元素模型的建構，利用有限元素法中的模態分析，求取虛擬模型的模態參數包括，自然頻率及模態振型，並確保理論解已達收斂。實驗則以實驗模態分析進行，量取結構之頻率響應函數，利用曲線嵌合(curve fitting)軟體求得實際結構之模態參數，最後比對理論及實驗模態參數，並以實驗為參考依據，調整虛擬分析模型參數，使得虛擬分析模型之輸出響應能同等於實際結構。

驗證成功之虛擬分析模型即可應用於響應預測(response prediction, RP)，以響應預測結果判斷結構是否合乎要求，有無模型更新或設計變更之需求，響應預測結果的標準是自行定義的，依照產品的不同而有不同的標準，圖 2 為結構模型更新流程圖，完成模型驗證後以響應預測作為判斷依據，若不符合要求則進行模型更新，更新完再次進行響應預測，直到結構能符合要求。

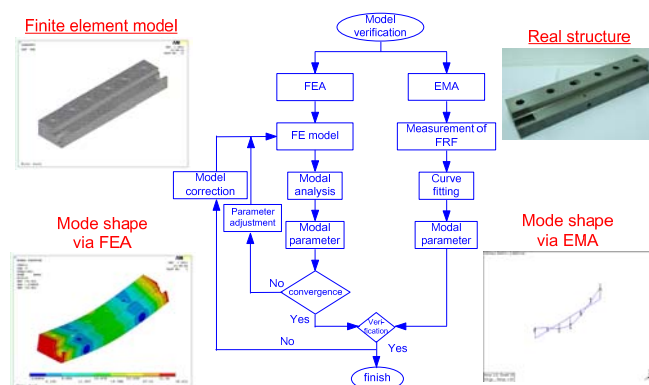


圖 1 模型驗證流程圖

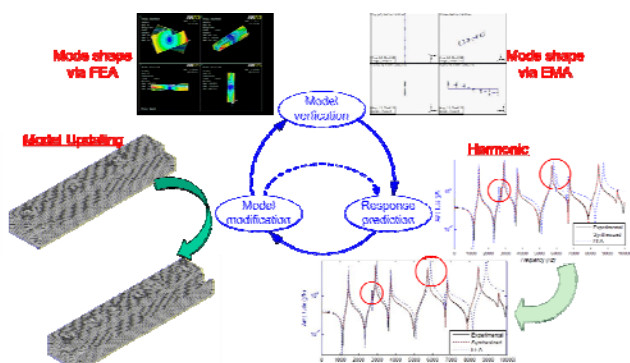


圖 2 模型更新流程圖

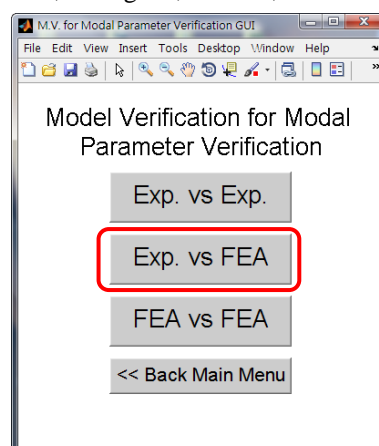


圖 3 模態保證指標計算模組主視窗

3. 模型驗證分析模組介紹

以振動方法進行模型驗證，是利用模態參數的比對，以確認虛擬分析模型與實際結構的等效性。因此模態參數的比對正確性相當重要，現階段模態參數的比對大多是以人工比對的方式，進行模態物理意義的解讀，相當耗費時間。本節將介紹基於數值比對模態振型的方式，所撰寫之模態驗證分析模組，該模組分成兩大部分，模態保證指標(MAC)計算模組與頻率響應函數繪圖模組，以下將說明其操作方法及步驟。

