

## 多自由度系統實體模型驗證及僅自由振動響應之模態分析方法驗證

王栢村<sup>1\*</sup>, 趙天麒<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立屏東科技大學機械工程學系教授

<sup>2</sup> 國立屏東科技大學機械工程學系研究生

國科會計畫編號：NSC-97-2221-E-020-007

### 摘要

本文主要是採用有限元素分析配和實驗模態分析，對一多自由度系統之實體進行模型驗證，並以僅自由振動響應之模態分析(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)方法對多自由度系統實體進行驗證。首先以對多自由度系統進行理論振動分析，以獲得理論之模態參數，並再以有限元素分析之模態分析與簡諧響應分析，分別可獲得雙自由度系統之自然頻率和模態振型與頻率響應函數，並與理論振動分析及實驗模態分析所獲得之模態參數進行比對，進而以 MAFVRO 方法對多自由度系統進行驗證。實驗結果成功的驗證了多自由度系統之實體，以及成功的應用 MAFVRO 方法來驗證雙自由度系統之實體，未來可應用於其他連續系統。

**關鍵字：**多自由度系統，自由振動響應，模態分析，自然頻率，模態振型

## Model Verification of MDOF System via Modal Analysis by Free Vibration Response Only

Bor-Tsuen Wang<sup>1\*</sup>, Tien-Chi Chao<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Professor, Department of Mechanical Engineering, National Pingtung University of Science and Technology

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering National Pingtung University of Science and Technology.  
NSC Project No.: NSC-97-2221-E-020-007

### Abstract

This work adopts finite element analysis (FEA) and experimental modal analysis (EMA) to perform model verification of a multiple degree-of-freedom (MDOF) system. The modal analysis by free vibration response only (MAFVRO) method is also used to validate the developed method experimentally. First, the theoretical solution for an MDOF system is derived for its modal parameters. The FEA for modal and harmonic analyses are, respectively, carried out to obtain natural frequencies and mode shapes as well as frequency response functions (FRFs). The MAFVRO method is also conducted and validated for the MDOF system. Results show that the physical model of the MDOF system can be well validated by the FEA, EMA and MAFVRO. This work demonstrates the practical application of MAFVRO method to EMA and the potential feasibility for future applications in continuous structures.

**Keywords :** multiple degree-of-freedom (MDOF) system, free vibration response, modal analysis, natural frequency, mode shape

---

\*Professor, Corresponding Author, Email:wangbt@mail.npust.edu.tw

## 一、前言

對於時代快速的變遷，工業產業快速的發展，各種產品及設備都趨於微小化、精密化與快速化，仍而，振動問題會導致機械設備的損壞以及產品的精度會受之影響，所以對於振動現象的產生，需加以分析探討與研究。

在物體結構之模型驗證方面，王和曹[1]結合了有限元素分析與實驗模態分析，對一自由邊界板進行模型驗證，其中探討了利用不同元素形式來架構之平板有限元素模型，結果表示經由二種分析結果互相比較及驗證，達到模型驗證之目的，成功的利用有限元素分析及實驗模態分析之結合，能對結構物進行模型驗證之理念及應用。王等人[2]採用有限元素分析及實驗模態分析，對激振器之音圈結構進行模型驗證，並以二種分析結果之模態參數與頻率響應函數進行比較驗證，成功的確認了有限元素模型之正確性，並達成模型驗證之目的，日後可針對模型進行設計變更。Jafari and Bagheri[3]對一圓筒狀的殼結構進行理論數值分析方法、實驗模態分析與有限元素分析，並分別以不同之元素型式來架構圓筒狀殼結構的模型，經由三種不分析結果互相比較驗證，成功對圓筒狀的殼結構進行模型驗證，也驗證利用數值分析也能得到圓筒狀的殼結構之模態參數。

Devriendt and Guillaume[4]發展了僅量測系統輸出之傳輸比，就可獲得系統之模態參數之方法，並以夾持邊界樑來進行實驗驗證，成功的證實所發展之此方法的可行性。除此之外，Wang and Cheng[5]發展一套嶄新之模態參數擷取方法，僅自由振動響應之模態分析(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)方法，並撰寫為程式，針對比例阻尼結構進行分析，並且以數值微積分方法來模擬不同感測器，使得 MAFVRO 方法可適用於不同感測器之模式，且以 3 個及 10 個自由度系統為例，成功驗證此方法之適應性及可行性。王等人[6]更進一步發展 MAFVRO 方法，以一般化阻尼結構進行分析，且將其撰寫為程式，並以 3 個及 10 自由度系統之理論分析結果與數值分析結果進行比較，成功驗證此方法之可行性。

