單自由度與多自由度系統模型於刀具顫震穩定圖之分析

王栢村 [1]、梁秀瑋 [2]、周嘉莉 [3]
[1] 屏東科技大學機械工程系教授
[2] 屏東科技大學機械工程系研究生
[3] 精密機械研究發展中心 系統工程部
Wangbt@mail.npust.edu.tw〔聯絡人：王栢村〕

摘要

切削顫震(Chatter)為自激激振(Self-excited Vibration)現象，連帶影響刀具壽命與生產率等，透過刀具顫震穩定圖(Stability Lobe Diagram, SLD)選擇加工參數，以期降低切削顫震發生。本文主要對單自由度(Single Degree of Freedom, SDOF)與多自由度(Multiple Degree of Freedom, MDOF)振動系統於銑削之刀具顫震穩定圖理論分析作探討，首先以單自由度振動系統之理論分析作為切削顫震分析之基礎，假設刀具為單自由度振動系統，並發展銑削顫震理論分析，由依據顫震分析系統歸納求取 SLD 之分析步驟，最後為多自由度系統之銑削顫震預測分析步驟。期望透過單自由度與多自由度系統之理論分析與刀具穩定顫震圖之關聯及其應用，並作為加工參數選用之參考。

關鍵詞：切削顫震、刀具顫震穩定圖、單自由度系統、多自由度系統。

1. 前言

銑削，特別是高速銑削，通常被現今的製造產業廣泛應用於獲得最終形狀的機械零件。舉例來說，金屬切割時所需用的模具或壓鑄模，甚至在汽車業、航空工業，皆需要能對材料有較高的材料移除率(Metal Removal Rate, MRR)與高生產率，並仍有精確性的加工程序。切削顫震是一種自激激振的現象，通常發生於機械加工時，在眾多引發切削振動之成因中以顫震對加工品質影響最劇，並限制了生產率。切削顫震會有許多不良的影響，像不良的加工表面、嚴重的精度誤差及吵雜的噪音，並增加刀具的磨耗、加工機具的損壞及降低材料移除率，導致加工時間、材料及能源等成本相對增加。

顫震穩定圖形現已有許多獲取及應用之方法，Yue [1]藉由頻率響應函數運算得到結構對應之 SLD。王[2]探討銑削時之切削顫震現象與其理論分析，發展刀具顫震穩定圖之預測分析模組，並以實驗量測之刀具頻率響應函數進行刀具顫震穩定圖形預測。Quintana *et al*. [3,4]進行簡易的實驗，以不同主軸轉速及工件銑削深度，獲得銑削時相關聯之 SLD。Smith *et al*. [5]提出 Power Lobe Diagram(PLD)方法，由主軸功率曲線及轉速所組合，便可得知功率與加工之穩定關聯性。在得到顫震穩定圖形後，可從中選取適當之切削參數以避免切削顫震發生。

除了上述運用 SLD 方式選擇適當之加工參數外，楊與廖[6]使用電腦監測切削時切削力的訊號，當顫震現象發生則控制器自動調整主軸轉速，使加工達到穩定。蔡等人[7]利用微型麥克風擷取切削時的聲音訊號，對抖顫特性之切削狀態進行監測，作為切削主軸轉速的依據。經由感測器信號量測方式，可達到監測及降低切削顫震現象發生。

本文目的在對單自由度與多自由度振動系統及其刀具顫震穩定圖理論分析進行說明，藉由預測分析之 SLD，提供加工參數選用之依據，以期降低機械加工時顫震現象發生。未來可延伸應用於實際量測之刀具頻率響應函數，得到實際量測之 SLD。

2. 單自由度振動系統分析回顧

銑削加工為一複雜之非線性動態過程，結合了銑削過程及工具機結構的動態特性。在銑削過程方面，牽涉到切削速度、進給、切深、工件材料等因素；在工具機結構方面，牽涉到結構剛性、阻尼、自然頻率等因素。由於要考慮的外在因素太多，且大多屬於非線性，將此問題作合理簡化，考慮單自由度(single degree-of-freedom, SDOF)系統運動方程式如下：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{1}$$

若 $f(t)$ 為簡諧外力，可表示如下：

$$f(t) = Fe^{i\omega t} \tag{2}$$

其中，F 為外力激振，ω 為外力激振頻率，則系統之穩態位移，亦為簡諧，可表示如下：

$$x(t) = Xe^{i\omega t} \tag{3}$$

將式(2)及(3)代入式(1)，化簡可得：

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{X}{F} \\ &= \frac{1}{(k - m\omega^2) + i(\omega c)} \text{ (物理參數形式)} \\ &= \frac{1}{k}\frac{\omega_n{}^2}{(\omega_n{}^2 - \omega^2) + i(2\zeta\omega_n\omega)} \text{ (模態參數形式)} \\ &= \frac{1}{k}\frac{1}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)} \text{ (無因次形式)} \end{aligned} \tag{4}$$

附錄為變數符號表說明，其中，

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \tag{5}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \tag{7}$$

$$c_c = 2\sqrt{mk} \tag{8}$$

$G(\omega)$ 為外力輸入對位移輸出之頻率響應函數。$G(\omega)$ 之特性探討如下：

1. $G(\omega)$ 為一複數，不同之激振頻率 ω，對應不同之 $G(\omega)$ 數值。
2. $G(\omega)$ 可表示成振幅值 $|G(\omega)|$ 及相位角 $\angle G(\omega)$ 如下：

$$G(\omega) = |G(\omega)| e^{i\theta(\omega)} \tag{9}$$

其中，

$$|G(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}} \tag{10}$$

$$= \frac{\omega_n{}^2}{k}\frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)+(\omega c)^2}}$$

$$= \frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\theta(\omega)=\angle G(\omega)=\tan^{-1}(\frac{-\omega c}{k-m\omega^2}) \tag{11}$$

$$=\tan^{-1}(\frac{-2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n{}^2-\omega^2})$$

$$=\tan^{-1}(\frac{-2\zeta r}{1-r^2})$$

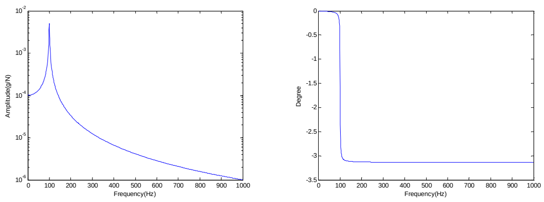
3. 圖 1 為典型之 $|G(\omega)|$ 及 $\angle G(\omega)$ 示意圖。
4. $G(\omega)$ 可分解為實數部 $G_R(\omega)$ 及虛數部 $G_I(\omega)$，圖 2 為典型 $G_R(\omega)$ 及 $G_I(\omega)$ 示意圖。

$$G(\omega) = G_R(\omega) + G_I(\omega) \tag{12}$$

$$= \left[\frac{k-m\omega^2}{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}\right] + i\left[\frac{-\omega c}{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}\right]$$