3.1 模態保證指標計算模組

模態保證指標是用於判斷理論與實驗所得之模態振型是否成直交性的工具，透過模態振型的向量化，了解理論與實驗模態之間的關係，其模態保證指標運算方程式如下：

$$MAC_{rs} = MAC(\{\hat{\phi}_r, \{\phi_s\}) = \frac{|\{\hat{\phi}_r\}^T \{\phi_s\}|^2}{(\{\hat{\phi}_r\}^T \{\phi_s^*\})(\{\hat{\phi}_s\}^T \{\phi_s^*})} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

$$s = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其中， $\{\hat{\phi}_r\}$ 為實驗振型， $\{\phi_s\}$ 為理論振型。當 MAC 值為 1 時代表兩向量成比例；而 MAC 值為 0 時，代表兩向量成直交。透過 MAC 的計算可快速得知振型之間的關連，提供數值解析的方法進行模態振型的比對。

圖 3 為模態保證指標計算模組主視窗，此模組除了理論對實驗的計算，也可進行實驗對實驗、理論對理論 MAC 的計算，在此以實驗對理論 MAC 計算為範例進行操作流程說明。圖 4 為實驗對理論 MAC 計算模組，此程式模組需輸入理論與實驗振型之振幅，依圖 4 中 Setp1 輸出實驗振型振幅；Step2 理論振型振幅，輸入後會顯示，輸入資料中包含幾個模態(No. of modes)以及幾個比對點數(No. of grid point)，確認輸入資料正確後，按取 Setp3 Execute Calculation 進行 MAC 計算，經過計算後輸出 MAC 矩陣，其矩陣如圖 5。圖 5 中橫座標為理論模態之模態數；縱坐標為實驗之模態數，中間部分則為理論與實驗之 MAC。圖 6 為自然頻率誤差計算模組，該模組可自動挑選出大於有興趣 MAC 值之理論與實際模態，並計算自然頻率誤差，以便觀查 MAC 值

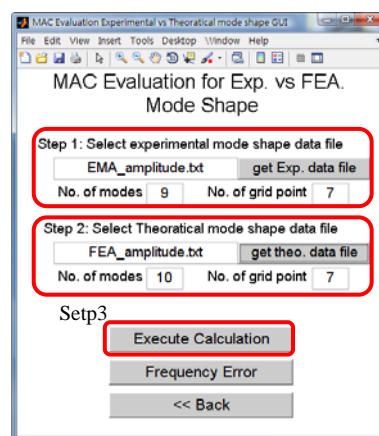


圖 4 實驗對理論 MAC 計算模組

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0.983533	0.842785	0.005593	0.02675	0.968606	0.98806	0.024198	0.001451	0.03222	0.345667
2	0.659909	0.838077	0.20751	0.022874	0.70263	0.633642	0.005195	0.007111	0.00188	0.177566
3	0.011556	0.045727	0.995784	0.021185	0.001107	0.025936	0.004636	0.003788	0.134945	0.177573
4	0.018664	0.005412	0.003349	0.944682	0.003917	0.045023	0.015376	0.027057	0.844053	0.508382
5	0.962957	0.864322	0.000487	0.016767	0.967895	0.955905	0.006269	0.004648	0.014332	0.285242
6	0.001172	0.015335	0.062996	0.012933	0.009461	0.001502	0.822571	0.851985	0.072959	0.016581
7	0.011552	0.008296	0.002762	0.001036	0.015318	0.014247	0.859342	0.945999	0.011714	0.009726
8	0.00305	0.015711	0.037364	0.923034	0.012502	0.010256	0.040825	0.060105	0.924933	0.483657
9	0.192329	0.089323	0.112278	0.490637	0.129371	0.243469	0.017692	0.024676	0.507875	0.763443