王等人[7]對 MAFVRO 方法應用於連續系統進行探討，以理論推導獲得懸臂樑結構之模態參數與自由振動響應，並假設獲得之理論自由振動響應為實驗量測獲得之響應帶入發展之 MAFVRO 方法中預測懸臂樑結構模態參數，最後成功驗證 MAFVRO 方法可應用於連續系統結構。

本文之主要之目的在對一多自由度系統之

實體進行模型驗證，並應用 MAFVRO 方法[5-7]來驗證雙自由度系統之實體模型。

## 二、雙自由度系統之模型驗證

本文針對自製之雙自由度系統，進行模型驗證，雙自由度系統之實體圖如圖 1(a)所示，其雙自由度系統之質量與彈簧常數如表 1 所示，以理論分析、有限元素分析、實驗模態分析及僅自由振動響應之模態分析方法來進行對此實體結構之模型驗證，如圖 2 所示為模型驗證之流程圖。

### 2.1 理論分析

對如圖 1(b)所示之雙自由度系統進行理論模態分析，一雙自由度系統之運動方程式以矩陣形式表示：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]x = \{f(t)\} \quad (1)$$

其中，

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

若考慮無阻尼系統之自由振動分析，式(1)化簡為：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]x = \{0\} \quad (7)$$

令

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

將  $[M]$ ， $[K]$  代入下式：

$$\det([K] - \omega^2[M]) = \begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} \quad (9)$$

化簡並求解可得二根：

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 K_{22} + m_2 K_{11}}{m_1 m_2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{m_1 K_{22} + m_2 K_{11}}{m_1 m_2} \right)^2 - 4 \frac{K_{11} K_{22} K_{12} K_{21}}{m_1 m_2}} \quad (10)$$

其中，

$\omega_1$  及  $\omega_2$  分別為雙自由度系統之二個自然頻率。

其  $\{\Phi_1\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{1,1} \\ \Phi_{1,2} \end{Bmatrix}$  及  $\{\Phi_2\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{2,1} \\ \Phi_{2,2} \end{Bmatrix}$  為對應之模態振型向量。

## 2.2 有限元素分析

本文採用有限元素分析軟體 ANSYS 來對如圖 1(a)所示之雙自由度系統結構進行有限元素分析, 其多自由度系統之數學模型示意圖如圖 1(b)所示, 並規劃出其對應之理念有限元素模型如圖 1(c)所示, 再由 ANSYS 建構出多自由度系統結構之有限元素模型, 並進行分別模態分析及簡諧響應分析, 以獲得多自由度系統結構之自然頻率、模態振型與頻率響應函數。其有限元素模型建構說明如下:

(1) 元素形式:

- I. 多自由度系統之彈簧元件採用三維彈簧阻尼元素(COMBIN14)來建構。
- II. 多自由度系統之質塊元件採用三維質量元素(MASS21)來建構。

(2) 元素分割:

- I. 共有三個節點與五個元素, 如圖 1(c)所示。

(3) 位移限制:

- I. 如圖 1(c)所示, 定義 1 號節點之所有自由度為零, 以及 2 號和 3 號節點 X 方向自由度為零。

(4) 負荷條件:

- I. 模態分析: 不需設定。
- II. 簡諧響應分析: 如圖 1(c)所示, 於 3 號節點施於一單位向上牛頓之力, 即  $f_{3y} = 1N$ 。

## 2.3 實驗模態分析

實驗模態分析之本意為獲得結構系統之動態特性, 即模態參數。圖 3 為多自由度系統之實驗架構圖, 圖 4 為實際實驗之量測圖, 針對此多自由度系統進行實驗模態分析, 利用衝擊錘對多自由度系統之  $m_2$  質塊元件以一垂直向上之衝擊力激振, 並以加速度計為感測計, 且同時量測多自由度系統  $m_1$  與  $m_2$  二個質塊元件之響應訊號, 此訊號由頻譜分析儀(SigLab)並經過快速傅立葉轉換後, 求得多自由度系統之頻率響應函數與關聯性函數, 再由後處理軟體 ME'scopeVES 進行曲線嵌合(curve-fitting), 以獲得多自由度系統之實驗模態參數, 即自然頻率、模態振型和阻尼比。

