

## 僅自由振動響應之模態分析方法應用於連續系統

王栢村<sup>1</sup>、鄭登凱<sup>2</sup>、趙天麒<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 國立屏東科技大學機械工程學系教授

<sup>2</sup> 國立屏東科技大學機械工程學系研究生

國科會計畫編號：NSC-97-2221-E-020-007

E-mail: wangbt@mail.npust.edu.tw

### 摘要

本文主要是應用一嶄新之模態參數擷取方法，僅自由振動響應之模態分析(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)方法，利用此MAFVRO方法應用於連續系統結構，以驗證其可行性。文中以懸臂樑為例，利用理論暫態響應分析所獲得懸臂樑之自由振動響應代入MAFVRO方法以預測懸臂樑結構之模態參數，並以理論模態分析所獲得之模態參數進行比對，以驗證MAFVRO方法可應用於樑結構。透過MAFVRO方法可如同傳統實驗模態試驗，能成功預測獲得連續系統之模態參數，未來可應用MAFVRO方法於結構之健康監測或是破壞預測等應用。

關鍵字：模態參數擷取方法，自由振動響應，懸臂樑，連續系統。

### 1. 前言

目前時代工業產業發展快速，各種產品及設備都趨於微小化、精密化與快速化，仍而，振動問題會導致機械設備的損壞及產品精度受之影響，其唯有瞭解結構系統之動態特性，獲取結構之模態參數，方能解決振動問題。

近年來為改善傳統EMA之限制，所謂操作模態分析(operational modal analysis, OMA)；僅輸出之模態分析(output-only modal analysis, OOMA)；自然輸入模態分析(natural input modal analysis, NIMA)等方法成為模態分析領域主要之課題。

關於結構於自由振動響應下之模態分析，Zhou及Chelidze[1]，該文基於平順直交分解(Smooth orthogonal decomposition, SDD)方法，假設可量測系統無外力作用之自由振動響應，由其方法可同時求得離散系統之自然頻率及模態振型。Feeng及Kappagantu[2]考慮一線性多自由度離散系統，引用適直交分解法(Proper Orthogonal Decomposition, POD)，以理論分析可由系統之自由度振動響應得到模態振型向量，獲得證明。

Han及Feeng[3]更進一步以POD方法求得適直交模態(Proper Orthogonal Mode, POM)此POM實際為系統之正交模態(normal modes)，不過此法最大限制在

質量矩陣必須與單元矩陣(identity matrix)成比例。Feeng及Liang[4]再以PDD相同方法擴展應用到受隨機激振下振動系統之模態分析，以數值分析方式證明了離散系統及連續系統，如樑結構之適用性，確實可求得系統線性自然模態。

Azeez及Vakakis[5]也採用POD或KLD方法分別探討樑及轉子系統於振動衝擊下求得系統模態，更應用於基於振動響應之即時破壞偵測。Kerschen及Golinval[6]也發展基於POD由系統輸出響應擷取模態參數，同時探討了無阻尼、具阻尼系統於自由振動與簡諧激振響應之模態分析方法，也證明由實務量測之數位化離散信號求得模態參數之可行性。

Wang and Cheng[7]發展一套嶄新之模態參數擷取方法，僅自由振動響應之模態分析(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)方法，並撰寫為程式，針對比例阻尼結構進行分析，並且以數值微積分方法來模擬不同感測器，使得MAFVRO方法可適用於不同感測器之模式，且以3個及10個自由度系統為例，成功驗證此方法之適應性及可行性。王及鄭[8]更進一步發展MAFVRO方法，以一般化阻尼結構進行分析，且將其撰寫為程式，並以3個及10自由度系統之理論分析結果與數值分析結果進行比較，成功驗證此方法之可行性。

本文應用MAFVRO方法對連續系統進行探討，其中顯示MAFVRO方法之優點為所建立之數值方法更為簡易直接、破除待測物需靜止之限制以及省去昂貴之頻譜分析儀等量測設備，本文首先以理論推導獲得懸臂樑結構之模態參數與自由振動響應，並假設獲得之理論自由振動響應為實驗量測獲得之響應帶入發展之MAFVRO方法中預測懸臂樑結構模態參數。最後比較理論模態分析與MAFVRO方法所獲得之模態參數結果，以驗證發展之方法可應用於連續系統結構。