圖 5 模態保證指標計算結果

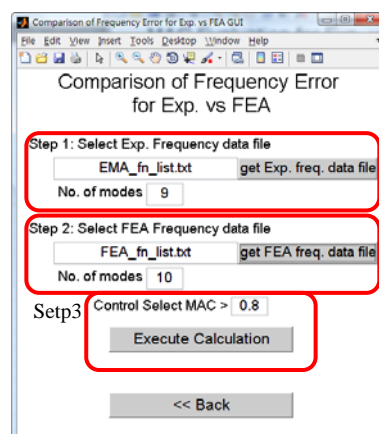


圖 6 自然頻率誤差計算模組

	A	B	C	D	E	F
mode	fn (Hz)	mode	fn (Hz)	err (%)	MAC	
1	1	1464	1	1462.6	-0.09563	0.983533
2	5	5734.5	1	1462.6	-74.4947	0.962957
3	1	1464	2	2730	86.47541	0.842785
4	2	2751.8	2	2730	-0.79221	0.858077
5	5	5734.5	2	2730	-52.3934	0.864322
6	3	2906.1	3	2986.1	2.75283	0.995784
7	4	3745.3	4	3745.3	0	0.944682
8	8	8471.6	4	3745.3	-55.7899	0.923034
9	1	1464	5	5893	302.5273	0.968606
10	2	2751.8	5	5893	114.1507	0.70263
11	5	5734.5	5	5893	2.763972	0.967895
12	1	1464	6	6127.6	318.5519	0.98806
13	5	5734.5	6	6127.6	6.855	0.955905
14	6	6700.2	7	6652.2	-0.7164	0.822571
15	7	6789.4	7	6652.2	-2.0208	0.859342
16	6	6700.2	8	6784.3	1.255186	0.851985
17	7	6789.4	8	6784.3	-0.07512	0.945999
18	4	3745.3	9	8892.2	137.4229	0.844053
19	8	8471.6	9	8892.2	4.964824	0.924933
20	9	9571.7	10	9700.5	1.345633	0.763443
21						

圖 7 自然頻率誤差計算結果

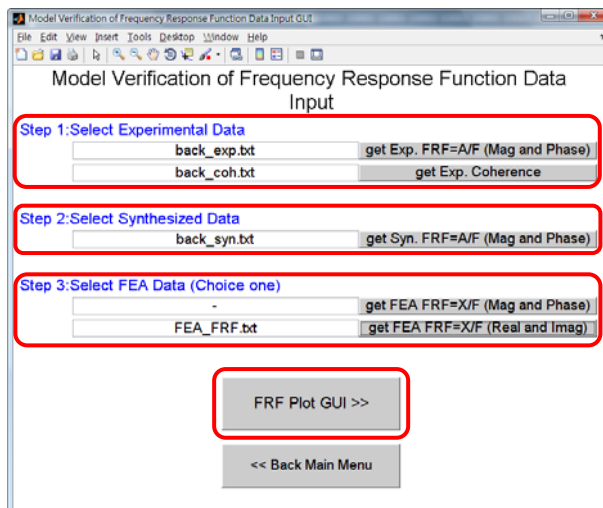


圖 8 頻率響應函數繪圖模組輸入區

高時理論與實驗模態之自然頻率是否對應。運用模組前需輸入理論及實驗之自然頻率值，輸入之後將會各別顯示所讀到理論及實驗模態自然頻率數(No. of modes)，接著輸入欲挑選大於之 MAC 值，再按 Execute Calculation 進行運算挑選。圖 7 運行自然頻率誤差所得之輸出格式，它將分別挑出大於有興趣 MAC 值之實驗、理論自然頻率以及計算其自然頻率誤差，透過此程式可快速找到 MAC 值較高之模態，以便進行比對。

3.2 頻率響應函數繪圖模組

進行模型驗證時，除了模態振型以及自然頻率的比對外，還進行頻率響應函數的比對，此模組即是輸入理論、實驗及合成頻率響應函數資料，且可快速繪出曲線圖以便比對的模組，圖 8 為頻率響應函數繪圖模組輸入資料視窗，依照 Step1、Step2 及 Step3 輸入實驗 FRF 曲線資料及關聯性函數曲線資料、合成 FRF 曲線資料及理論 FRF 曲線資料，接著選取 Step4 FRF Plot GUI 進入 FRF 繪圖模組介面。

