

一般化阻尼系統之僅自由振動響應模態分析方法之發展與應用

王栢村¹、鄭登凱²、趙天麒²

¹ 國立屏東科技大學機械工程學系教授

² 國立屏東科技大學機械工程學系研究生

國科會計畫編號：NSC-97-2221-E-020-007

E-mail: wangbt@mail.npust.edu.tw

摘要

本文主要是發展以結構之自由振動響應求得模態參數之方法，並針對一般化阻尼結構進行分析。首先假設系統自由度之位移響應或加速度響應皆可量測求得，透過不同之數值微積分方法可以得到結構之加速度以及速度響應矩陣，將獲得之響應矩陣帶入發展之方法中，將可以求得結構之模態參數，同時針對不同感測器選擇所發展之數值微積分方法加以介紹說明，以使得發展之一般化阻尼系統之MAFVRO方法可適用於不同感測器模式，最後介紹以一般化阻尼系統之MAFVRO方法進行模態參數預測之流程與程式發展架構。文中以3個及10個自由度系統之數值分析結果，與理論分析結果比較，來驗證一般化阻尼系統之MAFVRO方法之適應性以及可行性。透過發展的方法可以成功的以輸出響應資料求得離散系統之模態參數，未來可應用於連續系統進行模態分析。

關鍵字：模態分析、自然頻率、模態振型、模態參數。

1. 前言

振動現象為工業界不容忽視的問題，由於今日機器朝高速化、精密化，相對地機器對抗振動之設計考慮也相當重要。而解決振動問題最直接有效的方法就是瞭解結構物的動態特性，因此獲得結構系統之模態參數，對產品設計過程是相當重要的步驟。對結構系統進行振動特性之量測分析可獲得系統模態參數，通常皆有其目的，如：與電腦輔助工程分析結合進行模型驗證[1-3]、響應預測以及設計變更，或是利用結構之動態特性進行健康監測[4]或是破壞預測[5]。由此可知實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA)為工程應用重要一環，但是傳統實驗模態分析有其潛在限制級缺點，例如當結構物很大時，在實驗室進行量測就有其困難，同時對於大樓以及飛機結構常會受風力干擾，船泊或是橋樑結構以及旋轉機械[6]本身就處在變動負荷下[7]，上述結構通常都不處在靜止狀態，因此也無法有效控制結構物的輸入源，再者進行傳統實驗模態分析需要FFT之數值運算設備，而Modal parameter extraction method後處理常需套裝軟體等，因此對於工程應用之設備需求也

相對高。有鑑於此，發展以輸出響應獲得模態參數的方法確實有其必要性。

僅以響應資料作模態分析，又稱操作狀態下之模態分析，常見的方法有隨機次空間辨識(stochastic subspace identification, SSI)[8-12]，SSI是以輸入或輸出訊號的狀態空間為基礎，透過擷取系統僅輸出矩陣來辨識結構物之模態參數，為了獲得系統之狀態空間矩陣，常常使用奇異值分解技術(SVD)以濾掉雜訊，同時估算出狀態空間矩陣，而且以SSI技術去擷取模態參數，對於訊號較弱或使用奇異值的項，模態順序會被高估，因此多餘的模態被擷取及假象模態的發生是不可避免的，以SSI技術進行模態分析有個假設前提，輸入必須為白噪音，但是結構所受之負荷往往為隨機或任意型式之外力。

Wang and Cheng[13]發展一套嶄新之模態參數擷取方法，僅自由振動響應之模態分析(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)方法，針對比例阻尼結構進行分析，並撰寫為程式，且以數值微積分方法來模擬不同感測器，使得比例阻尼系統之MAFVRO方法可適用於不同感測器之模式，且以3個及10個自由度系統為例，成功驗證此方法之適應性及可行性。

本文針對MAFVRO方法，延續發展一般化阻尼系統之僅由自由振動響應之模態分析(Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO)以突破傳統EMA對FFT頻譜分析儀昂貴量測設備之需求，以及結構需呈靜止之限制限制。本文架構如下：第一部分是介紹發展方法之理念，第二部分為介紹不同感測器之應用分析，第三部分為介紹發展方法之程式建立之流程，第四部分則是呈現分析之結果以驗證發展方法之適應性以及可行性，第五部分為結論。