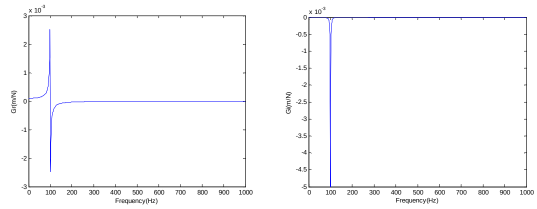
$$= \frac{\omega_n^2}{k}\left[\frac{\omega_n^2-\omega^2}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2} + i\frac{-2\zeta\omega_n\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2} + i\frac{-2\zeta r}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]$$



(a) $|G(\omega)|$ 示意圖　(b) $\angle G(\omega)$ 示意圖

圖 1.典型之 $|G(\omega)|$ 及 $\angle G(\omega)$ 示意圖



(a) $G_R(\omega)$ 示意圖　(b) $G_I(\omega)$ 示意圖

圖 2.為典型 $G_R(\omega)$ 及 $G_I(\omega)$ 之示意圖

5. $G(\omega)$ 也可繪製奈氏圖(Nyquist plot)，也就是以 x 軸為實數部，y 軸為虛數部。圖 3(b)為典型之 $G(\omega)$ 奈氏圖。
6. $G(\omega)$ 之相關特性如下：

(1) $|G(\omega)|$ 之極大值，在 $r=\sqrt{1-2\zeta^2}$ 或 $\omega=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$，則：

$$|G(\omega)|_{\max} = \frac{1}{2k\zeta\sqrt{1-2\zeta}} \tag{13}$$

(2) $r=1$ 時，

$$|G(\omega)|_{r=1} = \frac{1}{2k\zeta} \tag{14}$$

(3) $G_R(\omega)$ 之特性，詳如圖 3(a)

λ 在 $r=\sqrt{1-2\zeta}$ ：

$$\max[G_R(\omega)] = G_{R,\max} = \frac{1}{4k\zeta(1-\zeta)} \tag{15}$$

λ 在 $r=\sqrt{1+2\zeta}$ ：

$$\min[G_R(\omega)] = G_{R,\min} = \frac{-1}{4k\zeta(1+\zeta)} \tag{16}$$

λ 在 $r=1$，$G_R(\omega)=0$

(4) $G_I(\omega)$ 特性，在 $r=1$ ：

$$\min[G_I(\omega)] = G_{I,\min} = \frac{-1}{2k\zeta} \tag{17}$$

7. 在奈氏圖中，重要特性如下：

(1) $\omega=0$ ：

$$G_R(0)=\frac{1}{k}，\quad G_I(0)=0 \tag{18}$$

(2) $\omega=\omega_n\sqrt{1-2\zeta}$ ：

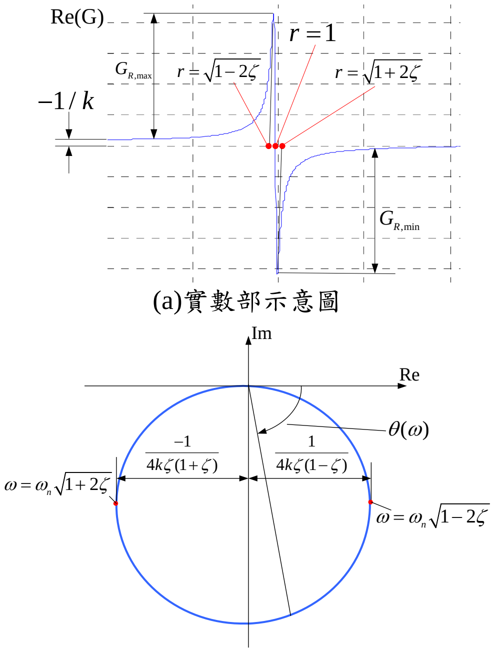
$$G_R(\omega)=\frac{1}{4k\zeta(1\text{-}\zeta)}=G_{R,\max} \tag{19}$$

(3) $\omega=\omega_n$ ：

$$G_R(\omega_n)=0，\quad G_I(\omega_n)=\frac{-1}{2k\zeta} \tag{20}$$

(4) $\omega=\omega_n\sqrt{1+2\zeta}$ ：

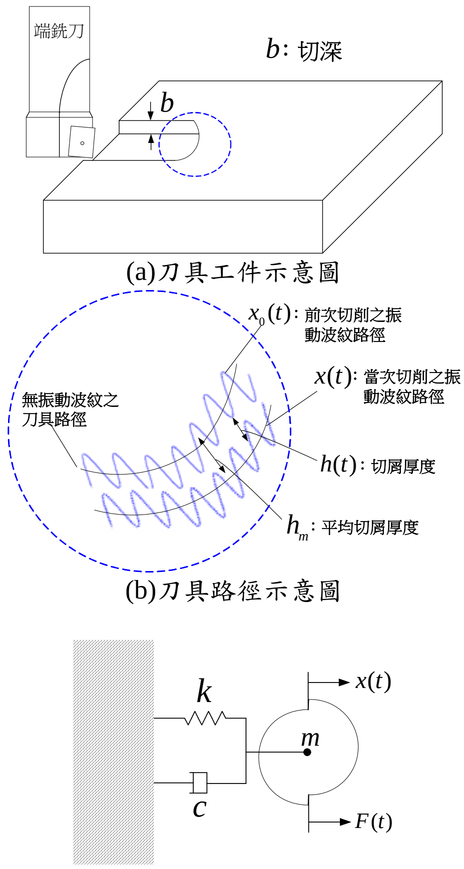
$$G_R(\omega)=\frac{-1}{4k\zeta(1\text{-}\zeta)}=G_{R,\min} \tag{21}$$



(a)實數部示意圖

(b) 奈氏圖

圖 3.FRF 特性示意圖



(a)刀具工件示意圖

(b)刀具路徑示意圖

(c)單自由度系統示意圖

圖 4.平面銑刀切削系統示意圖

3. 單自由度系統銑削顫震分析

在瞭解單自由度系統之振動原理後，以其作為切削顫震分析理論之基礎，並假設刀具為單自由度振動系統，於本節中發展單自由度銑削顫震之理論分析與顫震現象，由銑削顫震理論分析系統，歸納求取單自由度銑削顫震圖形之分析步驟。