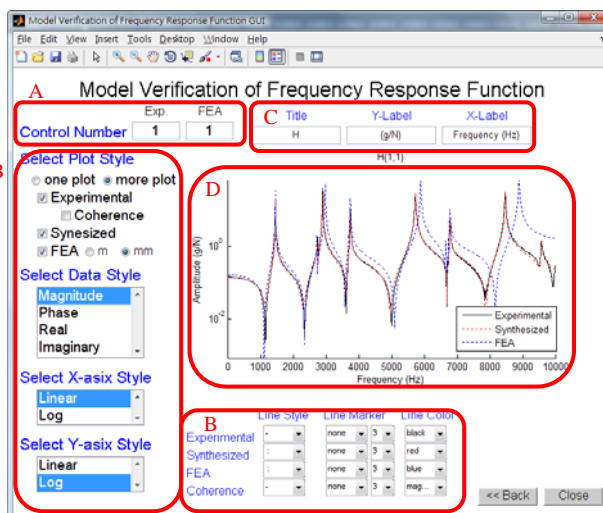


圖 9 頻率響應函數繪圖模組介面

圖 9 為頻率響應函數繪圖模組介面，A 區為顯示點數選擇區，可選擇要顯示理論及實驗 FRF 的號數。B 區為顯示狀態控制區，可控顯示區欲顯示的曲線，可選擇獨立繪製及多曲線繪製，選擇欲顯示 Y 座標的類型，如：振幅(Magnitude)、相位角(Phase)、實數部(Real)及虛數部(Imaginary)，X 及 Y 座標單位，曲線的顏色及形式，C 區為圖名、X 及 Y 座標的標籤的輸入，而 D 區則為曲線的顯示區。



圖 10 實體結構圖

本章節介紹了模型驗證模組的作用，以及操作流程，下節將用應此分析模組針對結構進行模型驗證。

4. 應用工具程式模型驗證

本節將進行工具機零組件背板的模型驗證，並應用模型驗證分析模組，以快速比對模態參數，透過理論與實驗模態參數的比對，了解理論與實際結構之系統響應間是否相對應。

4.1 有限元素分析

圖 10 為背板實際結構圖，圖 11 為背板之原始有限元素模型，背板之有限元素模型使用立方體元素 Solid185



圖 11 原始模型之有限元素模型圖

表 1 有限元素分析與實驗模態分析之自然頻率誤差及實驗阻尼比

模態	FEA(Hz) 原始	FEA (Hz) 更新	模態	EMA(Hz)	誤差(%)	誤差(%) 修正後	阻尼比(%)	累計平均 阻尼比(%)
F-1	1464.0	1462.6	E-1	1464.0	0.00	-0.09	0.129	0.129
F-2	2678.0	2730.0	E-2	2751.8	-2.68	-0.79	0.149	0.139
F-3	3011.1	2986.1	E-3	2906.1	3.61	2.75	0.118	0.128
F-4	3762.6	3745.3	E-4	3745.3	0.46	0.00	0.107	0.117
F-5	5937.3	5893.0	E-5	5734.5	3.54	2.76	0.177	0.147
F-6	6115.5	6127.6	--	--	--	--	--	--
F-7	6716.8	6652.2	E-6	6700.2	0.25	-0.72	0.083	0.115
F-8	6826.7	6784.3	E-7	6789.4	0.55	-0.08	0.099	0.106
F-9	8930.2	8892.2	E-8	8471.6	5.41	4.96	0.108	0.107
F-10	9769.9	9700.5	E-9	9571.7	2.07	1.35	0.160	0.133