2. 多自由度系統之理論分析

本文將對MAFVRO方法延續更進一步提出一般化阻尼系統之MAFVRO方法，以下將分為兩小節，分別概述比例阻尼系統之MAFVRO方法以及一般化阻尼系統之MAFVRO方法。

2.1 多自由度系統比例阻尼僅自由振動響應之模態分析方法

本小節將透過系統之自由振動響應來求得結構之模態參數，概述比例阻尼MAFVRO方法，考慮一比例阻尼多自由度系統其運動方程式如下：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

對應之初始條件如式(2)

$$\begin{cases} x(0) = \{x_0\} \\ \dot{x}(0) = \{v_0\} \end{cases} \quad (2)$$

且阻尼矩陣[C]與質量矩陣[M]及勁度矩陣[K]呈式(3)之比例關係

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (3)$$

由正向模態分析，假設外力向量{f}以及系統阻尼[C]均為0，可得特徵值問題如下：

$$[K]\{X\} = \omega^2[M]\{X\} \quad (4)$$

或

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \omega^2\{X\} \quad (5)$$

若系統為比例阻尼且無外力作用下，則系統之運動方程式可表示如下：

$$[M]\{\ddot{x}\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (6)$$

將式(6)重新整理且中加速度、速度以及位移向量整理成一邊，表示如下：

$$[M]^{-1}[K] = -(\{\ddot{x}\} + \alpha\{\dot{x}\})(\{x\} + \beta\{\dot{x}\})^{-1} \quad (7)$$

將上式代入式(5)取代[M]⁻¹[K]，可得特徵值問題如下：

$$(\{\ddot{x}\} + \alpha\{\dot{x}\})(\{x\} + \beta\{\dot{x}\})^{-1}\{X\} = \omega^2\{X\} \quad (8)$$

由式(8)中，若系統之{\ddot{x}}，{\dot{x}}與{x}響應為已知，可解式(8)中之特徵值問題，求得特徵值與特徵向量，也就是系統之自然頻率與模態振型。將式(8)改寫成如下：

$$[M]^{-1}[K] = -([\ddot{x}] + \alpha[\dot{x}])([\dot{x}] + \beta[X])^{-1} \quad (9)$$

可由式(9)取代式(7)求解特徵值問題，即以系統自由振動響應來求得模態參數。

本方法假設系統無外力作用，僅初始條件之自由振動響應，由此響應可求得系統之自然頻率及模態振型。系統響應以[X],[\dot{X}],[\ddot{X}]響應矩陣表示，端視所使用之感測器，例如：以位移計量測則可測得[X]，可應用數值方法求得[\dot{X}],[\ddot{X}]。

2.2 多自由度系統一般化阻尼僅自由振動響應之模態分析方法

考慮系統為一般化阻尼，系統之運動方程式可以表示成下式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (10)$$

導入一平衡方程式如下式

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad (11)$$

將式(10)與式(11)組合並且重新整理成下式

$$\begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

令

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

$$\{P(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$$

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$$

將式(13)帶入式(12)後整理可得下式

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{P(t)\} \quad (14)$$

對系統進行模態分析，令作用於系統之外力為0，因此式(14)可以表示成下式

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{0\} \quad (15)$$

令{y(t)}如下式

$$\{y(t)\} = \{Y\}e^{\lambda t} \quad (16)$$

將式(16)帶入式(15)可以得到下式

$$(\lambda[A] + [B])\{Y\}e^{\lambda t} = \{0\} \quad (17)$$

在此λ與{Y}為未知且待求，由於e^{λt}不為0，因此可將式(14)整理成下式

$$-[A]^{-1}[B]\{Y\} = \lambda\{Y\} \quad (18)$$

由式(18)可以發現為矩陣之特徵值問題，解此特徵值問題可求得特徵值與特徵向量對應於系統及模態振型與自然頻率，可求得n對之共軛複數特徵值及其對應之特徵向量如下式：

$$\begin{cases} \lambda_r \rightarrow \{Y_r\} & r=1,2,\dots,n \\ \lambda_r^* \rightarrow \{Y_r^*\} \end{cases} \quad (19)$$

