

木琴條之實驗模態分析與模型驗證

王栢村¹、廖偉廷²

¹國立屏東科技大學 機械工程系 教授

²國立屏東科技大學 機械工程系 研究生

wangbt@mail.npust.edu.tw

摘要

本文探討木琴條的實驗模態分析及其分析模型之模型驗證。首先架構木琴條的有限元素模型，進行理論模態分析，以求得自然頻率及模態振型，然後對木琴條進行實驗模態分析，在實驗中以衝擊錘當驅動器為輸入，分別以加速度計和麥克風當感測器來量測訊號為輸出，求得實體的模態參數，包括自然頻率、模態振型及阻尼比，以實驗求得之模態參數為基準，作為有限元素模型修正之依據，以確認木琴條之材料參數並進而驗證模型的正確性。由結果顯示，理論模態分析與實驗模態分析所求得之模態參數有相當的吻合性，故成功地完成木琴條有限元素模型之驗證，且由實驗結果顯示麥克風與加速度計所量得的自然頻率及模態振型均相當的對應，因此以麥克風當感測器進行實驗模態分析是可行的。本文所分析之實驗方法將有助於以後對樂器進行振動特性之研究。

關鍵詞：木琴條、有限元素分析、實驗模態分析、模型驗證。

1. 前言

木琴為典型的打擊樂器之一，通常用於演奏會或一些表演活動上，在演奏時，各種樂器之發聲模式，有吹奏、摩擦、敲擊等不同方式對各種結構激發振動進而產生聲音，然而每種樂器之結構振動方式皆不相同，而影響發聲的要素相當多，如樂器的結構、形狀、尺寸、材質等。在過去對於聲音的分析，僅以耳聽的方式來判定音階的高低，但對於音色、音質、音韻的好壞判定是有很大的差異，然而現今科技的進步與發達，所以在聲音的量測上可經由儀器來取代人耳。

Bretos *et al.* [1]是運用有限元素分析木琴之木條結構的模態振型，並且探討木條均勻或凹刻截面對於自然頻率與模態振型的影響，從中可得知木琴條為非均勻的材料特性，其楊氏係數對側向振動模態影響最大。Doutaut *et al.* [2]以自由樑理論分析木琴條受敲擊的時間域及頻率響應預測，其理論分析結果與實驗量測結果有很好的吻合性。Bundesanstalt *et al.* [3]分別對兩種不同底邊形狀的木琴條進行振動模態與聲音輻射之關聯性比較，從中可得知兩種木琴條結構不同對聲音音階比之差異。王等人[4]以有限元素建構銅鑼的分析模型，進行理論模態分析，並配合實驗模態分析，結果顯示模態參數包括自然頻率及模態振型均相當吻合，並量測銅鑼敲擊後之聲音頻譜響應，得知聲音其聲音基本頻率與模態對應的關係。王等人[5]以有限元素分析配合實驗模態分析，對吉他共鳴箱振動模態進行模型驗證，以了解吉

他共鳴箱的振動特性。王和蘇[6]由理論與實驗量測探討吉他弦之振動模態特性，並探討吉他弦撥動之聲音頻譜，確認其主要頻率及聲音頻譜特性。王和林[7]對鐵琴片進行振動模態分析，理論分析與實驗所得的模態參數有相當程度的吻合性，且由分析與實驗之模態振型觀察模態保證指標(model assurance criterion, MAC)有相當高的吻合，因此可確認模型驗證是成功的，並對敲擊聲音作量測，得知第一個振動模態為鐵琴片之主頻率，而且敲擊鐵琴片的中心位置，可明確激發出第一個振動模態的聲音頻率。

本文擬分析木琴上的 C 音階木琴條，有一木琴條規格如圖 1 所示，單位為公尺，以有限元素分析(finite element analysis, FEA)及實驗模態分析(experimental modal analysis, EMA)來進行，而主要分析目標為對木琴條進行模型驗證，先以有限元素分析軟體架構木琴條的有限元素模型，得到理論的模態參數，包括自然頻率及模態振型，還有頻率響應函數(frequency response function, FRF)，再對木琴條進行實驗模態分析量測得頻率響應函數及關連性函數(coherence function)，並經由曲線嵌合(curve fitting)，可得到實際結構的模態參數，包括自然頻率、模態振型及阻尼比，以實驗模態分析之模態參數為依據和理論值之模態參數進行驗證，若結果相近，則可以確認有限元素模型正確，如果不符合，則修正有限元素模型直到正確；接著確認麥克風為感測器的可行性，也就是去比對以加速度計為感測器所得到的模態參數是否對應。