本文架構如下：第一部分為理論分析，分別為樑結構側向振動模態分析與樑結構側向振動暫態響應分析，第二部分MAFVRO方法之概念性說明，第四部分為結果討論，探討MAFVRO方法應用於連續系統求得模態參數之可行性，第五部分為結論。

## 2. 理論分析

### 2.1 樑結構側向振動模態分析

考慮一樑結構示意圖如圖1所示。根據牛頓第二運動定律可以推导出懸臂樑結構之運動方程式如下式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = f(x, t) \quad (1)$$

其樑結構之幾何參數為：長度 $L$ 、截面積 $A$ 、截面積慣性矩 $I$ ，樑結構之材料參數為：密度 $\rho$ 、楊氏係數 $E$ 、結構阻尼 $C$ 。在(1)式中 $w(x, t)$ 為樑結構之側向位移， $f(x, t)$ 為作用於樑結構之外力，系統有兩初始條件分別為初始位移與初始速度，表示如下式：

$$\begin{cases} w(x, t=0) = w_0(x) \\ \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{w}_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

以一固定邊界與自由邊界如下式：

$$\begin{cases} w(x, t) = 0 \\ \theta(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ V(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} M(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

為求得系統直交模態，假設作用於系統之外力為0，並忽略系統之阻尼，故可將式(1)改寫成下式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

由分離變數法可令

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (6)$$

將式(4)帶入式(5)並重新整理後，可解得下式：

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (7)$$

$$\phi(x) = A_1 \sin \alpha x + A_2 \cos \alpha x + A_3 \sinh \alpha x + A_4 \cosh \alpha x \quad (8)$$

在式(7)與式(8)中 $A, B$ 可以透過初始條件解得，而 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 可以透過邊界條件求得。對懸臂樑結構而言假設在 $x=L$ 為固定端，其側向位移及斜率為零，在為自由端，其彎曲力矩及剪力為零，邊界條件可寫成如下：

$$x=0, \begin{cases} w(0, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$x=L, \begin{cases} EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \right|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\phi(0) = 0 \quad (11)$$

$$\phi'(0) = 0 \quad (12)$$

$$\phi''(L) = 0 \quad (13)$$

$$\phi'''(L) = 0 \quad (14)$$

將邊界條件式(11)-(14)帶入式(8)可以解得特徵方程式如下：

$$1 + \cos \alpha L \cosh \alpha L = 0 \quad (15)$$

特徵值 $\alpha L$ 透過數值解析求得，且懸臂樑結構之自然頻率表示如下：

$$\omega_r = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \alpha_r^2 \quad (16)$$

模態振型函數如下：

$$\phi_r(x) = -A_r [\sin \alpha_r x - \sinh \alpha_r x + \sigma_r (\cosh \alpha_r x - \cos \alpha_r x)] \quad (17)$$

對於懸臂樑結構而言

$$m_r = \rho A L \quad (18)$$

現在重新定義一正交化之模態振型函數如下式：

$$\hat{\phi}_r(x) = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \phi_r = \sqrt{\frac{1}{\rho A L}} \phi_r(x) \quad (19)$$

因此正交化之模態振型函數可表示如下：

$$\hat{\phi}_r(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho A L}} [\cosh \alpha_r x - \cos \alpha_r x - \sigma_r (\sinh \alpha_r x - \sin \alpha_r x)] \quad (20)$$

則模態分析所獲得之阻尼比表示如下：

$$\xi_r = \frac{c}{2\rho A \omega_r} = \frac{\alpha}{2\omega_r} \quad (21)$$

### 2.2 樑結構側向振動暫態響應分析

由擴充原理可知系統之響應為模態振型函數對時間函數之線性組合，因此懸臂樑之側向位移響應函數可以表示成下式：

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) q_r(t) \quad (22)$$

將上式帶入式(1)得下式：

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 \phi_r}{dx^2} \right] q_r + \sum_{r=1}^{\infty} \rho A \phi_r \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{\infty} c \phi_r \dot{q}_r = f(x, t) \quad (23)$$