3.1 單自由度銑削顫震理論分析

圖 4(a)為平面銑削之刀具與工件示意圖，圖 4(b)為刀具切削路徑示意圖，圖中 $x_0(t)$ 、$x(t)$ 、$h(t)$ 、h_m 如變數符號說明，切削厚度 $h(t)$ 由幾何關係可得：

$$h(t)=h_m+x_0(t)-x(t) \qquad (22)$$
$$=h_m+h_v(t)$$

其中，

$$h_v(t)=x_0(t)-x(t) \qquad (23)$$

已知切削力 $F(t)$ 與切削面積 A 成正比，可寫出：

$$\begin{aligned}F(t)&=k_s A\\&=k_s\times b\times h(t)\\&=k_s\times b\times[h_m+h_v(t)]\\&=F_m+F_v(t)\end{aligned} \qquad (24)$$

其中，

$$\begin{aligned}F_m&=k_s\times b\times h\\F_v(t)&=k_s\times b\times h_v(t)\\&=k_s\times b\times[x_0(t)+x(t)]\end{aligned} \qquad (25)$$

假設切削系統為單自由度系統如圖 4(c)，忽略靜態切削力 F_m 之對應，則系統方程式如下：

$$\begin{aligned}m\ddot{x}+c\dot{x}+kx&=F_v(t)\\&=k_s\times b\times[x_0(t)+x(t)]\end{aligned} \qquad (26)$$

在切削過程中，刀具轉速 n 可視為此系統之外力激振頻率 ω ，表示如下：

$$\omega=2\pi f=2\pi n=2\pi\frac{\text{rpm}}{60} \qquad (27)$$

若考慮面銑刀之刀刃數 z ，則得：

$$\omega=2\pi f=2\pi nz \qquad (28)$$

$$f_t=nz \qquad (29)$$

此系統為簡諧激振(harmonic excitation)狀態，故可假設刀具前次切削路徑 $x_0(t)$ 成簡諧，可得：

$$x_0(t)=X_0e^{i\omega t} \qquad (30)$$

參考圖 5 之刀具線性路徑圖，亦即將圖 4(b)之圓周曲線，以直線方式表示，圖中 a 點為前次切削刀刃位置，b 點為當次切削刀刃位置，T 為前次與當次切削刀刃位置之時間差，通式如下：

$$T=\frac{2\pi N+\varepsilon}{\omega} \qquad (31)$$

其中，N 為切削路徑在前次與當次切削刀刃位置間振動波紋之完整週期數，圖 5 所示 N =2，事實上 N 的範圍 N =0,1,2,…, N_l 圖 5 中之相關變數，f_n 為刀具自然頻率(Hz)，T_n 為振動週期(sec)，而：

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (32)$$

$$h(t)=h_m+x_0(t)-x(t) \qquad (33)$$

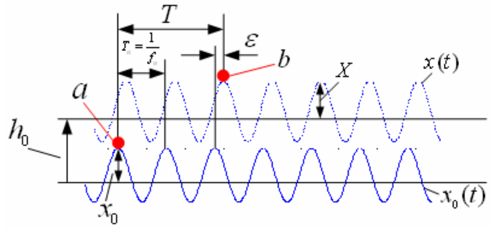


圖 5.刀具線性路徑示意圖

由於當次切削與前次切削有前述之時間差 T，所以變動性之切削力 $F_v(t)$，可改寫如下：

$$F_v(t) = k_s \times b \times \left[x_0(t) + x(t-T) \right] \tag{34}$$

T 時間差所對應之相位角可得 $2\pi N + \varepsilon$，因此 $x(t-T)$ 之簡諧響應可得如下：

$$x(t-T) = Xe^{i(\omega t - 2\pi N - \varepsilon)} \tag{35}$$

將式(30)及(35)代入式(26)得：

$$\left[(k - m\omega^2) + i(\omega c) \right] Xe^{i(\omega t)} = k_s \times b \times \left[X_0 e^{i\omega t} - Xe^{i(\omega t - 2\pi N - \varepsilon)} \right] \tag{36}$$

在穩定切削限度之切削狀態，刀具之振動量應維持常數，亦即每次切削路徑之振動量應相等，所以可得：

$$X_0 = X \tag{37}$$

又已知：

$$e^{i(\omega t - 2\pi N - \varepsilon)} = e^{i(\omega t - \varepsilon)} \tag{38}$$

將式(37)及(38)代入式(36)，化簡可得：

$$k_s b G(\omega)(1 - e^{-i\varepsilon}) = -1 \tag{39}$$

其中，$G(\omega)$ 如式(25)，摘錄如下：

$$G(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + i(\omega c)} \tag{40}$$

式(39)為 $X_0 = X$ 假設下，即穩定切削狀態下，故可得穩定限下之切深 $b_{\lim}$ 如下：

$$b_{\lim} = \frac{-1}{k_s G(\omega)(1 - e^{-i\varepsilon})} \tag{41}$$

其中，k_s 值[8]依不同工件材質而定，例如：

Al 7075-T6：$k_s = 850 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 850 \times 10^6 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

Carbon Steel 1020N：$k_s = 2100 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 2100 \times 10^6 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

由式(39)，由於 k_s 必為實數，b 也是實數，因此可推論得：

$$G(\omega)(1 - e^{-i\varepsilon}) = G(\omega) - G(\omega)e^{-i\varepsilon} = \text{實數} \tag{42}$$

由式(42)，並參考圖 6，$G(\omega)$ 與 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 在奈氏圖之關係，因為：

$$G(\omega) - G(\omega)e^{-i\varepsilon} = \text{實數} \tag{43}$$

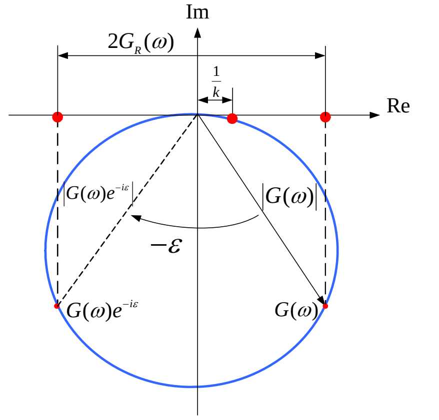
所以，

$$\mathrm{Im}[G(\omega)] - \mathrm{Im}[G(\omega)e^{-i\varepsilon}] = 0 \tag{44}$$