在一般化阻尼多自由度系統僅自由振動響應之模態分析(MAFVRO)中假設每個自由度之x_r(t)、\dot{x}_r(t)、\ddot{x}_r(t)皆可量測或以數值方法得知，若取樣時間間距Δt，取N_t個時間點，則x_r(t_k)、\dot{x}_r(t_k)、\ddot{x}_r(t_k)，r=1,2,...,n、k=1,2,...,N_t，將位移、速度、加速度響應矩陣代入式(12)，並假設外力為零得下式：

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\ddot{X}] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix} = [0] \quad (20)$$

整理前式可得下式：

$$[A] \begin{bmatrix} [\ddot{X}] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix} = [0] \quad (21)$$

整理前式可得下式：

$$[B] \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix} = -[A] \begin{bmatrix} [\ddot{X}] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} \quad (22)$$

整理式(22)可得下式：

$$-[A]^{-1}[B] \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\ddot{X}] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix} \quad (23)$$

化簡前式可求得下式

$$-[A]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} [\ddot{X}] \\ [\dot{X}] \end{bmatrix}_{2n \times N_t} \begin{bmatrix} [\dot{X}] \\ [X] \end{bmatrix}_{N_t \times 2n}^{-1} \quad (24)$$

由式(24)可以得知，若可求得系統之輸出響應矩陣，則可帶入式(18)求得系統之自然頻率與模態振型向量如式(19)，並且由式(19)將特徵值為複數可表示如下：

$$\lambda_r = R_e + iI_m = -\xi_r \omega_r + i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (25)$$

可解得：

$$\bar{\omega}_r = \sqrt{R_e^2 + I_m^2} \quad (26)$$

$$\bar{\xi}_r = \frac{-R_e}{\sqrt{R_e^2 + I_m^2}} \quad (27)$$

又求得之特徵向量如下式

$$\{\bar{Y}_r\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_r \\ \bar{X}_r \end{Bmatrix} \quad (28)$$

系統之自然頻率 $\bar{\omega}_r$ 、阻尼比 $\bar{\xi}_r$ 及模態振型向量 $\{\bar{Y}_r\}$ 即可求得，其中， $\{\bar{X}_r\}$ 為以 MAFVRO 方法求得結構之位移模態振型向量， $\{\bar{X}_r\}$ 為以 MAFVRO 方法求得結構之速度模態振型向量。

3. 不同感測器之應用分析

於本文發展之方法量測結構之自由振動響應，即可求得模態參數，若感測器為位移計則可以數值微分方法求得結構之速度矩陣以及加速度矩陣，若感測器為加速度計則可以數值積分方法求得結構之速度矩陣及位移矩陣。

1.1 模擬位移計為感測器之數值微分方法介紹

假設感測器為位移計，因此令 $x_r(t_k) = x_{r,k}$ 為原始量測數據，如圖 1 所示，其中 $x_r(t_k)$ 代表著結構第 r 個自由度以及第 t_k 個時間點之位移響應，若量測求得結構之位移響應，則由數值微分方法可求得速度 $v_{r,k}$ 及加速度 $a_{r,k}$ 響應，因此可由 $x_r(t_k) = x_{r,k}$ 求得 $v_r(t_k) = v_{r,k}$ 、 $a_r(t_k) = a_{r,k}$ ，而獲得結構響應矩陣 $[X], [\dot{X}], [\ddot{X}]$ 。於本文中所採用之數值微分方法有一階後差法，二階後差法，一階中央差分，二階中央差分等四種方法，表 1 為上述之數值微分方法整理之結果。