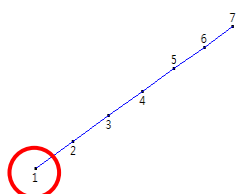


圖 12 實驗點數規劃圖

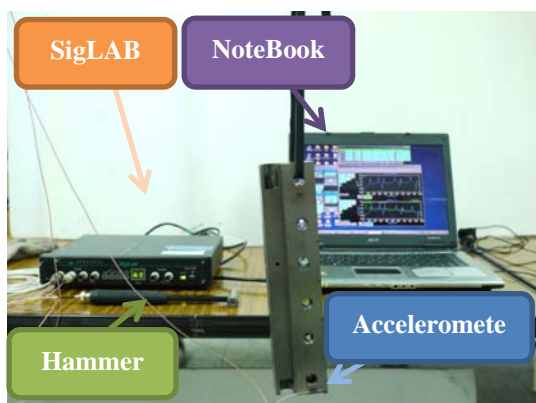


圖 13 實驗架構圖

建立，每個元素擁有 8 個節點，每個節點擁有 3 個自由度 UX、UY 及 UZ。材料參數設定，楊氏系數 $E_{back} = 114.38 \times 10^9 \text{ Pa}$ 、浦松比 $\nu_{back} = 0.28$ 及密度 $\rho_{back} = 7157.52 \text{ kg/m}^3$ 。因欲進行模態分析，而結構全無對稱，因此採用全模型進行分析。元素分割採用固定元素大小自由分割，共 69356 個元素，14031 個節點。

4.2 實驗模態分析

圖 12 為實驗點數規劃圖，因結構幾何大致左右對稱且呈長條狀，因此使用單邊進行實驗應能獲得大部分有興趣的模態振型，故採用單邊分成 7 點進行實驗。圖 13 為實驗架構圖，使用衝擊槌為驅動器，加速度計為感測器，以固定加速度計移動衝擊槌的方式進行實驗，依實驗點數規劃將會獲得 7 比頻率響應函數。

4.3 模型驗證

表 1 為背板之有限元素分析與實驗模態分析自然頻率總表，由表可得知自然頻率誤差除了理論第 9 模態對

表 2 原始理論對實驗之模態保證指標表

	F-1	F-2	F-3	F-4	F-5	F-6	F-7	F-8	F-9	F-10
E-1	0.98	0.84	0.01	0.03	0.97	0.99	0.02	0.00	0.03	0.35
E-2	0.66	0.86	0.21	0.02	0.70	0.63	0.01	0.01	0.00	0.18
E-3	0.01	0.05	1.00	0.02	0.00	0.03	0.00	0.00	0.13	0.18
E-4	0.02	0.01	0.00	0.94	0.00	0.05	0.02	0.03	0.84	0.51
E-5	0.96	0.86	0.00	0.02	0.97	0.96	0.01	0.00	0.01	0.29
E-6	0.00	0.02	0.06	0.01	0.01	0.00	0.82	0.85	0.07	0.02
E-7	0.01	0.01	0.00	0.00	0.02	0.01	0.86	0.95	0.01	0.01
E-8	0.00	0.02	0.04	0.92	0.01	0.01	0.04	0.06	0.92	0.48
E-9	0.19	0.09	0.11	0.49	0.13	0.24	0.02	0.02	0.51	0.76