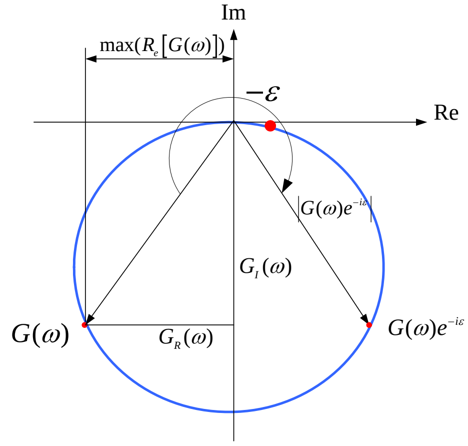
因此，

$$\mathrm{Im}[G(\omega)] = \mathrm{Im}[G(\omega)e^{-i\varepsilon}] \tag{45}$$

如圖 6(a)及 6(b)所示，$G(\omega)$ 與 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 必需為虛數軸之對稱點。



(a) $G(\omega)$ 在第 IV 象限，則 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 在第 III 象限



(b) $G(\omega)$ 在第 III 象限，則 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 在第 IV 象限

圖 6. $G(\omega)$ 與 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 關係圖

由圖 6(a)，若 $G(\omega)$ 在第 IV 象限，為得到 $\mathrm{Im}[G(\omega)] = \mathrm{Im}[G(\omega)e^{-i\varepsilon}]$，則 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$，必須在第 III 象限，如圖 6(a)所示，所以可得知：

$$G(\omega) - G(\omega)e^{-i\varepsilon} = 2\,\mathrm{Re}[G(\omega)] \tag{46}$$

由圖 6(b)，若 $G(\omega)$ 在第 III 象限，為得到 $\mathrm{Im}[G(\omega)] = \mathrm{Im}[G(\omega)e^{-i\varepsilon}]$，則 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$，必須在第 IV 象限，如圖 6(b)所示，所以可以得知：

$$G(\omega) - G(\omega)e^{-i\varepsilon} = 2\,\mathrm{Re}[G(\omega)] \tag{47}$$

由以上推導，可以歸納得知：

$$G(\omega)(1 - e^{-i\varepsilon}) = 2\,\mathrm{Re}[G(\omega)] = 2G_R(\omega) \tag{48}$$

將式(48)帶入(41)得：

$$b_{\lim} = \frac{-1}{2k_s\,\mathrm{Re}[G(\omega)]} = \frac{-1}{2k_s G_R(\omega)} \tag{49}$$

$b_{\lim}$ 為穩定限之切深，若取 $\min(\mathrm{Re}[G(\omega)])$，即 $G(\omega)$ 實數部之最小值，則可得穩定限之最小切深，如下：

$$b_{\min}=\frac{-1}{2k_s\min(\mathrm{Re}[G(\omega)])}=\frac{-1}{2k_sG_{R,\min}} \quad (50)$$

其中，由式(16)可知：

$$\min(\mathrm{Re}[G(\omega)])=G_{R,\min}=\frac{-1}{4k\zeta(1+\zeta)} \quad (51)$$

將式(51)代入(50)，得：

$$b_{\min}=\frac{-1}{2k_s\dfrac{-1}{4k\zeta(1+\zeta)}}=\frac{2k\zeta(1+\zeta)}{k_s} \quad (52)$$

由上式穩定限之最小切深 $b_{\min}$ 特性，探討如下：

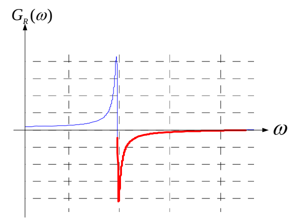
1. 刀具剛性 k 愈大，則穩定限最小切深 $b_{\min}$ 愈大。
2. 刀具阻尼比 ζ 愈大，則穩定限最小切深 $b_{\min}$ 愈大。
3. k_s 為工件之切削力係數或比功率愈大，則穩定限最小切深 $b_{\min}$ 愈小。
4. 由圖 6 觀察得知，在 $b_{\min}$ 時，相位角 ε 恰為 π。

3.2 單自由度銑削顫震穩定圖分析

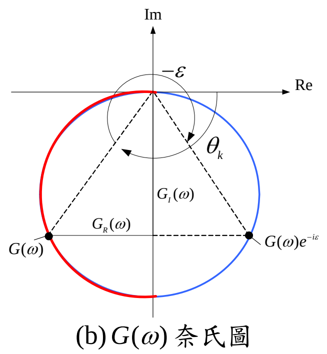
由圖 6 之 $G(\omega)$ 與 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 在奈氏圖中之關係，$G(\omega)$ 與 $G(\omega)e^{-i\varepsilon}$ 兩者必為虛數軸之對稱點，故可取 $G_R(\omega)$ 為負值之區間，推算穩定限之切深 $b_{\lim}$。

為求刀具銑削工件之顫震穩定圖，以 x 軸為刀具每分鐘轉數，y 軸為穩定限之切深 $b_{\lim}$，已知條件如下：

1. 刀具基本資料：刀具刀刃數 z，刀具刀刃端之位移對力的頻率響應函數 $G(\omega)$，圖 7 為 $G(\omega)$ 實數部與奈氏圖之示意圖，圖中粗線為實數部之負值。
2. 工件基本資料：切削係數 k_s ($\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$)。



(a) $G(\omega)$ 之實數部



(b) $G(\omega)$ 奈氏圖

圖 7. $G(\omega)$ 之實數部與奈氏圖

求 SLD 之具體步驟如下：

1. 求得刀具 $G(\omega)$ 之實數部 $G_R(\omega)$ 為負值之頻率區間
$$\omega_k \longrightarrow G(\omega_k) \qquad k=1,2,\ldots,N_k \quad (53)$$
2. 對每一頻率 ω_k，求對應之 $G(\omega_k)$ 相位角
$$\theta_k=\tan^{-1}\left[\frac{G_I(\omega_k)}{G_R(\omega_k)}\right] \quad (54)$$
3. 求 ω_k 所對應之前次與當次切削路徑振動波紋之相位角 ε_k，參考圖 7(b)
$$\varepsilon_k=2\pi-\left|\theta_k+\frac{\pi}{2}\right|\times 2 \quad (55)$$
4. 由式(31)，求得 ω_k 所對應之前次與當次切削刀刃位置之時間差：
$$T_k=\frac{2\pi N+\varepsilon_k}{\omega_k}\text{，}N=0,1,2,\ldots,N_l \quad (56)$$
5. 由式(28)，求得 ω_k 對應之刀具每分鐘轉數 rpm_k
$$\mathrm{rpm}_k=60n_k=60\frac{\omega_k}{2\pi z}=60\frac{2\pi f_k}{2\pi z}=60\frac{f_k}{z}=60\frac{1}{T_kz} \quad (57)$$
6. 由式(49)，可得穩定限之切深 $b_{\lim}$ 如下：
$$b_{\lim}(\omega_k)=\frac{-1}{2k_s\,\mathrm{Re}[G(\omega_k)]}=\frac{-1}{2k_sG_R(\omega_k)} \quad (58)$$
7. 重複步驟 1~6，令 $N=0,1,2,\ldots,N_l$，求得不同 N 值之穩定切深 $b_{\lim}^N(\omega_k)$
8. 由式(50)及(52)，求得穩定限之最小切深 $b_{\min}$
$$b_{\min}(\omega_k)=\frac{-1}{2k_s\min(\mathrm{Re}[G(\omega)])}=\frac{-1}{2k_sG_{R,\min}}=\frac{2k\zeta(1+\zeta)}{k_s} \quad (59)$$