1.2 模擬加速度計為感測器之數值積分方法介紹

於本文發展之方法量測結構之自由振動響應，即可求得模態參數，在此假設感測器為加速度，因此令 $a_r(t_k) = a_{r,k}$ 為原始量測數據，如圖 2 所示，其中 $a_r(t_k)$ 代表著結構第 r 個自由度以及第 t_k 個時間點之加速度響應，若量測求得結構之加速度響應，則由數值積分方法可求得速度 $v_{r,k}$ 及位移 $x_{r,k}$ 響應，因此可由 $a_r(t_k) = a_{r,k}$ 求得 $v_r(t_k) = v_{r,k}$ 、 $x_r(t_k) = x_{r,k}$ ，而獲得結構響應矩陣 $[X], [\dot{X}], [\ddot{X}]$ 。於本文中所採用之數值積分方法有中點法則、梯形法則與辛普森法則這三種，表 2 為上述之數值積分方法整理之結果。

4. 僅自由振動響應之模態分析方法程式發展與建立

根據第 2 節發展之 MAFVRO 理論模式為依據撰寫程式，並規劃 MAFVRO 程式架構。

4.1 描述程式流程圖

圖 3 為 MAFVRO 程式架構流程圖，其架構流程說明如下：

- (1) 開始 MAFVRO 分析程式，設定 MAFVRO 分析程式參數，包含：(1) 分析時間起始點： k 。(2) 供分析使用之響應資料點數： N_k 。
- (2) 選擇分析模式，包含：(1) 理論分析模擬估算模態參數。(2) 實驗量測估算模態參數。(3) 不論選擇何種分析模式，都將會獲得系統之自由振動響應 $\{x(t)\}$ 或 $\{\dot{x}(t)\}$ 。
- (3) 依據理論響應分析獲得之響應，或是實際實驗量測獲得之響應決定感測器形式。
- (4) 無論選擇何種感測器型式，以及採用何種數值微積分方法，最後都將獲得供 MAFVRO 方法使用之自由振動響應，包含 $[X], [\dot{X}], [\ddot{X}]$ 。
- (5) 以 MATLAB 內建之 randn 函數產生隨機數值加入於暫態響應資料中，以模擬雜訊響應，其雜訊之定義如下式：

$$x_r(t_k) = \text{MAX}(|x_r(t_k)|) \cdot \text{SNR} \cdot \text{RAN} + x_r(t_k)$$

在此 RAN 為由 1 至 -1 之隨機分佈之數值，SNR 代表著訊號與雜訊比， $\text{MAX}(|x_r(t_k)|)$ 為理論響應模擬資料中之最大位移。

開始進行 MAFVRO，以估算求得結構之模態參數，包含：(1) $\bar{\omega}_r$ ：自然頻率 (2) $\bar{\xi}_r$ ：阻尼比 (3) $\{\bar{X}_r\}$ ：模態振型向量。

5. 結果與討論

本節主要是對一般化阻尼 MAFVRO 方法之可行性分析進行探討，並針對 3 個及 10 個自由度系統進行探討，表 3 為多自由度系統參數表，圖 4 為對應之數學模型，其中對不同理論響應預測模式與一般化阻尼 MAFVRO 方法之雜訊進行探討，也對一般化阻尼系統於不同自由度之雜訊進行探討，最後評估比較比例阻尼 MAFVRO 方法與一般化阻尼 MAFVRO 方法。由 Wang and Cheng[13]之結果可得知(如表 4)，當以位移計為感測器時以 2 階中央差分法進行響應矩陣估算時所需之取樣頻率與預測系統最高頻模態之關係只需 7 倍即可獲得良好自然頻率預測結果。當以加速度計為感測器時以辛普森法則進行響應矩陣估算時所需之取樣頻率與預測系統最高頻模態之關係只需 13 倍即可獲得良好自然頻率預測結果。因此本文後續分析將以此測試獲得之結果做為依據。

為探討不同理論響應預測模式與一般化阻尼 MAFVRO 方法之雜訊，如表 5 所示，為不同理論響應預測模式與 MAFVRO 方法於自然頻率預測之結

果。結果顯示當一般化阻尼理論響應預測模式搭配一般化阻尼 MAFVRO 方法，對於 10 個自由度之系統而言可容許雜訊最高，SNR=3%。後續再應用將以此結果為依據進行分析。