由正交化特性，並且對於 $r=s$ 而言上式可以表示成下式：

$$\ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = N_r(t), \quad r=1, 2, \dots \quad (24)$$

其中，

$$N_r(t) = \int_0^L f(x, t) \phi_r(x) dx \quad (25)$$

在式(24)中 $q_r(t)$ 為模態座標， $N_r(t)$ 為模態外力。為求解式(24)需要將初始條件 $q_r(0)$ 代入並得下式：

$$q_r(0) = \int_0^L \rho A \phi_r(x) w_0(x) dx = q_{r0} \quad (26)$$

同理對於初始速度而言可得到下式：

$$\dot{q}_r(0) = \int_0^L \rho A \phi_r(x) \dot{w}_0(x) dx = \dot{q}_{r0} \quad (27)$$

考慮模態座標 $q_r(t)$ 為次阻尼之狀況時，解得之模態振型座標可表示成下式：

$$q_r(t) = e^{-\xi_r \omega_r t} \left[ q_{r0} \cos \omega_{dr} t + \frac{\dot{q}_{r0} + \xi_r \omega_r q_{r0}}{\omega_{dr}} \sin \omega_{dr} t \right] + \int_0^t N_r(t) h_r(t-\tau) d\tau \quad (28)$$

在上式 $\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$ ， $h_r(t) = \frac{1}{\omega_{dr}} e^{-\xi_r \omega_r t} \sin \omega_{dr} t$ ，當模

態座標 $q_r(t)$ 已知，模態振型函數也已知，即可解出式(22)，獲得時間域下懸臂樑之側向自由振動響應，完

成懸臂樑結構之暫態響應分析。

### 3. MAFVRO方法

本文應用MAFVRO方法來獲得結構系統之模態參數，以下將分為兩小節分別說明比例阻尼MAFVRO方法與一般化阻尼MAFVRO方法。

#### 3.1 比例阻尼MAFVRO方法

考慮一比例阻尼多自由度系統其運動方程式如下：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (29)$$

對應之初始條件如式(30)

$$\begin{cases} \{x(0)\} = \{x_0\} \\ \{\dot{x}(0)\} = \{v_0\} \end{cases} \quad (30)$$

且阻尼矩陣 $[C]$ 與質量矩陣 $[M]$ 及勁度矩陣 $[K]$ 呈一比例關係如下：

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (31)$$

由正向模態分析，假設外力向量 $\{f\}$ 以及系統阻尼 $[C]$ 均為0，可得特徵值問題如下：

$$[K]\{X\} = \omega^2[M]\{X\} \quad (32)$$

或

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \omega^2\{X\} \quad (33)$$

若系統為比例阻尼且無外力作用下，則系統之運動方程式可表示如下：

$$[M]\{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (34)$$

將式(34)重新整理且中加速度、速度以及位移向量整理成一邊，表示如下：

$$[M]^{-1}[K] = -(\{\ddot{x}\} + \alpha\{\dot{x}\})(\{x\} + \beta\{\dot{x}\})^{-1} \quad (35)$$

將上式代入式(33)取代 $[M]^{-1}[K]$ ，可得特徵值問題如下：

$$(\{\ddot{x}\} + \alpha\{\dot{x}\})(\{x\} + \beta\{\dot{x}\})^{-1}\{X\} = \omega^2\{X\} \quad (36)$$

可由式(35)與式(36)，若系統之 $\{\ddot{x}\}$ 、 $\{\dot{x}\}$ 與 $\{x\}$ 響應為已知，可解式(36)中之特徵值問題，求得特徵值與特徵向量，也就是系統之自然頻率與模態振型。將式(36)改寫成如下：

$$[M]^{-1}[K] = -([\ddot{X}] + \alpha[\dot{X}])(\beta[\dot{X}] + [X])^{-1} \quad (37)$$

可由式(37)取代式(35)求解特徵值問題，即以系統自由振動響應來求得模態參數。

本方法假設系統無外力作用，僅初始條件之自由振動響應，由此響應可求得系統之自然頻率及模態振型。系統響應以 $[X]$ 、 $[\dot{X}]$ 、 $[\ddot{X}]$ 響應矩陣表示，端視所使用之感測器，例如：以位移計量測則可測得 $[X]$ ，可應用數值方法求得 $[\dot{X}]$ 、 $[\ddot{X}]$ 。