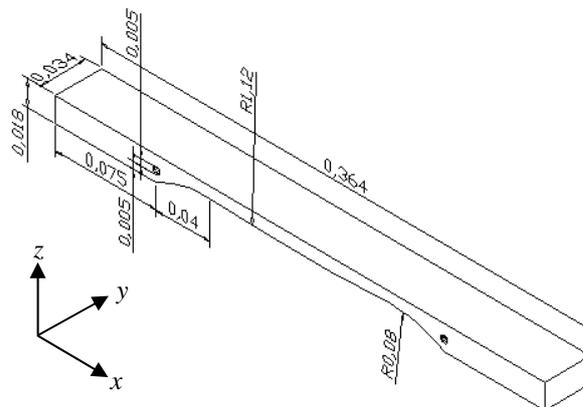


圖 1 木琴條示意圖

2. 有限元素分析(FEA)

本文是以 ANSYS 分析軟體進行有限元素分析，圖

2 為木琴條自由邊界之有限元素模型示意圖，採用線性立方體元素(SOLID45)來架構。元素分割方面，長度方向分成 100 等分，寬度方向分成 10 等分，厚度方向分成 5 等分。位移限制及負荷條件方面，模擬自由邊界的木琴條在模態分析中均不用設定。簡諧分析中在相對於實驗量測時之衝擊錘敲擊第 1 點位置處輸入 1 單位點力，使結構產生激振以求得對應之頻率響應函數。

首先進行模態分析(modal analysis)求出模態參數，包括自然頻率及模態振型。木琴條的密度可由重量及體積求得，而木琴條的材質為非等向性材料，其材料參數設定先令楊氏係數(E_x 、 E_y 、 E_z)、剪力模數(G_{xy} 、 G_{yz} 、 G_{xz})、浦松比(ν_{xy} 、 ν_{yz} 、 ν_{xz})為設定變數，經由最佳化分析使理論分析與實驗分析所得的自然頻率誤差最小，並比對模態振型是否一致，表 1 為經最佳化分析所得之木琴條材料參數，然後再進行簡諧分析(harmonic analysis)，以求得理論的頻率響應函數。



圖 2 木琴條自由邊界之有限元素模型示意圖

表 1 木琴條材料參數對照表

楊氏係數(GPa)	$E_x=15$	$E_y=9$	$E_z=9$
剪力模數(GPa)	$G_{xy}=1.5$	$G_{yz}=9$	$G_{xz}=2$
浦松比	$\nu_{xy}=0.3$	$\nu_{yz}=0.3$	$\nu_{xz}=0.3$
密度(kg/m^3)	832		

3. 實驗模態分析(EMA)

為對木琴條進行實驗模態分析，首先將木琴條規劃 30 個敲擊點如圖 3 所示，實驗架設如圖 4 所示，將木琴條以棉線懸掛在支架上，模擬自由邊界狀態，分別以導線將衝擊錘、加速度計及麥克風接於頻譜分析儀(SigLab)上的 A、B、C 輸入模組，加速度計固定在第 1 個點上，麥克風以架子固定，距離木琴條 5cm 作基準進行量測。移動衝擊錘敲擊木琴條上每一個敲擊點，由加速度計及麥克風感測器量取木琴條之響應訊號傳入頻譜分析儀，頻寬設為 0~5000Hz，時間域取樣點數設為 8192，頻譜分析儀對輸入模組之訊號作快速傅立葉轉換，求得木琴條之頻率響應函數和關聯性函數，然後再將所得的頻率響應函數資料傳入電腦中以 ME'scopeVES 軟體作曲線嵌合，以獲得木琴條之實際模態參數，包括自然頻率、模態振型和阻尼比。