圖 8 為依據 SDOF 模型所設計開發之 SDOF 系統之 SLD 預測分析模組，若選用刀具轉速 rpm 與切深 b，於此 SLD 之下方，可獲得無顫震之穩定切削，此 SLD 圖有助於避免顫震之切削參數選用，說明如下：

1. A 為刀具參數輸入部份，可輸入包含：質量(m)、阻尼比(ζ)、彈簧常數(k)、切削力係數(k_s)、刀具刃數(z)，可以設定不同設定條件進行預測。
2. B 為繪圖預測參數設定，包含：Lobe 數、頻率解析度、自然頻率係數之頻率取樣範圍。
3. C 為預測結果參數輸出，包含：自然頻率、工件切削力係數、彈簧常數及最小切深。
4. D 為 SLD 預測結果，上圖為無因次之 $G(\omega)$ 以 r 為 x 軸，下圖為不同 N 值之 $b_{\lim}^N(\omega_k)$ 以 rpm 為 x 軸，粗實線為不同 N 值組合之 SLD 圖。

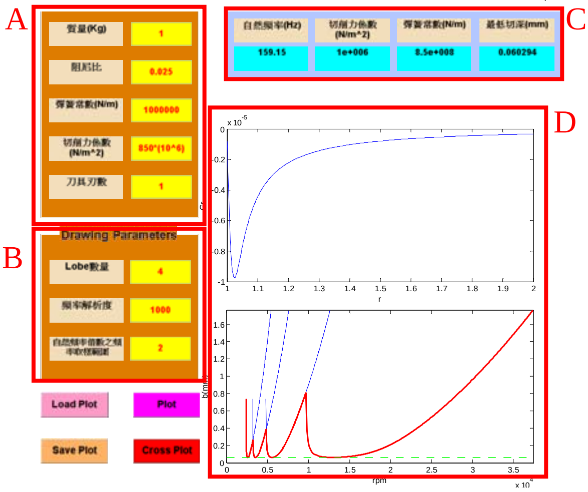
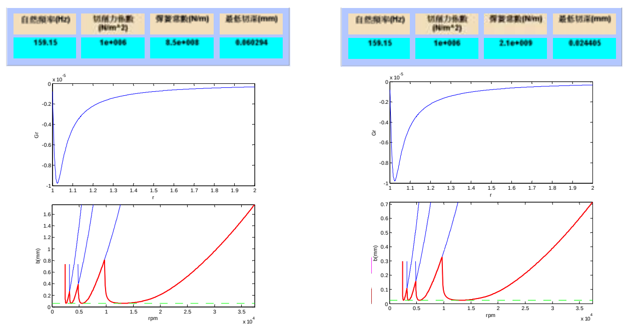


圖 8.典型 SDOF 系統之 SLD 圖

3.3 結果與討論

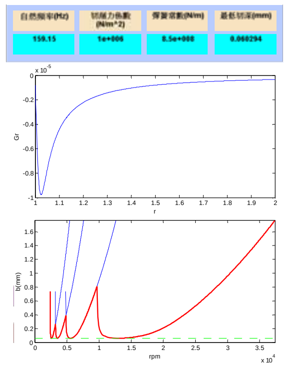
本節應用圖 8 所建立之 SDOF 系統 SLD 預測分析模組，藉由更改不同加工參數得到對應 SDOF 系統之 SLD 預測結果。透過不同加工參數組合可得知各參數對 SLD 系統之影響，將質量、阻尼比、Lobe 數皆設定為 1Kg、0.025、4；改變切削力係數、彈簧常數及刀具刃數。綜合討論如下：

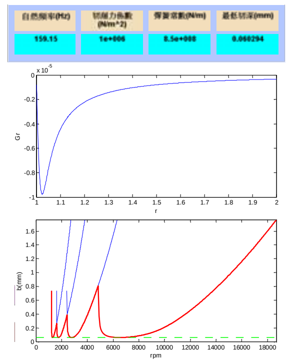
1. 圖 9 中 4 個波形即對應之 4 個 lobe，所連成之粗實線即為 SLD 曲線，SLD 曲線下方為刀具轉速與切深組合之穩定切削區域，無切削顫震之虞，反之，於 SLD 曲線上方之組合，將產生切削顫震。
2. 從圖 9 預測結果中，當改變加工工件之切削力係數，則會影響穩定切削區域之切削深度，也同樣影響加工時最低切削深度；而工件之切削力係數越高，亦即工件剛性越大，所能切削之深度就越小。
3. 圖 10 中增加刀具刃數時，最小切深 $b_{\min}$ 均相同為 0.06mm，且 SLD 曲線趨勢也相同，但其主軸轉速則呈比例降低。
4. 圖 11 中，當提高刀具彈簧常數時即刀具剛性大，可得不同頻率下之 SLD 曲線；且當彈簧常數增加時，SLD 曲線之穩定切削區域深度則相對增加，並增加最低穩定切削深度。



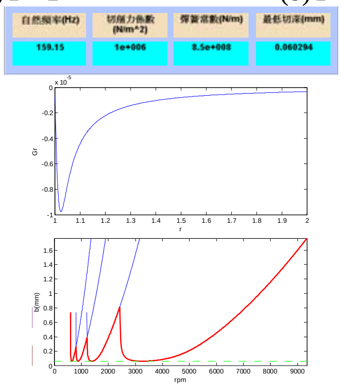
(a) $k_s = 850\times10^6$ (N/m^2)， $b_{\min}$ =0.06(mm)　(b) $k_s = 2100\times10^6$ (N/m^2)， $b_{\min}$ =0.02(mm)