## 2.4 僅自由振動響應之模態分析

本文利用 MAFVRO(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)方法[5-7]實際對多自由度系統進行分析, 圖 5 為 MAFVRO 方法之理念示意圖。

### 2.4.1 比例阻尼 MAFVRO 方法

考慮一比例阻尼多自由度系統其運動方程式如下:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

對應之初始條件如式(30)

$$\begin{cases} \{x(0)\} = \{x_0\} \\ \{\dot{x}(0)\} = \{v_0\} \end{cases} \quad (2)$$

且

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3)$$

由正向模態分析, 假設外力向量  $\{f\}$  以及系統阻尼  $[C]$  均為 0, 可得特徵值問題如下:

$$[K]\{X\} = \omega^2[M]\{X\} \quad (4)$$

或

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \omega^2\{X\} \quad (5)$$

若系統為比例阻尼且無外力作用下, 則系統之運動方程式可表示如下:

$$[M]\{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (6)$$

若系統之  $\{\ddot{x}\}$ ,  $\{\dot{x}\}$  與  $\{x\}$  響應為已知, 可解式(5)中之特徵值問題, 求得特徵值與特徵向量, 也就是系統之自然頻率與模態振型。

### 2.4.2 一般化阻尼 MAFVRO 方法

多自由度系統一般化阻尼 MAFVRO 分析方法, 若系統為一般化組尼, 則  $[C] \neq \alpha[M] + \beta[K]$ , 需導入一平衡方程式並重新整理, 其運動方程式可表示如下:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \\ [B] &= \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \\ \{P(t)\} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \\ \{y(t)\} &= \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \end{aligned} \quad (8)$$

將式(8)帶入(7)式後整理可得式(9)如下:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{P(t)\} \quad (9)$$

對系統進行模態分析, 令作用於系統之外力為 0, 並令  $\{y(t)\}$  如(10)式

$$\{y(t)\} = \{Y\}e^{\lambda t} \quad (10)$$

將式(10)帶入式(9)可以得到下式

$$(\lambda[A] + [B])\{Y\} = \{0\} \quad (11)$$

在此  $\lambda$  與  $\{Y\}$  為未知且待求, 由於  $e^{\lambda t}$  不為 0, 因此可將式(11)整理成下式

$$-[A]^{-1}[B]\{Y\} = \lambda\{Y\} \quad (12)$$

由式(12)可以發現為矩陣之特徵值問題, 解此特徵值問題可求得特徵值與特徵向量對應於系統及模態振型與自然頻率, 並且在一般化阻尼多自由度系統僅

自由振動響應之模態分析中假設每個自由度之  $x_r(t)$ 、 $\dot{x}_r(t)$ 、 $\ddot{x}_r(t)$  皆可得知，將位移、速度、加速度響應矩陣代入式(8)，並假設外力為零，整理化簡可得下式：

$$-[A]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \dot{X} \\ X \end{bmatrix}_{2n \times N_i} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \\ X \end{bmatrix}_{N_i \times 2n}^{-1} \quad (13)$$

若式(13)可求得系統之輸出響應矩陣，則可帶入式(12)求得系統之自然頻率與模態振型向量，將其特徵值為複數可表示如下：

$$\lambda_r = R_e + iI_m = -\xi_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (14)$$

可解得：

$$\bar{\omega}_r = \sqrt{R_e^2 + I_m^2} \quad (15)$$

又求得之特徵向量如下式：

$$\bar{\xi}_r = \frac{-R_e}{\sqrt{R_e^2 + I_m^2}} \quad (16)$$

$$\{\bar{Y}_r\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{X}_r\} \\ \{\bar{X}_r\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

系統之自然頻率  $\bar{\omega}_r$ 、阻尼比  $\bar{\xi}_r$  及模態振型向量  $\{\bar{Y}_r\}$  即可求得，其中， $\{\bar{X}_r\}$  為以 MAFVRO 方法求得結構之位移模態振型向量， $\{\bar{X}_r\}$  為以 MAFVRO 方法求得結構之速度模態振型向量。