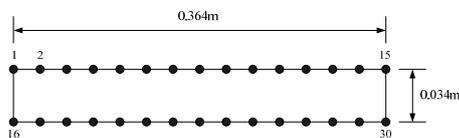


圖 3 木琴條敲擊點規劃圖



圖 4 實驗模態分析設備實際架設圖

4. 結果與討論

本文主旨是對木琴條進行模型驗證，圖 5 為模型驗證流程圖，模型驗證的主要目的在確認理論有限元素模型是否能代表實際模型，若理論與實驗得到之模態參數比對結果不佳，則需對有限元素模型進行修改，直到有限元素模型可以代表實際模型為止。

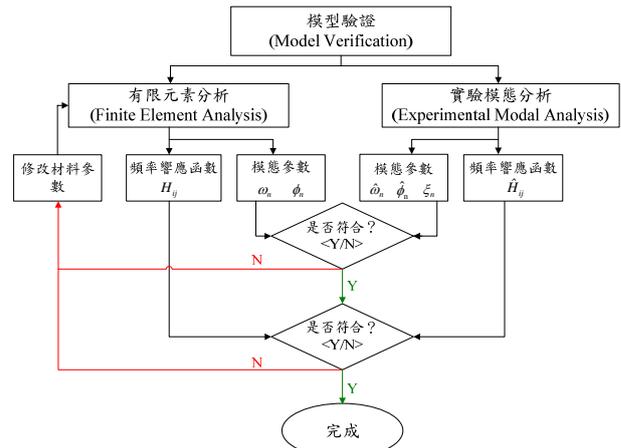


圖 5 模型驗證流程圖

4.1 木琴條之模型驗證

將實驗模態分析所得的結果與有限元素分析的結果進行探討，其中包括頻率響應函數、關聯性函數、自然頻率、模態振型及阻尼比，藉由模型驗證進而確認理論有限元素模型之正確性。

4.1.1 頻率響應函數與關聯性函數

表 2 為木琴條實驗模態分析的加速度計與麥克風所得頻率響應函數重疊圖對照表，從虛數部可以清楚看出峰值所對應模態之自然頻率，此對應之峰值可作為曲線嵌合參考資料。

圖 6 與圖 7 中的左邊和右邊圖形分別為加速度計和麥克風之 H_{ij} 頻率響應函數與關聯性函數圖，其中 j 為衝擊錘敲擊位置，即輸入點； i 為加速度計和麥克風位置，即輸出點。在圖 6 的頻率響應函數圖中包括了實驗(Experimental)、合成(Synthesized)及理論(Theoretical)的

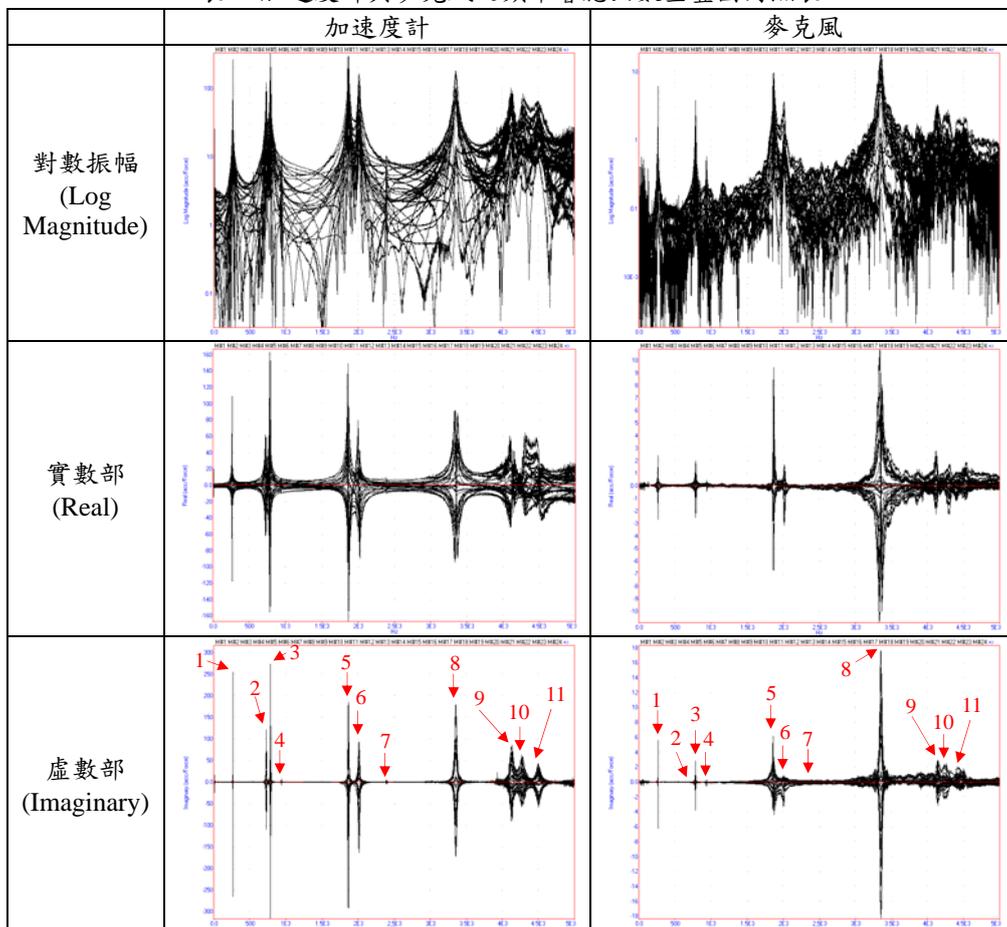
曲線，而圖 7 的頻率響應函數圖中沒有理論曲線，是因為在 ANSYS 分析軟體中無法模擬麥克風，因此沒有理論曲線。