#### 3.2 一般化阻尼MAFVRO方法

多自由度系統一般化阻尼MAFVRO分析方法，若系統為一般化組尼，則 $[C] \neq \alpha[M] + \beta[K]$ ，需導入一平衡方程式並重新整理，其運動方程式可表示如下：

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\dot{x}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

令

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \\ [B] &= \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \\ \{P(t)\} &= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \\ \{y(t)\} &= \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \end{aligned} \quad (39)$$

將式(39)帶入(38)式後整理可得式(40)如下：

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{P(t)\} \quad (40)$$

假設式(40)中之外力項 $\{P(t)\}$ 為0並令 $\{y(t)\}$ 如下式

$$\{y(t)\} = \{Y\}e^{\lambda t} \quad (41)$$

將式(41)帶入式(40)可以得到下式

$$(\lambda[A] + [B])\{Y\} = \{0\} \quad (42)$$

在此 $\lambda$ 與 $\{Y\}$ 為未知且待求，由於 $e^{\lambda t}$ 不為0，因此可將式(42)整理成下式

$$-[A]^{-1}[B]\{Y\} = \lambda\{Y\} \quad (43)$$

由式(43)可以發現為矩陣之特徵值問題，解此特徵值問題可求得特徵值與特徵向量對應於系統及模態振型與自然頻率，並且在一般化阻尼多自由度系統僅自由振動響應之模態分析中假設每個自由度之 $x_r(t)$ 、 $\dot{x}_r(t)$ 、 $\ddot{x}_r(t)$ 皆可得知，將位移、速度、加速度響應矩陣代入式(39)，並假設外力為零，整理化簡可得下式：

$$-[A]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} [\ddot{X}] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix}_{2n \times N_s}^{-1} \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix}_{N_s \times 2n} \quad (44)$$

若式(44)可求得系統之輸出響應矩陣，則可帶入式(43)求得系統之自然頻率與模態振型向量，將其特徵值為複數可表示如下：

$$\lambda_r = R_e + iI_m = -\xi_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (45)$$

可解得：

$$\bar{\omega}_r = \sqrt{R_e^2 + I_m^2} \quad (46)$$

又求得之特徵向量如下式：

$$\bar{\xi}_r = \frac{-R_e}{\sqrt{R_e^2 + I_m^2}} \quad (47)$$

$$\{\bar{Y}_r\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{X}_r\} \\ \{\bar{X}_r\} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

系統之自然頻率 $\bar{\omega}_r$ 、阻尼比 $\bar{\xi}_r$ 及模態振型向量 $\{\bar{Y}_r\}$ 即可求得，其中， $\{\bar{X}_r\}$ 為以MAFVRO方法求得結構之位移模態振型向量， $\{\bar{X}_r\}$ 為以MAFVRO方法求得結構之速度模態振型向量。

## 4. 結果與討論

本節將以發展之MAFVRO應用於連續系統預測結構之模態參數，文中將以懸臂樑結構為例，驗證發展之MAFVRO方法應用於連續系統預測模態參數之可行性。主要將呈現比例阻尼MAFVRO方法與非比

例阻尼MAFVRO方法對於模態參數預測之結果。表1為此次分析之懸臂樑結構材料參數與幾何尺寸。圖1為對應之懸臂樑結構示意圖。

#### 4.1 比例阻尼之僅自由振動響應模態分析方法於連續系統應用之可行性分析

表2為以比例阻尼MAFVRO方法與理論模態分析(TMA)預測懸臂樑結構之模態參數結果比較表,感測器選擇為位移計與加速度計,呈現之結果包括:各模態自然頻率比較、MAC比對與模態振型圖。綜合討論如下:

##### 1. 感測器為位移計採2階中央差分法

- (1) 比較MAFVRO方法與TMA結果,各模態之自然頻率誤差最大僅-0.41%, MAC於對角線均趨進於1,顯示模態參數預測結果均與理論分析吻合。
- (2) 模態振型圖上顯示o為TMA之模態振型,虛線--為MAFVRO方法預測之模態振型,比較兩條曲線可清楚得知懸臂樑結構各模態之振型均接近,也與MAC比對結果一致。