實驗第 8 模態超過 5%，其餘誤差皆在 5% 以內，最大阻尼比在第 2 模態為 0.129%，累計平均阻尼比為 0.133%。

附錄表 A 為背板之有限元素分析與實驗模態分析模態振型總表，其振型之物理意義第 1 模態為 (Z,Y)=(3,1) 模態、第 2 模態為 (Z,X)=(3,1) 模態、第 3 模態為 (Z,X)=(2,2) 模態、第 4 模態為 (Z,Y)=(4,1) 模態、第 5 模態為 (Z,X)=(3,2) 模態、第 6 模態為 (Z,X)=(4,1) 模態、第 7 模態為 Y 方向拉申帶 (Z,Y)=(5,1) 模態、第 8 模態為 (Z,Y)=(5,1) 模態、第 9 模態為 (Z,X)=(4,2) 模態、第 10 模態為 (Z,Y)=(6,1) 模態，由表可看出原始模型的理論模態振型與實驗相當一致，由表 2 為背板原始模型之 MAC 總表中 MAC 值，發現模態保證指標大多都在 0.75 以上，更確定原始模型之模態振型與實驗模態振型對應一致。理論第 6 模態之所以無法正實驗模態相對應，可由附錄表 A 得知該模態為 X 方向模態，由於實驗僅以 Y 方向進行，因此無法獲得 X 方向之模態屬正常現象。圖 14 為原始頻率響應函數圖，其中圖 14(a) 為同點 FRF、圖 14(b) 為轉移 FRF，FRF 重疊圖中黑色實線為實驗曲線、紅色虛線為合成曲線而藍色虛線為理論曲線，由圖中可看出，黑色實驗與紅色虛線的重合性相當高，代表曲線嵌合的正確性相當高，而理論曲線在第 2 峰值有略微的偏移，在 6000Hz 左右也出現與實驗不同的明顯峰值，因此判斷該模型有進行更新的必要。

圖 15 為背板之關聯性函數圖 15(a) 為同點之關聯性函數圖，圖 15(b) 為轉移之關聯性函數圖，由圖可發現除了對應頻率響應函數之反共振點使得關聯性函數不接近 1 外，其餘部分大致上等於 1，代表著實驗的品質是可靠的。

4.4 模型更新

圖 16 為修正後背板之有限元素模型，取代原始的簡化模型進行模態分析。由表 1 可得知，更新後模型之最大自然頻率誤差僅 4.96%，其餘皆在 3% 以內，相較於原始模型自然頻率誤差，更新模型皆有縮小之趨勢。

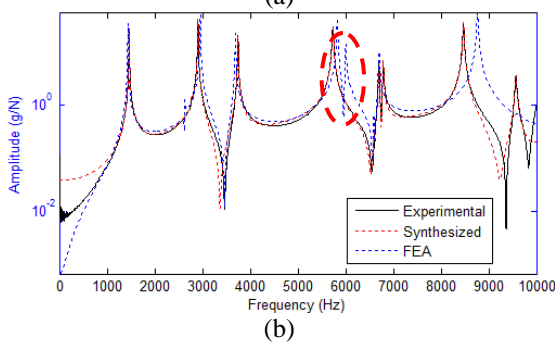
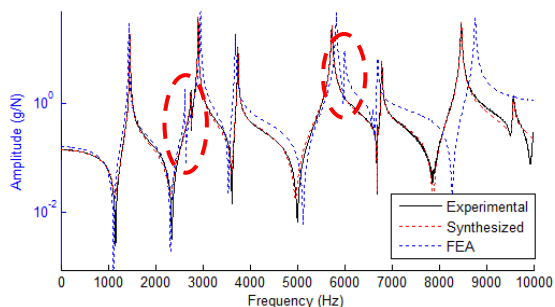


圖 14 原始頻率響應函數圖(a)同點(b)轉移

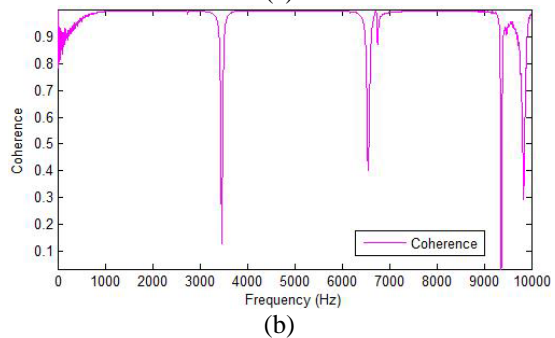
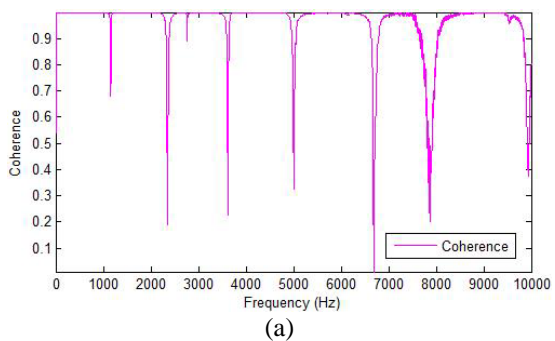