### 三、結果與討論

對於多自由度系統實體分別進行了理論模態分析、有限元素分析、實驗模態分析及 MAFVRO 方法，本節綜合討論如下：

#### 3.1 時間域下之衝擊力與響應

利用 MAFVRO 方法，來進行模態參數之擷取，在對雙自由度系統結構進行實驗模態分析時，所獲得如圖 6(a-c)所示之結果，在使用 MAFVRO 方法時，所擷取之響應資料為衝擊時間結束後之響應，將此段響應資料給予 MAFVRO 方法，即可得到雙自由度系統之模態參數，如圖 6(a)所示，將擷取衝擊時間結束後之響應資料，此衝擊時間結束時間約在 0.0075 秒，即擷取圖 6(a,b) 在 0.0075 秒之後的響應資料給予 MAFVRO，即可求出模態參數。

#### 3.2 頻率響應函數與關聯性函數

圖 6(d-f) 為自身功率頻譜密度函數，由圖 6(d) 可看出  $G_{ff}(f)$  之曲線為一平滑水平線，且此線 db 值皆在正負 20dB 內，表示實驗品質良好，其圖 6(e,f) 分別為  $G_{a1a1}(f)$  與  $G_{a2a2}(f)$ 。

圖 7 為敲擊實際多自由度系統結構之同點與不同點之頻率響應函數圖，由圖 7(a) 可得知，在同點之頻率響應函數中，每二個峰值間皆有出現一反共振點，此現象非常正確，且實驗所得的頻率響應函數之與合成的頻率響應函數之峰值對

應相當吻合，表示曲線嵌合成功，並比對實驗與理論之頻率響應函數，在前二個峰值之吻合度也相當不錯，顯示有限元素模型能代表實際結構已具有相當之程度，在圖 7(b) 中，可看到實驗之頻率響應函數所量到之峰值在 1000 Hz 內有七個較明顯之峰值出現，推測可能原因為量測到  $m_2$  質塊元件之側向運動，但對於主要之前二個峰值而言，實驗與合成之峰值吻合度還算不錯。

圖 8 為敲擊實際多自由度系統結構之同點與不同點之關聯性函數圖，關聯性函數值愈接近 1，其代表實驗品質為非常良好，且可信度愈高，由圖中可得知，除了反共振點之關聯性函數會下降之正常現象外，其關聯性函數值皆非常接近於 1，表示實驗品質相當良好。

#### 3.3 自然頻率比較、模態振型

表 2 為有限元素分析與實驗模態分析所獲得之自然頻率比較表，由表中可看出多自由度系統進行實驗模態分析在頻率 1000Hz 內有四個模態的出現，此原因為自製之雙自由度系統之品質不佳所造成，推測在實驗時可能有量取到雙自由度系統之側向運動所致，

在不考慮實驗模態分析之第三模態與第四模態的情況下，有限元素分析與實驗模態分析之第一模態與第二模態之自然頻率值相當接近，其第一模態自然頻率誤差在 5.45% 稍高外，其第二模態自然頻率在 0.93%，可得知自然頻率之比對相當成功。

在有限元素分析分析之模態分析中，主要在求得其模態參數，其所求得之模態振型向量如下：

$$[\Phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\}] = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.8347 \\ 6.2132 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 6.2381 \\ -3.8194 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

可由模態振型向量去推測出其模態振型之結構振動特性。

利用模態品質保證指標 (Modal Assurance Criterion, MAC) 來對雙自由度系統之實驗與理論分析之模態振型，做一指標性的判讀，若 MAC 值愈接近於 1，則代表實驗與理論二者之模態振型具有一致性，若 MAC 值低於 0.05，則代表二者之模態振型有良好之正交性。由表 4 中可得知，除第一模態 MAC 值為 0.7575 稍低外，第二模態之 MAC 值為 0.9606，其整體而言 MAC 比對之結果還算可以。

表 5(a) 為時間域之比例阻尼與一般化阻尼 MAFVRO 方法之模態參數表與理論模態分析 (TMA) 和有限元素分析 (FEA) 以及實驗模態分析 (EMA) 之自然頻率比較，表 5(b) 為比例阻尼與一般化阻尼 MAFVRO 方法與理論模態分析和有限

元素分析以及實驗模態分析之誤差比較，由表 5(b)中可看比例阻尼 MAFVRO 方法與實驗模態分析之第一模態之誤差在-2.99%較顯得大外，第二模態之誤差值為 0.13%，誤差非常小，而在一般化阻尼 MAFVRO 方法與實驗模態分析之第一模態與第二模態誤差值 12.07%與-14.32%，誤差較大。