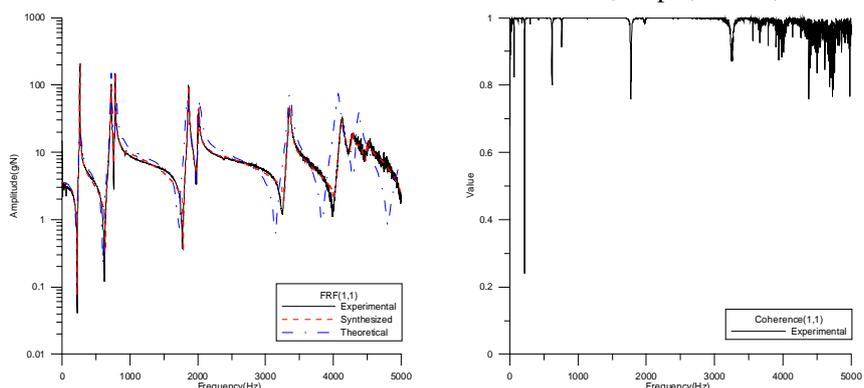
在圖 6 與圖 7 的頻率響應函數圖中，實驗與合成的模態峰值及曲線幾乎重疊，表示曲線嵌合相當成功；在圖 6 的頻率響應函數圖中，理論與實驗的模態峰值及曲線也相當對應，故可知理論有限元素模型與實際結構是有相當的等效性；另外，頻率響應函數圖中，因為衝擊錘敲擊位置與感測器量測位置同點，故在共振尖峰點間有明顯的反共振點；而不同點頻率響應函數圖中，因為

衝擊錘敲擊位置與感測器量測位置不同點，故其反共振點並不明確。

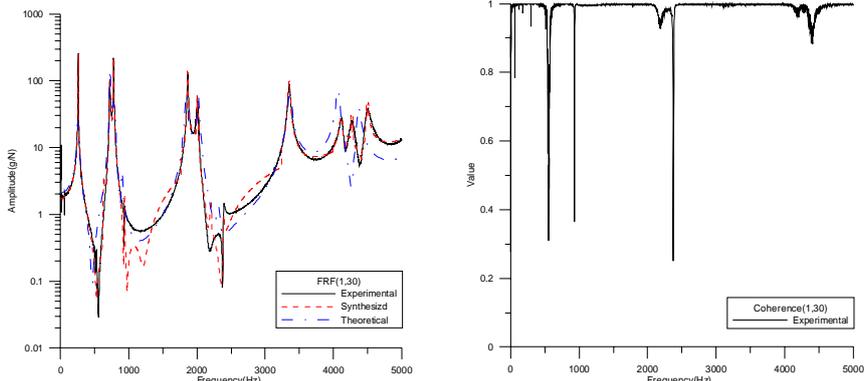
圖 6 與圖 7 的關聯性函數圖，除對應反共振點處因響應較小而導致關聯性函數偏低之外，其餘部份皆接近於 1，代表實驗所得之頻率響應函數可靠度很高。至於麥克風的關聯性函數圖，數值較雜亂，是因為麥克風很容易受環境背景噪音的影響，但整體仍是接近於 1，而且其頻率響應函數圖，對照加速度計的頻率響應函數圖，其對應的峰值仍是相當清楚，所以加速度計與麥克風的實驗品質都相當良好。