##### 2. 感測器為加速度計採辛普森分法則

- (1) 比較MAFVRO方法與TMA結果,各模態之自然頻率誤差最大約2.12%, MAC於對角線均趨進於1,顯示模態參數預測結果均與理論分析吻合。
- (2) 模態振型圖上顯示o為TMA之模態振型,虛線--為MAFVRO方法預測之模態振型,比較兩條曲線可清楚得知懸臂樑結構各模態之振型均接近,也與MAC比對結果一致。
- (3) 比較不同感測器模擬時可發現,以位移計模擬感測器獲得之模態參數結果較佳,這是由於理論加速度響應是以數值微分方法2階中央差分法求得,已先存在數值微分誤差,導致再以辛普森法則進行數值積分時誤差會累積增加。

#### 4.2 一般化阻尼之僅自由振動響應模態分析方法於連續系統應用之可行性分析

表3為以一般化阻尼MAFVRO方法與理論模態分析(TMA)預測懸臂樑結構之模態參數結果比較表,感測器選擇為位移計與加速度計,呈現之結果包括:各模態自然頻率、阻尼比、MAC比對與模態振型圖。綜合討論如下:

##### 1. 感測器為位移計採2階中央差分法

- (1) 比較MAFVRO方法與TMA結果,各模態之自然頻率誤差最大僅-0.43%, MAC於對角線均趨進於1,顯示模態參數預測結果均與理論分析吻合。
- (2) 阻尼比比較發現由於TMA與MAFVRO獲得之阻尼比均很小,因此若數值有些許差異便會造成相當大的誤差,但其實或得知結果差異不大,顯示一般化MAFVRO方法可成功求出連續

系統結構之阻尼比。

- (3) 模態振型圖上顯示o為TMA之模態振型,虛線--為MAFVRO方法預測之模態振型,比較兩條曲線可清楚得知懸臂樑結構各模態之振型均接近,也與MAC比對結果一致。

##### 2. 感測器為加速度計採辛普森分法則

- (1) 比較MAFVRO方法與TMA結果,各模態之自然頻率誤差最大約1.92%, MAC於對角線均趨進於1,顯示模態參數預測結果均與理論分析吻合。
- (2) 模態振型圖上顯示o為TMA之模態振型,虛線--為MAFVRO方法預測之模態振型,比較兩條曲線可清楚得知懸臂樑結構各模態之振型均接近,也與MAC比對結果一致。
- (3) 阻尼比比較發現由於TMA與MAFVRO獲得之阻尼比均很小,因此若數值上有些許差異便會造成相當大的誤差,但獲得之結果差異不大,顯示一般化MAFVRO方法可成功求出連續系統結構阻尼比。
- (4) 比較不同感測器之模擬時可發現,以位移計模擬感測器獲得之模態參數結果較佳,這是由於理論加速度響應是以數值微分方法2階中央差分法求得,已先存在數值微分之誤差,導致再以辛普森法則進行數值積分時誤差會累積增加。

## 5. 結論

本文主要以發展之以僅由自由振動響應之模態分析方法於連續系統應用擷取模態參數之可行性分析,以懸臂樑結構為例進行探討。首先推導懸臂樑結構之側向振動,以獲得理論之模態參數與理論響應,並假設理論響應為實驗量測或得知結果帶入發展之MAFVRO方法進行模態參數預測可行性分析,同時擷取模態參數,最後成功預測結構之模態參數,本章主要的結論如下敘述:

1. 不論是加速度計或是位移計以比例阻尼與一般化阻尼MAFVRO方法都可以成功應用於連續系統預測出結構之模態參數,各模態之自然頻率誤差均小於3%,同時各模態對應之MAC值均接近於1。
2. 比較兩種感測器分析之結果可以得知以位移計獲得之結果較佳,各模態自然頻率誤差不超過2%,加速度計獲得之結果各模態自然頻率最大誤差接近3%。
3. 以一般化阻尼MAFVRO方法預測結構之阻尼比雖然於部分模態誤差較大,但是由於獲得之阻尼比結果均很小,因此有些許差異便會造成相當大的誤差,若比較理論分析與MAFVRO方法預測之阻尼比將可發現實際之差異並不大。
4. 綜合上述可以得知發展之MAFVRO方法可應用於連續系統進行模態辨識,對模態分析技術將是嶄新的突破,同時搭配發展之方法所求得之模態參數更