圖 15 關聯性函數圖(a)同點(b)轉移



圖 16 更新後模型之有限元素模型圖

表 3 更新理論對實驗之模態保證指標表

	F-1	F-2	F-3	F-4	F-5	F-6	F-7	F-8	F-9	F-10
E-1	0.98	0.84	0.01	0.03	0.97	0.99	0.02	0.00	0.03	0.35
E-2	0.66	0.86	0.21	0.02	0.70	0.63	0.01	0.01	0.00	0.18
E-3	0.01	0.05	1.00	0.02	0.00	0.03	0.00	0.00	0.13	0.18
E-4	0.02	0.01	0.00	0.94	0.00	0.05	0.02	0.03	0.84	0.51
E-5	0.96	0.86	0.00	0.02	0.97	0.96	0.01	0.00	0.01	0.29
E-6	0.00	0.02	0.06	0.01	0.01	0.00	0.82	0.85	0.07	0.02
E-7	0.01	0.01	0.00	0.00	0.02	0.01	0.86	0.95	0.01	0.01
E-8	0.00	0.02	0.04	0.92	0.01	0.01	0.04	0.06	0.92	0.48
E-9	0.19	0.09	0.11	0.49	0.13	0.24	0.02	0.02	0.51	0.76

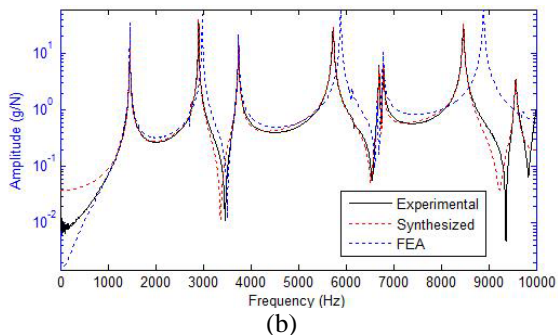
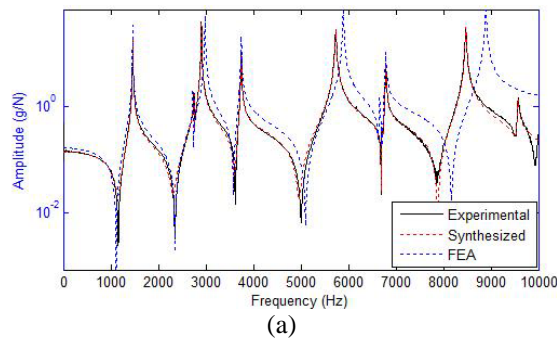


圖 17 更新後模型之頻率響應函數圖(a)同點(b)轉移

由附錄表 A 可看出模態振型與原始模型一致，代表模態振型之物理意義並無因模型的簡化而有影響，表 3 更新理論對實驗之模態保證指標表，其相對應之模態之 MAC 值皆在 0.75 以上，因此更新後模型之理論與實驗模態振型對應良好。

圖 17 為更新後模型之頻率響應函數圖，圖 17(a)為同點 FRF、圖 17(b)為轉移 FRF，由圖中可發現原始理論曲線在第 2 峰值與 6000Hz 左右，與實驗曲線不對應之現象改已善，且在 7000Hz 以前與實驗曲線幾乎重疊，代表此分析模型在 7000Hz 以前之響應，能代表實際結構之響應。