表 2 加速度計與麥克風之頻率響應函數重疊圖對照表



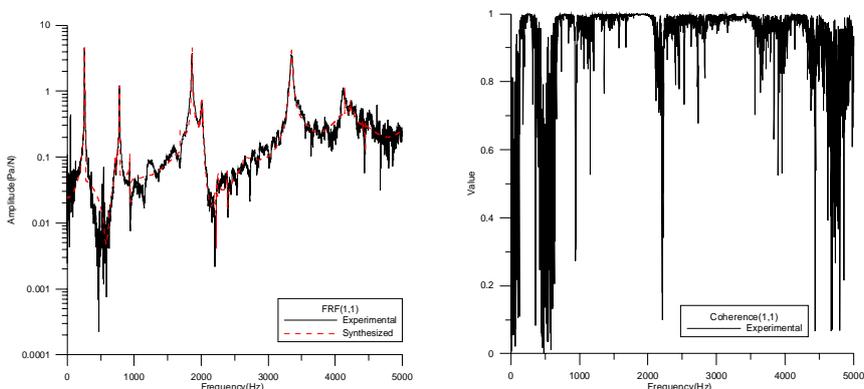


(a) $i=1, j=1$

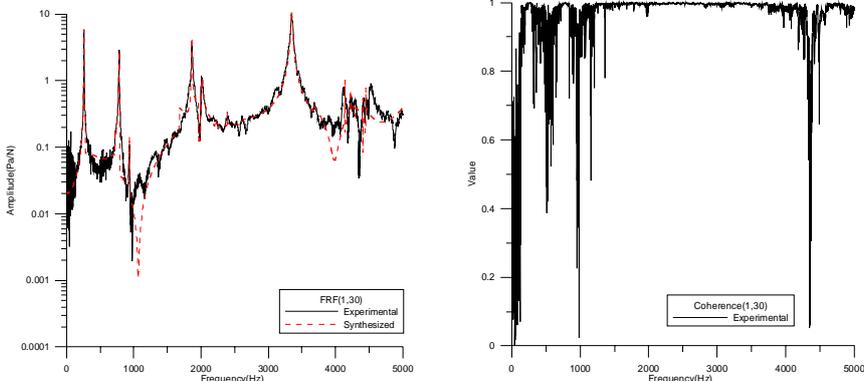


(b) $i=1, j=30$

圖 6 加速度計之 H_{ij} 頻率響應函數與關聯性函數圖



(a) $i=1, j=1$



(b) $i=1, j=30$

圖 7 麥克風之 H_{ij} 頻率響應函數與關聯性函數圖

4.1.2 模態參數

表 3 為 FEA 及 EMA 所得之模態參數對照表，表 4 為 FEA 及 EMA 所得之自然頻率及模態振型對照表，綜合討論如下。

在自然頻率方面，由表 3 中 FEA 與 EMA 自然頻率比對，除了 E-04、E-07、E-10 外，其它自然頻率誤差百分比皆在±1%以內。

而 E-04、E-07 及 EMA 未激發出來的模態，對照表 4，這三個模態在物理意義上為 y 方向彎曲模態，在實驗中因為是使用單軸向加速度計且朝 z 方向固定，在 z 方向以衝擊錘敲擊，不論是加速度計或麥克風所量測到的模態振型是不會呈現 y 方向彎曲模態作動，但模態形式是一樣的，且從表 2 可看出 E-04、E-07 的振幅是很微弱的，因為頻率還不是很高，所以有激發出來，而 EMA 未激發出來的模態，因為已超過 4000Hz 的高頻，所以未激發出模態，而這三個模態因為是 y 方向彎曲模態，理論上影響不大，是可以忽略。