可做為後續結構破壞檢測或是健康監測的應用。

### 6. 誌謝

本論文之國科會計畫編號為 NSC-97-2221-E-020-007，非常感謝國科會之支援，使得本計畫得以順利進行，特此致上感謝之意。

### 7. 參考文獻

1. Zhou, W., and Chelidze, D., 2005, "A New Method for Vibration Modal Analysis," Proceeding of the SEM Annual Conference and Exposition on Experimental and Applied Mechanics, Portland, Oregon USA, pp. 390-393.
2. Feeny, B. F., and Kappagantu, R., 1998, "On the Physical Interpretation of Proper Orthogonal Modes in Vibration," Journal of Sound and Vibration, Vol. 211, No. 4, pp. 607-616.
3. Han, S., and Feeny, B., 2003, "Application of Proper Orthogonal Decomposition to Structural Vibration Analysis," Mechanical System and Signal Processing, Vol. 17, No. 5, pp. 989-1001.
4. Feeny, B. F., and Liang, Y., 2003, "Interpreting Proper Orthogonal Modes of Randomly Excited Vibration System," Journal of Sound and Vibration, Vol. 265, pp. 953-966
5. Azeez, M. F. A., and Vakakis, A. F., 2001, "Proper Orthogonal Decomposition(POD) of A Class of Vibroimpact Oscillation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 5, pp. 859-889.
6. Kerschen, G., and Golinval, J. G., 2004, "Comments on Interpreting Proper Orthogonal Modes of Randomly Excited Linear Vibration System," Journal of Sound and Vibration, Vol. 274, pp. 1091-1092.
7. Wang, B. T., and Cheng, D. K., 2008, "Modal Analysis MDOF System by Using Free Vibration Response Data Only," Journal of Sound and Vibration, Vol. 311, pp.737-755.
8. 王栢村，鄭登凱，趙天麒，2008，「一般化阻尼系統之僅自由振動響應模態分析方法之發展與應用」，中國機械工程學會第二十五屆全國學術研討會，彰化。

### 8. 圖表

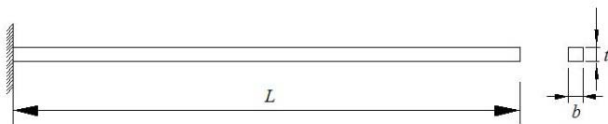


圖1 懸臂樑結構示意圖。

表1 懸臂樑結構之幾何尺寸與材料參數表。

材料性質	懸臂樑
懸臂樑結構楊氏係數 (E)	$191 \times 10^9$ N/m <sup>2</sup>
懸臂樑結構浦松比 ( $\nu$ )	0.32
懸臂樑結構密度 ( $\rho$ )	8791 kg/m <sup>3</sup>
懸臂樑結構長度 (L)	0.3 m
懸臂樑結構寬度 (b)	0.04 m
懸臂樑結構高度 (t)	0.002 m

表2 比例阻尼MAFVRO方法於懸臂樑模態參數預測結果。

(a) 感測器為位移計採2階中央差分。

自然頻率比較					
Mode	1	2	3	4	5
TMA	16.733	104.86	293.62	575.37	951.13
MAFVRO	16.747	104.86	293.60	575.03	947.16
Err(%)	0.083597	0.0000	-0.00681	-0.05913	-0.41915

模態保證指標					
TMA \ MAFVRO	Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5
Mode_1	1.000000	0.017662	0.018611	0.019924	0.020875
Mode_2	0.017692	1.000000	0.019842	0.021034	0.022107
Mode_3	0.018734	0.019973	1.000000	0.022113	0.023288
Mode_4	0.019828	0.021048	0.022132	1.000000	0.024377
Mode_5	0.021026	0.024713	0.023416	0.023496	0.99991