### 結論

本文主要是採用有限元素分析配和實驗模態分析，對一多自由度系統之實體進行模型驗證，並以 MAFVRO 方法對多自由度系統實體進行驗證，並在多自由度系統之實體進行模型驗證的部份，成功的驗證了多自由度系統之實體，並且也成功的以 MAFVRO 方法驗證了多自由度系統之實體，本文主要之結論如下：

1. 在理論振動分析與有限元素分析中，二者分析多自由度系統實體之模態參數完全相同，顯示出有限元素分析之準確度相當高。
2. 在實驗模態分析中，實驗結果在 1000Hz 前有四個峰值的出現，但實際多自由度系統之模態為第一、二模態，其此現象不符合雙自由度系統之理論模型，表示自製之多自由度系統有待改善之空間。
3. 在模型驗證中，有限元素分析與實驗模態分析之自然頻率，其第一模態自然頻率誤差在 5.45%稍高外，其第二模態自然頻率在 0.93%，整體自然頻率比對還算良好。
4. 在模型驗證中，有限元素分析與實驗模態分析之模態振型相似度不錯，MAC 值在第一模態低於 0.8 外，第二模態之 MAC 值高達 0.96，整體而言振型對應還算不錯，整體而言模型驗證算成功。
5. 在多自由度系統應用 MAFVRO 方法驗證結果中，時間域之比例阻尼 MAFVRO 方法與實驗模態分析之自然頻率誤差值很小，其第一模態與第二模態之誤差值分別在 -2.99% 與 0.13%，顯示利用時間域之比例阻尼 MAFVRO 方法能驗證出雙自由度系統實體結構。

### 誌謝

本論文之國科會計畫編號為 NSC-97-2221-E-020-007，非常感謝國科會之支援，使得本計畫得以順利進行，特此致上感謝之意。

### 參考文獻

- [1] 王栢村，曹文昌，2002，「應用有限元素分析與實驗模態分析之結構模型驗證」，第十屆振動與噪音工程學會研討會，台北，第 131-138 頁。
- [2] 王栢村，林政皇，李昆達，1993，「激振器音圈結構之實驗模態分析與模型驗證」，第二十屆機械工程研討會，台北，第 529-536 頁。
- [3] Jafari, A. A., and Bagheri, M., 2006, "Free Vibration of Non-Uniformly Ring Stiffened Cylindrical Shells Using Analytical, Experimental and Numerical Methods," Thin-Walled Structures, Vol. 44, pp. 82-90.
- [4] Devriendt, C., and Guillaume, P., 2007, "The Use Of Transmissibility Measurements in Output-Only Modal Analysis," Mechanical System and Signal Processing, Vol. 21, pp. 2689-2696.
- [5] Wang, B. T., and Cheng, D. K., 2008, "Modal Analysis MDOF System by Using Free Vibration Response Data Only," Journal of Sound and Vibration, Vol. 311, pp. 737-755.
- [6] 王栢村，鄭登凱，趙天麒，2008，「一般化阻尼系統之僅自由振動響應模態分析方法之發展與應用」，中國機械工程學會第二十五屆全國學術研討會，彰化。
- [7] 王栢村，鄭登凱，趙天麒，2008，「僅自由振動響應之模態分析方法應用於連續系統」，中國機械工程學會第二十五屆全國學術研討會，彰化。

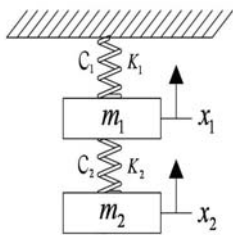
### 附錄

表 1 雙自由度系統之質量與彈簧常數

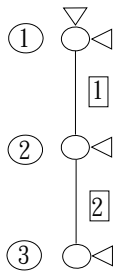
質塊質量(kg)		彈簧常數(N/m)	
$m_1$	0.01865	$k_1$	862.4
$m_2$	0.01880	$k_2$	862.4



(a) 實體圖



(b) 數學模型示意圖



(c) 理念有限元素模型

圖 1 雙自由度系統(續)