E-09、E-10 這兩個模態振型跟 F-10 是一樣的，因此把 E-09、E-10 歸類在同一個模態，推論此木琴條結構特性在 4000~4300Hz 之間是很相似的。所以整體自然頻率比對誤差是很小的，且有正有負，不是全部偏向正或負，如果誤差皆在正或負，表示所分析的自然頻率往正或負方向偏離，因此自然頻率比對成功。

在模態振型方面，表 3 中的物理意義，以 1st z-bending (r,s) 為例作說明，表示第 1 個 z 方向彎曲模態，括號中前面的數值 r 表示 x 軸有 r 個正負波，後面的數值 s 表示 y 軸有 s 個正負波。而 torsion 表示扭轉模態的意思。一般而言，若實驗與理論的模態振型有良好的關聯性，

則模態保證指標(MAC)值會大於 0.9 以上，若 MAC 值低於 0.05，則表示實驗與理論的模態振型幾乎沒有關聯性，也就是互為直交性。

由表 3 中 MAC 比對結果顯示，以加速度計為感測器之 MAC 值明顯高於以麥克風為感測器之 MAC 值，因為加速度計感測器之振動訊號較明顯，而麥克風感測器較易受環境背景噪音的影響。整體而言，除了 E-04、E-07 的 MAC 值較低，其原因在前項所述為 y 方向彎曲模態所致，其餘的 MAC 值皆趨近於 1，且由表 4 中可明顯看出實驗之模態振型和理論之模態振型是相當吻合的，所以模態振型的比對是成功的。

在阻尼比方面，通常在實驗進行時，為了減少訊號發生洩漏(leakage)，會在頻譜分析儀的設定上加上指數加權函數(exponential window)，但不是所有實驗都需要加，所以在實驗前會先做預測試，由時間域來作判斷。木琴條經敲擊，在時間域中，加速度計與麥克風所量得的訊號在量測時間內很快趨近於零，所以不需要加上指數加權函數，而表 3 中的阻尼比為實驗量測得到真正的阻尼比，因此不須修正阻尼比，在 ANSYS 中分析時，阻尼比並無法獲得，所以在簡諧分析中是以加速度計為感測器實驗求得之阻尼比經平均之後代入，求得如圖 6 的理論頻率響應函數曲線圖。

因為第一個振動模態為木琴條之主頻率，對照表 3 中的自然頻率與表 5 的鋼琴鍵盤對應頻率表，可明確得知木琴條在有限元素分析與實驗模態分析所得之第一個振動模態頻率皆和鋼琴鍵盤上 C4 的頻率是一樣的，表示有限元素分析與實驗模態分析是正確的。

表 3 模態參數對照表

物理意義	FEA		加速度計 EMA					麥克風 EMA				
	Mode	自然頻率 (Hz)	Mode	自然頻率 (Hz)	誤差 (%)	MAC	阻尼比 (%)	Mode	自然頻率 (Hz)	誤差 (%)	MAC	阻尼比 (%)
1 st z-bending (3,1)	F-01	259.899	E-01	259.38	0.200	0.995	0.3219	E-01	259.37	0.204	0.994	0.3275
1 st x-torsion (2,2)	F-02	726.323	E-02	722.72	0.499	0.987	0.5118	E-02	719.95	0.885	0.442	0.4053
2 nd z-bending (4,1)	F-03	789.094	E-03	780.21	1.139	0.990	0.2590	E-03	780.21	1.139	0.958	0.2633
1 st y-bending (1,2)	F-04	899.069	E-04	934.19	-3.760	0.656	0.2474	E-04	934.85	-3.827	0.643	0.2279
3 rd z-bending (5,1)	F-05	1839.9	E-05	1863.6	-1.272	0.980	0.2703	E-05	1863	-1.240	0.960	0.1590
2 nd x-torsion (3,2)	F-06	2026.7	E-06	2008.2	0.921	0.962	0.2827	E-06	2010.7	0.796	0.946	0.4959
2 nd y-bending (4,2)	F-07	2314	E-07	2391	-3.220	0.529	0.2517	E-07	2389.2	-3.147	0.308	0.0989
4 th z-bending (6,1)	F-08	3357.3	E-08	3350.1	0.215	0.982	0.3348	E-08	3347.2	0.302	0.954	0.3013
3 rd y-bending (3,2)	F-09	4022.6	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3 rd x-torsion (4,2)	F-10	4067	E-09	4114	-1.142	0.960	0.5514	E-09	4137.5	-1.704	0.917	0.0132
			E-10	4257.9	-4.483	0.954	0.0900	E-10	4226	-3.762	0.843	0.0301
5 th z-bending (7,1)	F-11	4367.6	E-11	4489.1	-2.707	0.892	0.1946	E-11	4405.4	-0.858	0.770	0.0011