對一般化阻尼 MAFVRO 方法於不同自由度系統之雜訊進行探討，表 6 顯示不同自由度之系統對於雜訊容忍之程度，表 6(a)為採用 2 階中央差分法搭配一般化阻尼理論響應預測模式與一般化阻尼 MAFVRO 方法進行模態參數預測之結果。當系統為 3 個自由度時 SNR=11%，隨著自由度數目增加所能容忍之 SNR 越來越低，10 個自由度時 SNR=3%。

表 6(b) 為採用辛普森法則搭配一般化阻尼理論響應預測模式與一般化阻尼 MAFVRO 方法進行模態參數預測之結果。對於 3 個自由度系統 SNR=0.4%，10 個自由度系統 SNR=0.04%，這是由於理論加速度響應是以數值微分方法 2 階中央差分法求得，已先存在數值微分之誤差，導致再以辛普森法則進行數值積分時誤差會累積增加。但若在實務應用上採用靈敏度較高之儀器相信還是可以成功預測出模態參數。

最後探討一般化阻尼與比例阻尼 MAFVRO 方法之分析結果比較，表 7 為比較比例阻尼與一般化阻尼理論模態分析與 MAFVRO 方法分析之結果。由於實務量測時無法得知結構之阻尼，因此在比例阻尼 MAFVRO 方法中均假設 $\alpha = \beta = 0$ ，表 7 結果顯示可得知雖然在比例阻尼 MAFVRO 方法中假設 $\alpha = \beta = 0$ ，但還是可正確預測出結構模態參數，同時一般化阻尼 MAFVRO 方法中所估算之阻尼比也與理論預測相吻合，由此可知 MAFVRO 方法不僅可以求得結構之自然頻率與模態振型，對於阻尼比之估算結果也相當可靠，再次驗證了發展之 MAFVRO 方法可成功應用求得系統之模態參數。

6. 結論

本文主要延續 MAFVRO 方法，發展一般化阻尼系統之僅由自由振動響應之模態分析 (Modal Analysis by Free Vibration Response Only, MAFVRO) 方法，並以 3 個與 10 個自由度系統來探討所發展之 MAFVRO 方法於模態參數擷取之可行性分析，本文主要的結論可分為如下敘述：

- (1) 本文發展之一般化阻尼 MAFVRO 方法能完整獲得模態參數，同時於系統雜訊容忍程度較高，對於 3 個自由度之系統 SNR=10%，隨著自由度增加 SNR 依序遞減，當系統為 10 個自由度時 SNR=3%。因此於分析量測過程要特別注意是否有產生雜訊。
- (2) 取樣頻率與欲求得之模態最高頻率有直接關係，不同之數值微積分方法對於取樣頻率之依賴有所不同，模擬加速度計為感測器時以辛普森法則取樣頻率至少要為欲獲得之模態頻率之 13 倍。模擬位移計為感測器若以 2 階中央差分頻率至少要為欲獲得之模態頻率之 8 倍才会有良好之模態參數預測結果。
- (3) 在實務應用上，以一般化阻尼 MAFVRO 方法可完