圖 9.不同工件材料參數之 SLD 圖



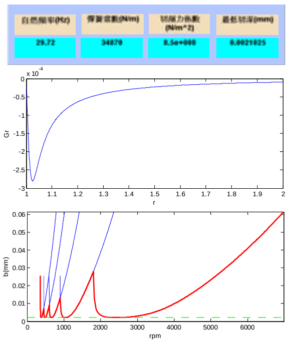


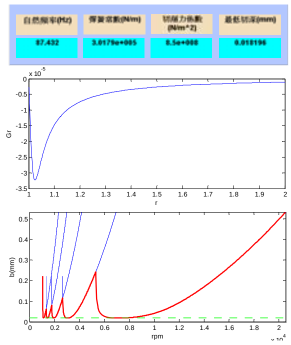
(a) $z = 1$　(b) $z = 2$



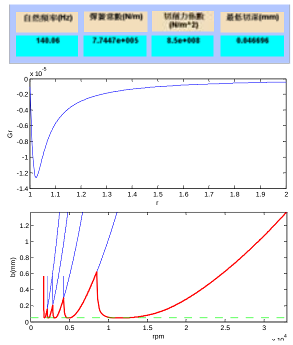
(c) $z = 4$

圖 10.不同刃數之 SLD 圖





(a) $k = 34870$ (N/m)， f_n =29.7(Hz)， $b_{\min}$ =0.002(mm)　(b) $k = 301790$ (N/m)， f_n =87.4(Hz)， $b_{\min}$ =0.01(mm)



(c) $k = 774470$ (N/m)， f_n =140(Hz)， $b_{\min}$ =0.04(mm)

圖 11.不同刀具彈簧常數之 SLD 圖

4. 多自由度系統銑削顫震穩定圖分析

考慮實際之銑削作業，平面銑刀固定於工具機之主軸，刀具與工具機台為一耦合結構系統，由上述所歸納之單自由度銑削顫震圖形之分析步驟，進而歸納多自由度系統顫震穩定圖形之分析步驟。

4.1 多自由度顫震穩定圖分析

典型之銑床結構模態如圖 12 [8]，前五個模態自然頻率，分別為 22、75、125、350 及 570Hz，圖中虛線顯示銑床結構之模態振型。

圖 13 [8]為刀具與工件之間的頻率響應函數 $G(\omega)$ 之實例，可視為典型連續結構系統之 $G(\omega)$，具有多個振動模態，於銑床切削，欲預測銑削顫震 SLD 圖首先必須量測工件與刀具之 $G(\omega)$，預測分析步驟如下：

1. 量測刀具與工件之間之 $G(\omega)$，一般採衝擊槌敲擊，而以加速度計量測加速度，因此可量得，刀具與工件之間之加速度與力之頻率響應函數定義如下：
$$\ddot{G}(\omega)=\frac{A(\omega)}{F(\omega)} \tag{60}$$
2. 將 $\ddot{G}(\omega)$ 轉換為位移與力之頻率響應函數 $G(\omega)$ 如下：
$$G(\omega)=\frac{X(\omega)}{F(\omega)}=\frac{\ddot{G}(\omega)}{-\omega^2} \tag{61}$$
至此，可得每一頻率 ω_k 所對應之 $G(\omega_k)$ 如下：
$$\omega_k \to G(\omega_k)\text{，}k=1,2,\ldots,N_k \tag{62}$$
3. 由前項步驟可求得 $G(\omega)$ 之實數部 $G_R(\omega)$ 為負值之頻率區間，如下：
$$\omega_{l1}\sim\omega_{l2}\to G_R(\omega)<0\text{，}l=1,2,\ldots,N_m \tag{63}$$
N_m 個具有負值 $G_R(\omega)$ 之頻率區間，亦即刀具之模態數，ω_{l1} 及 ω_{l2} 分別為其頻率上限及下限，$l=1,2,\ldots,N_m$
4. 對第 l 個區間之每一頻率點 ω_k，求對應之 $G(\omega)$ 相位角如下：
$$\theta_k=\tan^{-1}\left[\frac{G_I(\omega_k)}{G_R(\omega_k)}\right] \tag{64}$$
5. 求在式(63)頻率區間之 ω_k 所對應之前次與當次切削路徑振動波紋之相位角 ε_k 如下：
$$\varepsilon_k=2\pi-\left|\theta_k+\frac{\pi}{2}\right|\times 2 \tag{65}$$
6. 求得 ω_k 所對應之前次與當次切削刀刃位置之時間差：
$$T_k=\frac{2\pi N+\varepsilon_k}{\omega_k} \tag{66}$$
7. 求得 ω_k 對應之刀具每分鐘轉數 rpm_k：
$$\mathrm{rpm}_k=\frac{60}{T_k z} \tag{67}$$
8. 求得穩定限之切深 $b_{\lim}$：
$$b_{\lim}(\omega_k)=\frac{-1}{2k_s G_R(\omega_k)} \tag{68}$$
9. 重複步驟 4~8，對第 l 個具負值 $G_R(\omega)$ 頻率區間，對 $N=0,1,2,\ldots,N_l$，求得不同 N 值之穩定限切深 $b_{\lim}^N(\omega_k)$。
10. 計算每一第 l 個具負值 $G_R(\omega)$ 頻率區間之穩定限最小切深。
$$b_{\min,l}=\frac{-1}{2k_s G^l_{R,\min}} \tag{69}$$
其中，
$$G^l_{R,\min}=\min\left[G_R(\omega)\right]\text{，}\omega_{l1}<\omega<\omega_{l2} \tag{70}$$

圖 14 為所開發設計之多自由度系統 SLD 預測分析模組，其中包括：

1. A 為 MDOF 系統輸入參數，包含：自由度數量、質量(m)、彈簧常數(k)、α、β、頻率解析度、模態起始值與模態終止值，可以設定不同設定條件進行預測。
2. B 為繪圖預測參數設定，包含：工件切削力係數、刀具刃數及 Lobe 數量。
3. C 為預測結果參數輸出，包含：$G_R(\omega)$ 模態數起始點、$G_R(\omega)$ 模態數終止點、自然頻率、阻尼比與各模態下對應之最低切深。
4. D 為 SLD 預測結果，左上圖為 $G_R(\omega)$，右上圖為奈氏圖，下圖為此多自由度系統前 2 個模態，各模態有 4 個 lobes 的 SLD 顫震穩定圖，最粗實線為最後各模態，各 lobe 組合之 SLD 線。