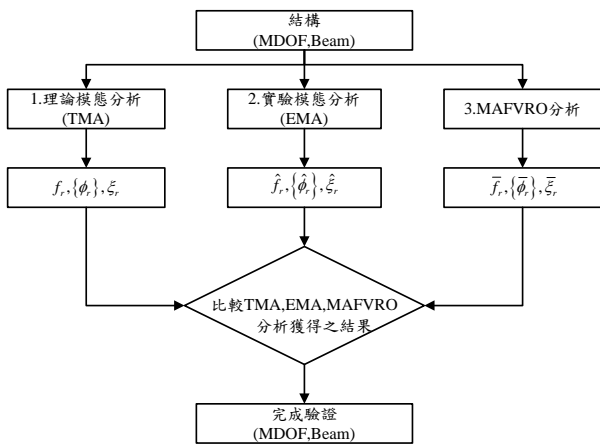


圖 2 模型驗證流程圖

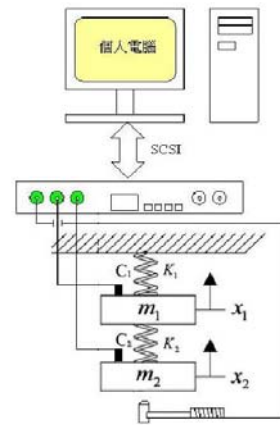


圖 3 雙自由度系統之實驗架構圖

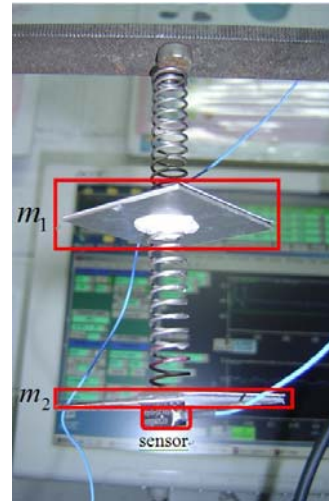


圖 4 實際實驗之量測圖



圖 5 MAFVRO 方法之理念示意圖

表 2 有限元素分析與實驗模態分析之自然頻率比較表

Mode \ Method	Mode-1 (Hz)	Mode-2 (Hz)	Mode-3 (Hz)	Mode-4 (Hz)
EMA	20.00	54.80	361.0	711.0
FEA	21.09	55.31	---	---
Err(%)	5.45	0.93	---	---