整求得系統之模態參數，

- (4) 由以上結論代表本文所發展之一般化阻尼 MAFVRO 方法能成功應用於多自由度系統上，未來可進一步研究應用於其他實際結構物體上。

7. 誌謝

本論文之國科會計畫編號為 NSC-97-2221-E-020-007，非常感謝國科會之支援，使得本計畫得以順利進行，特此致上感謝之意。

8. 參考文獻

1. 王栢村，林政淙，李昆達，2004，「激振器音圈結構之實驗模態分析與模型驗證」，中國機械工程學會第二十屆全國學術研討會，台北，第 529-536 頁。
2. 王栢村，陳志成，2004，「振動試驗機垂直輔助平台之模型驗證」，中國機械工程學會第二十一屆全國學術研討會，高雄，論文編號：C0300666。
3. 王栢村，陳克強，李昆達，2005，「衝擊試驗機滑動平台之模型驗證」，中國機械工程學會第二十二屆全國學術研討會，中壢，論文編號：C3-003。
4. Meo, M., Zumpano, G., Meng, X., Cosser, E., Roberts, G., and Dodson, A., 2006, "Measurement of Dynamic Properties of a Medium Span Suspension Bridge by Using the Wavelet Transforms," *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 20, pp. 1112-1133.
5. Bodeux, J. B., and Golinval, J. C., 2003, "Modal Identification and Damage Detection Using the Data-Driven Stochastic Subspace and ARMVA Method," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 17, No. 1, pp. 83-89.
6. Wang, B. T., 2001, "Determination of Mode Shapes from the Operational Deflection Shape," *Proceedings of the 8th International Congress on Sound and Vibration*, Hong Kong, China, pp. 1941-1948.
7. Kim, B. H., Stubbs, N., and Park, T., 2005, "A New Method to Extract Modal Parameters Using Output-Only Response," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 282, pp. 215-230.
8. Shen, F., Zheng, M., Shi, D. F., and Xu, F., 2003, "Using the Cross-Correlation Technique to Extract Modal Parameters on Response-Only Data," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 259, No. 5, pp. 1165-1179.
9. Zhang, Y., Zhang, Z., Xu, X., and Hua, H., 2005, "Modal Parameter Identification Using Response Data Only," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 282, pp. 367-380.
10. Zhang, Z., Hua, H., Xu, X., and Huang, Z., 2003, "Modal Parameter Identification through Gabor Expansion of Response Signals," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 266, pp. 943-955.

11. Moller, N., and Gade, S., 2004, "Operational Modal Analysis on an Automotive Transmission System," Proceeding of the 22th International Modal Analysis Conference, Dearborn, Michigan, Paper No.s14p01.
12. Yu, D. J., and Ren, W. X., 2005, "EMD-Based Stochastic Subspace Identification of Structures from Operational Vibration Measurements," Engineering Structure, Vol. 27, pp. 1741-1751.
13. Wang, B. T., and Cheng, D. K., 2008, "Modal Analysis MDOF System by Using Free Vibration Response Data Only," Journal of Sound and Vibration, Vol. 311, pp.737-755.