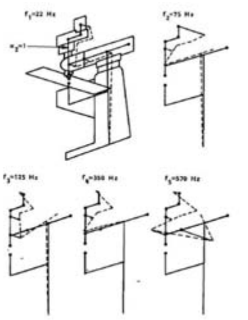


圖 12.銑床模態振型示意圖[8]

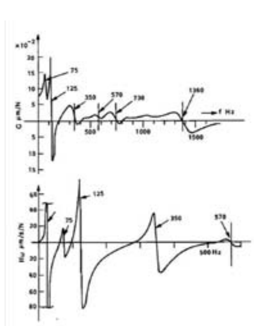


圖 13.函數轉換示意圖[8]

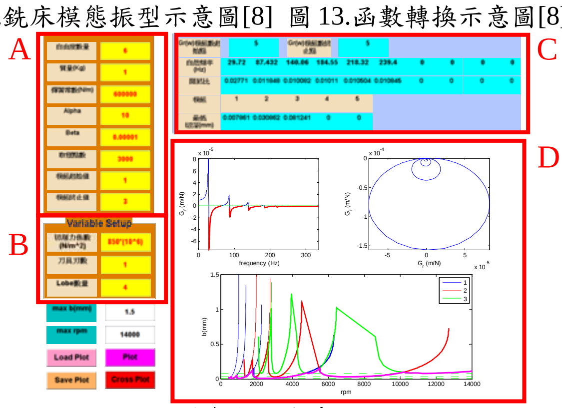
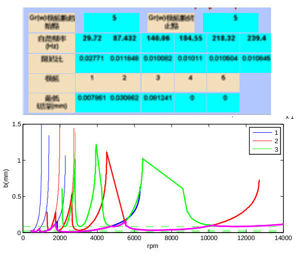


圖 14.典型多自由度系統之 SLD 圖

4.2 結果與討論

本節應用圖 14 所建立之 MDOF 系統 SLD 預測分析模組，藉由更改不同加工參數得到對應 MDOF 系統之 SLD 預測結果。透過不同加工參數組合可得知各參數對 SLD 系統之影響，將自由度、質量、α、β、刀具刃數及 Lobe 數皆設定相同；改變彈簧常數、模態起始終止值及切削力係數。綜合討論如下：

1. 圖 15 取刀具前 3 個振動自然模態，各模態設定 4 個 lobe 之 SLD 預測結果，粗實線為各模態及其各 lobe 之 SLD 曲線，SLD 曲線下方為穩定切削區域。
2. 從圖 15 預測結果中，當增加加工工件之切削力係數，降低各振動自然模態下穩定切削區域最低切削深度。
3. 圖 16 中，增加刀具彈簧常數，可以得到刀具模態參數，不同模態之 SLD 曲線，對應之最低切削深度 $b_{\min}$ 便不相同。
4. 圖 17 中，取其 1 至 2 及 1 至 4 個振動模態，當增加或減少振動模態數量，可觀察模態數對 SLD 曲線之穩定切削區域。
5. 高頻振動自然模態之 SLD，其 SLD 所含之穩定切削區域及最低切削深度皆較高。
6. 透過振動模態數量之選擇，可挑選特定頻率下之 SLD 曲線，藉此達到最佳之 SLD 曲線預測。


(a) $k_s = 850\times10^6$ (N/m^2)
$b_{\min}$ =0.007(mm)、0.03(mm)、0.08(mm)

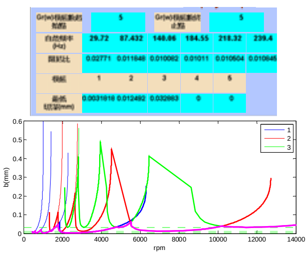
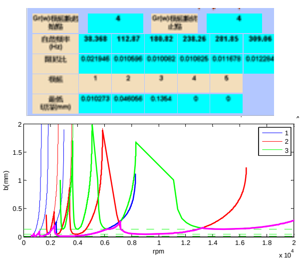

(b) $k_s = 2100\times10^6$ (N/m^2)
$b_{\min}$ =0.003(mm)、0.01(mm)、0.03(mm)

圖 15.不同工件材料參數之 SLD 圖


(a) $k = 1\times10^6$ (N/m)
$b_{\min}$ =0.01(mm)、0.04(mm)、0.1(mm)

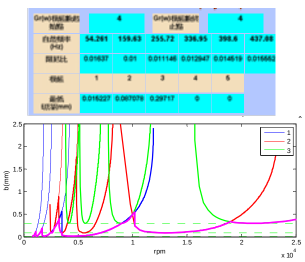
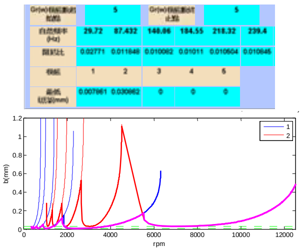

(b) $k = 2\times10^6$ (N/m)
$b_{\min}$ =0.01(mm)、0.08(mm)、0.2(mm)

圖 16.不同刀具剛性之 SLD 圖


(a) N_m = 1~2
$b_{\min}$ =0.007(mm)、0.03(mm)

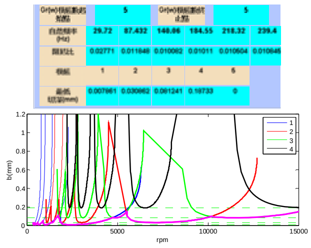

(b) N_m =1~4
$b_{\min}$ =0.007(mm)、0.03(mm)、0.08(mm)、0.1(mm)

圖 17.不同振動模態數之影響

5. 結論

本文目的在對單自由度與多自由度振動系統及其刀具顫震穩定圖理論分析進行說明。透過單自由度振動系統之理論分析說明，並假設刀具為單自由度振動系統，發展銑削顫震理論分析，歸納 SLD 之分析步驟，延伸歸納多自由度系統之 SLD 預測分析。綜合討論如下：

1. 透過單自由度與多自由度系統振動及刀具顫震穩定圖理論推導說明，可助於理解由單自由度與多自由度系統與刀具顫震穩定圖之關聯。
2. 藉由單自由度與多自由度刀具振動系統之顫震穩定圖預測分析，可利於瞭解結構模態參數及加工參數對 SLD 曲線影響之特性。
3. 多自由度系統預測之刀具顫震穩定圖，有助於銑削時，避免切削顫震並得到最大金屬移除率之加工參數的參考依據。
4. 經由多自由度系統與刀具穩定顫震圖之關聯，未來可延伸應用於實際量測之刀具頻率響應函數，則可得實際量測之 SLD。
5. 透過單自由度與多自由度系統之模組化，可自行定義參數增加模組彈性，更可作為切削顫震教學及加工實務應用。

6. 致謝

本文承蒙財團法人精密機械研究發展中心 98 年度計畫「加工效率與振動問題研究」經費補助提供，特此致謝。

7. 參考文獻

[1] Yue, J., 2006, “Creating a Stability Lobe Diagram,” *Proceedings of the 2006 IJME – INTERTECH Conference*, New Jersey, Sessions 301-050.
[2] 王栢村，2009，「加工效率與振動問題研究」，*財團法人精密機械研究發展中心委託研發計畫期末報告*，國立屏東科技大學。
[3] Quintana, G., Ciurana, J., and Teixidor, D., 2008, “A New Experimental Methodology for Identification of Stability Lobes Diagram in Milling Operations,”

International Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol. 48, pp. 1637-1645.