由於在木琴條同點與不同點頻率響應函數圖中，加速度計當感測器之實驗與理論的峰值皆有相當的吻合性，麥克風當感測器與加速度計所量得之自然頻率也相當吻合，顯示有限元素模型與實際結構是有相當的等效性；且在木琴條的模態參數中，自然頻率誤差百分比除了 y 方向彎曲模態之外，其它皆在 ±1% 以內；而 MAC 值除了 y 方向彎曲模態之外，其它皆趨近於 1，表示有限元素模型與實際結構之模態振型是吻合的，故可推論木琴條之模型驗證是成功的。因此，未來可藉由有限元素模型建構不同尺寸之木琴條，以預測其振動自然頻率及木琴條之設計。

4.2 加速度計與麥克風進行實驗模態分析之比較

本實驗分別以加速度計及麥克風當感測器進行實驗模態分析，結果比較如下：

1. 在圖 6 與圖 7 之同點與不同點頻率響應函數圖中，無論是用加速度計當感測器，或是用麥克風當感測器，兩者實驗的頻率峰值皆有相當的吻合性。
2. 在表 2 中，分別使用加速度計與麥克風所量得之自然頻率均相當吻合，而且對照 FEA 第 9 個模態自然頻率，加速度計與麥克風 EMA 均無激發出來，乃因 y 方向彎曲模態且已超過 4000Hz 的高頻之故。
3. 以加速度計為感測器之 MAC 值明顯高於以麥克風為感測器之 MAC 值，因為加速度計感測器之振動訊號較明顯，而麥克風感測器較易受環境背景噪音的影響，因此由麥克風所量測的訊號較為微弱，但由表 4 的模態振型圖仍可確認兩種感測器所得結果之一致性。

表 4 自然頻率及模態振型對照表

FEA			加速度計 EMA			麥克風 EMA		
Mode	自然頻率 (Hz)	模態振型	Mode	自然頻率 (Hz)	模態振型	Mode	自然頻率 (Hz)	模態振型
F-01 (3,1)	259.899		E-01 (3,1)	259.38		E-01 (3,1)	259.37	
F-02 (2,2)	726.323		E-02 (2,2)	722.72		E-02 (2,2)	719.95	
F-03 (4,1)	789.094		E-03 (4,1)	780.21		E-03 (4,1)	780.21	
F-04 (1,2)	899.069		E-04 (1,2)	934.19		E-04 (1,2)	934.85	
F-05 (5,1)	1839.9		E-05 (5,1)	1863.6		E-05 (5,1)	1863	
F-06 (3,2)	2026.7		E-06 (3,2)	2008.2		E-06 (3,2)	2010.7	
F-07 (4,2)	2314		E-07 (4,2)	2391		E-07 (4,2)	2389.2	
F-08 (6,1)	3357.3		E-08 (6,1)	3350.1		E-08 (6,1)	3347.2	
F-09 (3,2)	4022.6		X	X	X	X	X	X
F-10 (4,2)	4067		E-09 (4,2)	4114		E-09 (4,2)	4137.5	
			E-10 (4,2)	4257.9		E-10 (4,2)	4226	
F-11 (7,1)	4367.6		E-11 (7,1)	4489.1		E-11 (7,1)	4405.4	

表 5 鋼琴鍵盤對應頻率表(Hz)

鍵盤	C4	D4	E4	F4	G4	A4	B4
頻率	261	293	329	349	392	440	494

4. 在 Wang[8]中提到採用移動驅動器之方法，實驗所得之模態振型是驅動器的模態振型，可推論本實驗所得之模態振型皆為位移模態振型，所以加速度計與麥克風所量得之模態振型是可以做比較的。
5. 由於在頻率響應函數圖中，以加速度計和麥克風當感測器之實驗所得頻率峰值皆相當吻合，模態振型對應也相當吻合，因此以麥克風當感測器進行實驗模態分析是可行的。