9. 圖表彙整

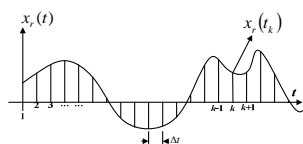


圖 1. 時間域下第 k 點之位移響應圖

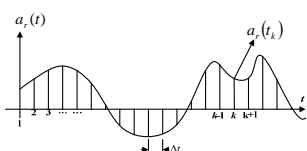


圖 2. 時間域下第 k 點之加速度響應圖

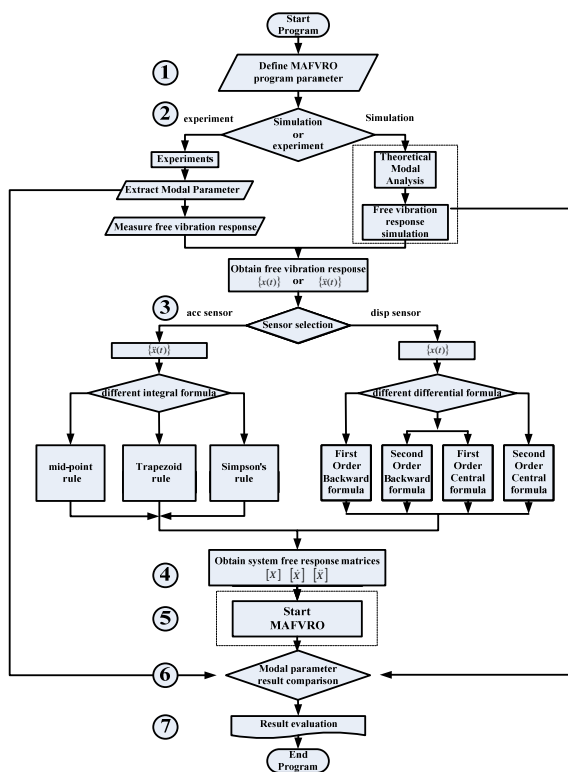


圖 3. MAFVRO 程式架構流程圖

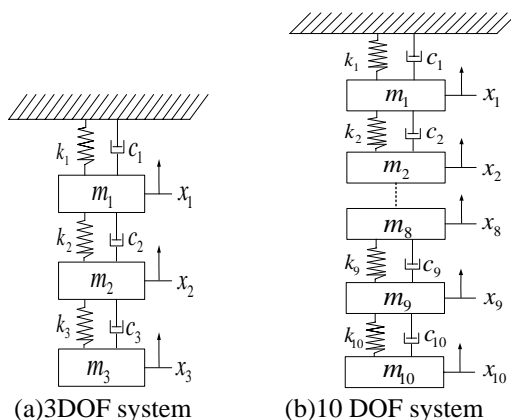


圖 4. 多自由度系統

表 1. 求速度及加速度響應之數值微分方法[13]

method	velocity
First Order Backward formula	$v_{r,k} = \dot{x}_{r,k} = \frac{1}{\Delta t}(x_{r,k} - x_{r,k-1})$
Second Order Backward formula	$v_{r,k} = \dot{x}_{r,k} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}(3x_{r,k} - 4x_{r,k-1} + x_{r,k-2})$
First Order Central formula	$v_{r,k} = \dot{x}_{r,k} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}(x_{r,k+1} - x_{r,k-1})$
Second Order Central formula	$v_{r,k} = \dot{x}_{r,k} = \frac{1}{12 \cdot \Delta t}(-x_{r,k+2} + 8x_{r,k+1} - 8x_{r,k-1} + x_{r,k-2})$
method	acceleration
First Order Backward formula	$a_{r,k} = \ddot{x}_{r,k} = \frac{1}{\Delta t}(v_{r,k} - v_{r,k-1})$
Second Order Backward formula	$a_{r,k} = \ddot{x}_{r,k} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}(3v_{r,k} - 4v_{r,k-1} + v_{r,k-2})$
First Order Central formula	$a_{r,k} = \ddot{x}_{r,k} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}(v_{r,k+1} - v_{r,k-1})$
Second Order Central formula	$a_{r,k} = \ddot{x}_{r,k} = \frac{1}{12 \cdot \Delta t}(-v_{r,k+2} + 8v_{r,k+1} - 8v_{r,k-1} + v_{r,k-2})$

表 2. 求速度及位移響應之數值積分方法[13]

Method	Velocity	Displacement
mid-point rule	$v_{r,k} = v_{r,k-2} + 2 \cdot \Delta t \cdot a_{r,k-1}$	$x_{r,k} = x_{r,k-2} + 2 \cdot \Delta t \cdot v_{r,k-1}$
Trapezoid rule	$v_{r,k} = v_{r,k-1} + \frac{\Delta t}{2}(a_{r,k-1} + a_{r,k})$	$x_{r,k} = x_{r,k-1} + \frac{\Delta t}{2}(v_{r,k-1} + v_{r,k})$
Simpson's rule	$v_{r,k} = v_{r,k-2} + \frac{\Delta t}{3}(a_{r,k-2} + 4a_{r,k-1} + a_{r,k})$	$x_{r,k} = x_{r,k-2} + \frac{\Delta t}{3}(v_{r,k-2} + 4v_{r,k-1} + v_{r,k})$

表 3. 多自由度系統參數表

System	3DOFs	10 DOFs
$[M]$	$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix}_{10 \times 10}$
$[K]$	$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix}_{10 \times 10}$
I.C.	$x_0 = [1, 0, 0]$ $v_0 = [0, 0, 0]$	$x_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ $v_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

Note: $k_i = 1,000,000 \text{Nm}$, $m_i = 1 \text{kg}$, $i=1, 2, 3, \dots, 10$

表 4 不同數值微積分方法對自然頻率預測之影響

感測器	數值分析方法	取樣頻率	f_s/f_{10}	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
位移計	1st Backward formula	7000	22.65	-0.14	-0.51	-0.72	-1.71	-1.89	-2.19
	2nd Backward formula	7800	25.24	0.03	0.27	0.70	1.21	1.67	2.05
	1st Central formula	5800	18.77	-0.03	-0.25	-0.64	-1.11	-1.55	-1.86
	2nd Central formula	2200	7.12	0.00	-0.04	-0.23	-0.68	-1.30	-1.84
加速度計	Mid-point rule	5500	17.80	-0.03	-0.28	-0.71	-1.23	-1.72	-2.06
	Trapezoid rule	7300	23.62	0.02	0.15	0.31	-0.18	-0.34	-0.09
	Simpson's rule	3800	12.23	0.00	0.00	-0.02	-0.09	-0.76	-0.04