[4] Quintana, G., Ciurana, J., Ferrer, I., and Rodriguez, C. A., 2009, "Sound Mapping for Identification of Stability Lobe Diagrams in Milling Processes," *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 49, pp. 203-211.

[5] Smith, S.., Winfough, W. R., and Borchers, H. J., 2000, "Power and Stability Limits in Milling," *Annals of the CIRP*, Vol. 49, pp. 309-312.

[6] 楊益群，廖運炫，1998，「CNC 銑床之顫震控制」，*機械月刊*，第 24 卷，第 3 期，第 257-265 頁。

[7] 蔡南全，陳定成，李榮茂，2008，「銑切抖顫之聲訊回授與補償」，*中國機械工程學會第二十五屆全國學術研討會論文集*，彰化，論文編號：B14-03。

[8] King, I., R., 1985, "Handbook of High-speed Machining Technology," *Chapman and Hall*, New York.

Chatter Stability Lobe Diagram Analysis by SDOF and MDOF Systems

Bor-Tsuen Wang[1], Xiu-Wei Liang[2], Chia-Li Chou[3]

[1]Professor, Department of Mechanical Engineering, Pingtung University of Science & Technology.

[2]Student, Department of Mechanical Engineering, Pingtung University of Science & Technology.

[3]Engineer, Precision Machinery Research Development Center.

ABSTRACT

The Chatter in metal cutting is a kind of self-excited phenomenon and affects the tool life as well as the metal removal rate. The stability lobe diagram (SLD) can help to select machining parameters so as to avoid chatter vibration. This work develops the single degree of freedom (SDOF) and multiple degree of freedom (MDOF) system models to predict the SLD for milling. First, the SDOF vibration system analysis is reviewed for chatter analysis. The milling cutting tools is assumed as the SDOF model to discuss the chatter phenomenon. The procedure to obtain the SLD is then presented step by step and applied to develop the SLD prediction program. Finally, the SDOF model for predicting the SLD is extended to the MDOF model that can be used to predict the SLD for practical milling tests. This work lays out the principle in analyzing the SLD and discusses it's applications to properly select machining parameters for avoiding chatter phenomenon.

Keywords: Chatter, stability lobe diagram, SDOF system, MDOF system.

8. 附錄

變數符號表

變數名稱	變數意義	單位
A	切削面積， $A = b \times h(t)$	m^2
b	切削寬度(chip width)或切深(depth of cut)	m
$b_{\lim}$	切削穩定限(limit of stability)之切深	m
$b_{\min}$	切削穩定限之最小切深	m
c	刀具等效阻尼係數	$\frac{N \times s}{m}$
c_c	刀具臨界阻尼係數， $c_c = 2\sqrt{mk}$	$\frac{N \times s}{m}$
f	刀具轉速頻率， $f = n = \frac{\text{rpm}}{60}$	Hz
f_n	刀具之基礎自然頻率(fundamental natural frequency)單自由度系統假設， $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	Hz
f_t	對應刀具轉速之刀刃頻率， $f_t = nz$	Hz
F_m	平均切削力或靜態切削力	N
$F(t)$	切削力(cutting force)	N
$F_v(t)$	變動之切削力	N
$G(\omega)$	刀具之頻率響應函數， $G(\omega) = G_R(\omega) + G_I(\omega)$	$\frac{m}{N}$
$G_I(\omega)$	刀具之頻率響應函數虛數部	$\frac{m}{N}$
$G_R(\omega)$	刀具之頻率響應函數實數部	$\frac{m}{N}$
h_m	平均切屑厚度(mean chip thickness)	m
$h(t)$	實際切屑厚度(chip thickness)	m
$h_v(t)$	刀具振動所引發之切屑厚度變動量	m
k	刀具等效彈簧常數	$\frac{N}{m}$
k_s	加工件之切削力係數(cutting force coefficient)或稱比功率(specific power)	$\frac{N}{m^2}$
m	刀具等效質量	Kg
n	刀具轉速(每秒轉動次數)， $\text{rpm} = 60 \times n$	$\frac{\text{rev}}{\text{sec}}$
N	切削路徑在前次與當次切削刀刃位置之間的振動波紋完整週期數， $N = 0,1,2,\ldots,N$	
N_l	完整週期數之最大值	
N_m	多自由度系統之模態數	
r	刀具轉速頻率與刀具基礎自然頻率比， $r = \frac{f}{f_n} = \frac{\omega}{\omega_n}$	
rpm	每分鐘轉速	$\frac{\text{rev}}{\text{min}}$
T	前次與當次切削刀刃位置之時間差 $T = \frac{1}{n \times z} = \frac{60}{\text{rpm} \times z}$ $T = \frac{(2\pi N + \varepsilon)}{\omega}$	

變數名稱	變數意義	單位
T_ε	相位角 ε 對應之時間，$T_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\omega_n} = \frac{\varepsilon}{2\pi f_n}$	sec
T_n	刀具基礎自然頻率對應之振動週期	sec
$x(t)$	當次切削路徑，亦即刀具之位移變形	m
$x_0(t)$	前次切削路徑	m
X	當次切削路徑振動波紋振幅值	m
X_0	前次切削路徑振動波紋振幅值	m
z	刀具之刀刃數	
$\alpha \cdot \beta$	$[c]=\alpha[M]+\beta[K]$，比例阻尼常數	
ε	前次與當以切削路徑振動波紋之相位角(phase angle)	rad
ω	刀具轉速圓週頻率 $\omega = 2\pi f$，亦即刀具系統之激振頻率	$\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
ω_n	刀具之基礎自然頻率	$\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$
ζ	刀具等效阻尼比，$\zeta = \frac{c}{c_c}$	