透過模態參數的比對，確認更新後的背板有限元素虛擬分析模型與實際結構的等效性，完成背板結構之模型驗證。

5. 結論

本文應用數值運算軟體撰寫模型驗證分析模組，並以實際結構進行模型驗證以及模型更新，綜合結論如下：

- 文中所應用自行開發的模型驗證分析模組包含：MAC 計算模組、自然頻率誤差計算模組及 FRF 繪圖模組，整個模組應用於結構模型驗證時，模

態參數的比對：MAC 的計算、自然頻率誤差的計算以及 FRF 曲線的繪制，提供快速方便的模型驗證後處理工具程式。

2. 以實際結構為範例，說明模型驗證的流程以及方法，並應用自行開發之模型驗證分析模組，除了完成虛擬模型的模型驗證，也進行分析模組的應用教學，日後欲使用分析模組時可參考此作法及流程使用。
3. 文中以簡諧分析為響應預測目標，探討虛擬模型的等效性，透過簡諧分析所得之 FRF 與實驗進行比較，判斷虛擬模型的等效性不足，因此進行模型更新。說明了模型更新的理念以及流程，最後獲得等效性佳的虛擬分析模型，完成模型驗證。

6. 參考文獻

- [1] R.J. Allemang, "The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse," *the 20th International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, CA, February 2002.
- [2] M.A. Caponero, A. Paolozzi, and I. Peroni, "Use of Speckle Interferometry and Modal Assurance Criterion for Identification of Component Modes," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 37, pp 355-367, 2002.
- [3] 王栢村，曹文昌，「應用有限元素與實驗模態分析之結構模型驗證」，*中華民國振動與噪音工程學會第十屆學術研討會*，台北市，第131-138頁，2002。
- [4] 王栢村，林鴻裕，陳仲正，「端銑刀之實驗模態分析與模型驗證」，*TAIWAN ANSYS CONFERENCE*，南投，第94-100頁，2004。
- [5] 王栢村，謝宗廷，曾國睿，「自行車前叉之模型驗證與彎曲試驗模擬分析」，*機械技師學刊*，第14卷，第1期，2001。

Development of Model Verification Tool and Its Application to Structural Model Updating

Bor-Tsuen Wang¹, Tsung-Ting Hsieh²,
Yu-Xian Huang²

National Pingtung University of Science & Technology
Department of Mechanical Engineering

ABSTRACT

This work aims to develop the analysis tool for performing model verification by using numerical programming software MATLAB. The concept and general approach for model verification is first introduced. The usage and procedure for using the Model Verification Tool (MVT) program is then presented. The MVT program includes modal assurance criterion (MAC) calculation, natural frequency error calculation and frequency response function (FRF) plot modules. The MVT is designed to compare modal parameters, including natural frequencies and mode shapes as well as FRFs, obtained from both theoretical analysis and experiments, respectively. The post processing effort on manipulating data for comparison can be greatly reduced by using the MVT. A practical application to structural model updating is demonstrated. Upon the comparison of modal parameters between theoretical and experimental results, the analytical model can be updated and revealed better equivalence to the real structure. The MVT shows the advantage in performing model verification and increases the efficiency in post processing. The MVT can also be applied for the comparison among experiments for repeatability or reproducibility as well as for the comparison between theoretical models before and after model updating.

Keywords: model verification, modal parameter, modal assurance criterion (MAC).



附錄：

表 A 背板之有限元素分析與實驗模態分析之模態振型比較對照表

模態	原始 FEA 振型	模態	更新 FEA 振型	模態	EMA 振型
F-1		F-1 (Z,Y) (3,1)		E-1	
F-2		F-2 (Z,X) (3,1)		E-2	
F-3		F-3 (Z,X) (2,2)		E-3	
F-4		F-4 (Z,Y) (4,1)		E-4	
F-5		F-5 (Z,X) (3,2)		E-5	
F-6		F-6 (Z,X) (4,1)		--	--
F-7		F-7 (Z,Y) (5,1) 拉申		E-6	
F-8		F-8 (Z,Y) (5,1)		E-7	
F-9		F-9 (Z,X) (4,2)		E-8	
F-10		F-10 (Z,Y) (6,1)		E-9	