5. 結論

本文首先建立一個木琴條的有限元素模型，接著在實驗模態分析中以衝擊錘當驅動器，分別以加速度計和麥克風為感測器，藉由有限元素分析與實驗模態分析互相比對作模型驗證，並探討以加速度計當感測器進行實驗模態分析的可行性，由以上分析可得到以下結論：

1. 木琴條經有限元素分析與實驗模態分析比對經模型驗證可得到最佳化之木琴條材料參數。
2. 理論模態分析與實驗模態分析所得的模態參數有相當良好的吻合性，且 MAC 比對結果，得知實驗之模態振型和理論之模態振型有相當高的吻合，所以在振動分析方面，木琴條之模型驗證是成功的，因此有限元素模型可以代表木琴條實際結構。
3. 加速度計與麥克風所量得木琴條之頻率峰值皆相當吻合，模態振型對應也相當吻合，因此以麥克風當感測器進行實驗模態分析是可行的。
4. 由於模型驗證成功，未來可藉由有限元素模型建構不同尺寸之木琴條，以預測其振動自然頻率及木琴條之設計，並可進而對聲音與振動特性作探討，本文所分析之實驗方法，可推廣至其它的樂器，建立對應之有限元素模型，將有助於以後對樂器進行振動特性之研究。

6. 參考文獻

- [1] J. Bretos, C. Santamaria and J. A. Moral, 1999, "Finite Element Analysis and Experimental Measurement of Natural Eigenmodes and Random Responses of Wooden Bars Used in Musical Instruments," *Applied Acoustics*, Vol. 56, pp. 141-156.
- [2] V. Doutaut, D. Matignon and A. Chaigne, 1998, "Numerical Simulations of Xylophones. II. Time-Domain Modeling of the Resonator and of the Radiated Sound Pressure," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 104, No.3, pp. 1633-1647.
- [3] P. T. Bundesanstalt, Braunschweig and Germany, 1995, "Practical Tuning of Xylophone Bars and Resonators," *Applied Acoustics*, Vol. 46, pp. 103-127.
- [4] 王栢村，李雨軒，張志偉，2002，「銅鑼振動與聲音特性之探討」，*中華民國振動與噪音工程學會第十屆學術研討會論文集*，第 245-252 頁。
- [5] 王栢村，胡惠文，蘇敬翔，2003，「吉他共鳴箱之振動特性分析」，*ANSYS 2003 台灣區用戶大會暨論文發表會*，雲林，第 71-84 頁。

- [6] 王栢村，蘇集銘，2006，「吉他弦之振動與聲音特性探討」，*中華民國音響學會第十九屆學術研討會論文集*，台南，論文編號：A7。
- [7] 王栢村，林怡馨，2007，「鐵琴片振動特性與聲音關聯性之探討」，*中華民國音響學會第二十屆學術研討會論文集*，台北，論文編號：C5。
- [8] B. T. Wang, 1998, "Structural Modal Testing with Various Actuators and Sensors," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 12, pp. 627-639.

Experimental Modal Analysis and Model Verification of a Xylophone Bar

Bor-Tsuen Wang¹, Wei-Ting Liao²,
¹Professor

²Graduate student

Department of Mechanical Engineering
National Pingtung University of Science and
Technology

ABSTRACT

This work presents the experimental modal analysis (EMA) of a xylophone bar and the model verification of its analytical model. First, the finite element (FE) model for the xylophone bar is constructed to perform theoretical modal analysis (TMA) in order to obtain the natural frequencies and mode shapes. EMA is then carried out for the xylophone bar. In experiments, the impact hammer is used as the actuator, and the accelerometer and microphone are, respectively, used as the sensors. The experimental modal parameters, including natural frequencies, damping ratios and mode shapes can be determined. According to the experimental data, the FE model can be updated to validate the material properties of the xylophone bar. Results show that both TMA and EMA results match very well, and thus the FE model for the xylophone bar is verified successfully. Also, both the accelerometer and microphone applied for EMA results reveal very good agreement in terms of natural frequencies and mode shapes. The use of microphone as the sensor for EMA is feasible. The analytical and experimental approaches can be useful for the vibration characteristics study of percussion instruments.

Keywords: xylophone bar, finite element analysis, experimental modal analysis, model verification.