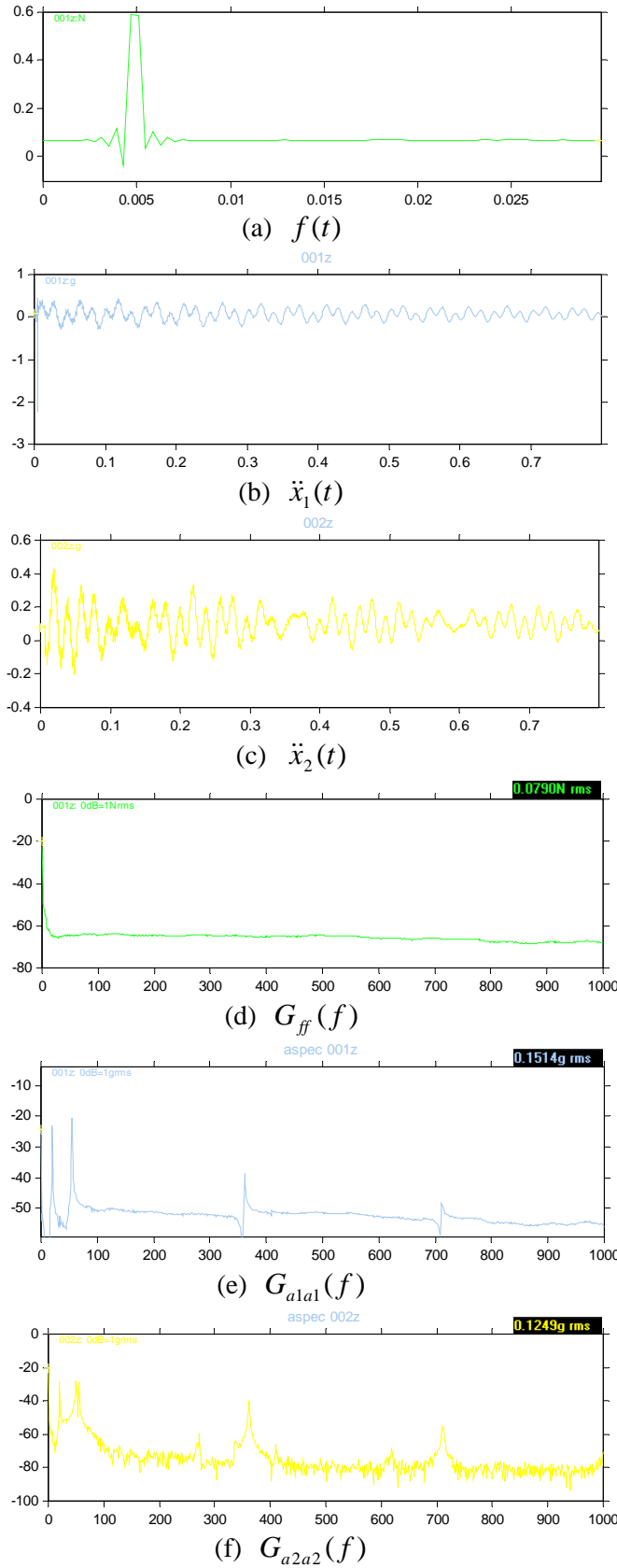


圖 6 實驗量測結果圖

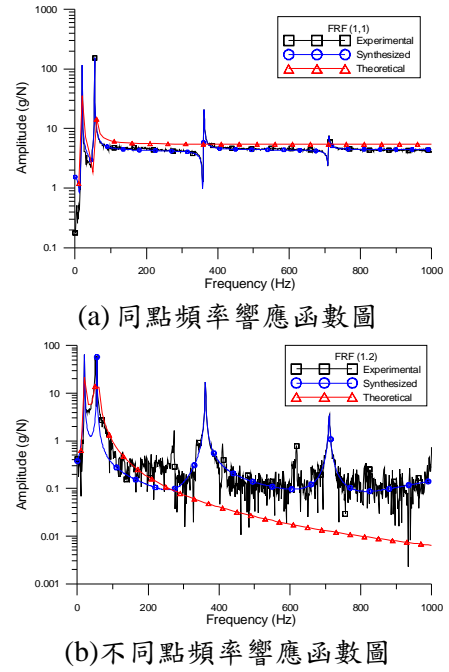


圖 7 同點及不同點之理論、實驗與合成頻率函數

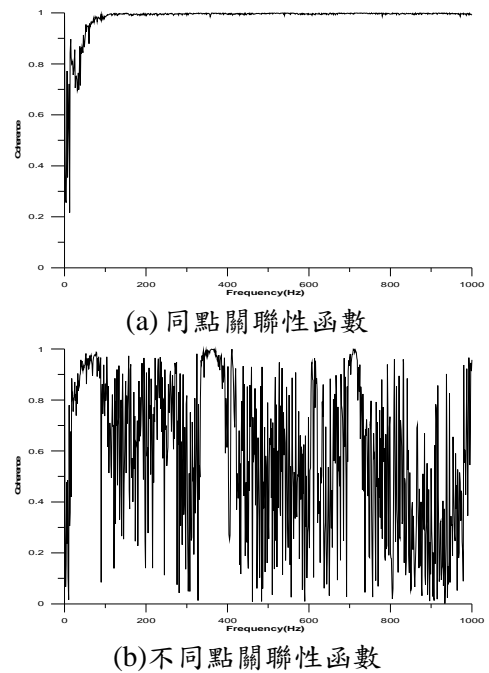


圖 8 實驗之同點及不同點關聯性函數

表 4 MAC

MAC		FEA	
		Mode1	Mode 2
EMA	Mode 1	0.7575	0.2455
	Mode 2	0.0407	0.9606

表 5 時間域之比例阻尼與一般化阻尼 MAFVRO  
方法之模態參數表

(a) 自然頻率之比較

Mode	Mode-1(Hz)	Mode-2(Hz)
TMA	21.09	55.31
FEA	21.09	55.31
EMA	20.00	54.80
MAFVRO(比例阻尼)	19.402	54.875
MAFVRO(一般化阻尼)	22.414	46.952

(b) 自然頻率誤差之比較

Mode	Mode-1(Hz)	Mode-2(Hz)
MAFVRO(比例阻尼) vs. TMA	-8.00	-0.78
MAFVRO(比例阻尼) vs. FEA	-8.00	-0.78
MAFVRO(比例阻尼) vs. EMA	-2.99	0.13
MAFVRO(一般化阻尼) vs. TMA	6.27	-15.11
MAFVRO(一般化阻尼) vs. FEA	6.27	-15.11
MAFVRO(一般化阻尼) vs. EMA	12.07	-14.32