模態振型圖比較					
	Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5

(b) 感測器為加速度計採辛普森法則。

自然頻率比較					
Mode	1	2	3	4	5
TMA	16.733	104.86	293.62	575.37	951.13
MAFVRO	16.738	107.06	297.81	584.04	971.71
Err(%)	0.0298	2.0549	1.4069	1.4844	2.1179






模態保證指標					
TMA \ MAFVRO	Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5
Mode_1	0.9998	0.0143	0.0181	0.0182	0.0202
Mode_2	0.0174	1.0000	0.0197	0.0193	0.0219
Mode_3	0.0202	0.0180	0.9973	0.0375	0.0252
Mode_4	0.0198	0.0210	0.0222	1.0000	0.0245
Mode_5	0.0192	0.0176	0.0218	0.0016	0.9591






模態振型圖比較					
	Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5

表3 一般化阻尼MAFVRO方法於懸臂樑結構模態參數預測結果。

(a)感測器為位移計採2階中央差分。

自然頻率比較					
Mode	1	2	3	4	5
TMA	16.733	104.86	293.62	575.37	951.13
MAFVRO	16.730	104.86	293.60	575.03	947.05
Err(%)	-0.017	0.0000	-0.0068	-0.059	-0.4308
阻尼比比較					
Mode	1	2	3	4	5
TMA	0.00047	0.000075	0.000027	0.000013	0.0000083
MAFVRO	0.00056	0.000075	0.000020	0.000013	0.0001073
Err(%)	19.15	0.00	-25.93	0.00	1192.77
模態保證指標					
TMA \ MAFVRO	Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5
Mode_1	1.000000	0.017673	0.018612	0.019925	0.020877
Mode_2	0.017692	1.000000	0.019844	0.021036	0.022109
Mode_3	0.018742	0.019923	1.000000	0.022118	0.023284
Mode_4	0.019828	0.02105	0.022133	1.000000	0.024377
Mode_5	0.020913	0.021955	0.022953	0.02424	0.99998
模態振型圖比較					
Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5	
					

(b) 感測器為加速度計採辛普森法則。

自然頻率比較					
Mode	1	2	3	4	5
TMA	16.733	104.86	293.62	575.37	951.13
MAFVRO	16.712	106.23	297.55	584.27	969.84
Err(%)	-0.1256	1.2896	1.3207	1.52326	1.92918
阻尼比比較					
Mode	1	2	3	4	5
TMA	0.00047	0.000075	0.000027	0.000013	0.0000083
MAFVRO	0.00705	0.000280	0.000014	0.000030	0.0016630
Err(%)	1400.00	273.33	-48.15	130.77	19936.14
模態保證指標					
TMA \ MAFVRO	Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5
Mode_1	0.999180	0.014587	0.017961	0.018215	0.020125
Mode_2	0.017709	1.000000	0.019838	0.020991	0.022103
Mode_3	0.018737	0.01981	1.000000	0.022411	0.023316
Mode_4	0.019827	0.021048	0.022132	1.000000	0.024377
Mode_5	0.020225	0.020845	0.024004	0.023477	0.998830
模態振型圖比較					
Mode_1	Mode_2	Mode_3	Mode_4	Mode_5	
					

## Application of Modal Analysis Method by Using Free Vibration Response Only to Continuous System

Bor-Tsuen Wang<sup>1</sup> Deng-Kai Cheng<sup>2</sup> Tien-Chi Chao<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Professor, Department of Mechanical Engineering, National Pingtung University of Science and Technology.

<sup>2</sup> Department of Mechanical Engineering National Pingtung University of Science and Technology. NSC Project No.: NSC-97-2221-E-020-007

### Abstract

This work applies a new modal parameter extraction method, modal analysis by free vibration response only (MAFVRO), to continuous structural system and demonstrates its feasibility. A cantilever beam is considered and derived for its free vibration response that is used as the input to MAFVRO method to predict the modal parameters of the beam and compare with the theoretical ones determined from theoretical modal analysis (TMA). The MAFVRO method applied to beam structures to obtain structural modal parameters can be validated. The developed MAFVRO method, rather than the conventional modal testing method, can be suitably adopted to find structural modal parameters for continuous systems as well. The MAFVRO can be more easily applied to structural health monitoring or damage detection in the future.

**Keywords:** modal parameter extraction method, free vibration response, cantilever beam, continuous system.