Note: $N_k=200, k=50, SNR=0$

表 5 不同理論響應預測模式 MAFVRO 方法對雜訊容忍程度探討

理論響應模式	MAFVRO 方法	SNR (%)	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_8	ϵ_9	ϵ_{10}
比例阻尼	比例阻尼	2	0.39	-0.10	0.26	0.09	0.15	-0.03	-0.41	-0.03	-0.49	2.83
一般化阻尼		3	0.23	0.57	0.40	0.54	0.35	0.29	0.75	1.11	1.10	2.44
比例阻尼	一般化阻尼	1	0.10	-0.05	0.02	-0.06	-0.24	-0.47	-0.89	-1.13	-1.13	0.90
一般化阻尼		3	0.92	0.53	0.43	0.41	0.08	-0.14	-0.39	-0.48	-0.36	2.30

Note: $N_k=200, k=50, f_s=2200Hz$

表 6 不同自由度之系統雜訊容忍程度探討
(a) 位移計採 2 階中央差分法

DOFs	SNR (%)	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_8	ϵ_9	ϵ_{10}	ϵ_{avg}	ϵ_{max}	ϵ_{min}
3	11	1.85	0.67	-0.23								1.22	2.64	0.12
4	10	1.88	2.58	2.39	1.54							0.44	1.52	0.03
5	8	2.03	2.12	1.37	1.70	1.82						0.76	2.48	0.14
6	6	1.04	0.82	1.45	0.82	-0.49	-0.34					0.55	2.15	-0.13
7	5	0.72	0.83	0.47	0.93	0.01	0.67	2.10				0.73	2.63	0.06
8	3.5	0.60	0.64	0.44	0.52	0.01	-0.33	-0.32	1.27			0.56	2.73	-0.02
9	3	0.84	0.41	0.30	0.31	0.21	-0.29	-0.43	-0.05	1.68		0.49	2.78	-0.27
10	3	0.41	0.28	0.22	0.38	0.13	-0.29	-0.21	-0.86	-0.71	1.25	0.24	1.38	-0.04

Note: $N_k=200, k=50, f_s=2200Hz$

(b) 加速度計採辛普森法則

DOFs	SNR (%)	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6	ϵ_7	ϵ_8	ϵ_9	ϵ_{10}	ϵ_{avg}	ϵ_{max}	ϵ_{min}
3	0.4	0.23	-1.05	-0.14								-0.69	-0.07	-1.63
4	0.3	0.05	-1.38	-1.91	-1.08							-1.16	0.50	-2.53
5	0.2	-0.05	0.06	-0.02	-1.91	-2.15						-0.67	0.00	-1.70
6	0.2	-0.13	0.13	-1.27	-0.14	-4.55	-0.39					-0.67	-0.15	-1.57
7	0.1	0.53	-0.13	-0.10	-0.32	-0.12	-0.21	-0.87				-0.20	0.41	-1.20
8	0.1	0.07	0.02	-0.01	0.02	0.01	-0.04	-0.43	-0.55			-0.04	0.06	-0.17
9	0.1	0.02	0.00	-0.01	0.00	0.03	-0.01	0.00	-0.08	-0.20		-0.26	0.17	-1.45
10	0.04	-0.12	0.02	-0.01	-0.04	0.01	0.01	-0.01	0.00	-0.07	-0.67	0.06	0.65	-0.16

Note: $N_k=200, k=50, f_s=3800Hz$

表 7 比例與一般化阻尼理論模態分析與 MAFVRO 方法結果比較

理論響應模式	MAFVRO 方法	預測之自然頻率(Hz)	預測之阻尼比	自然頻率誤差(%)	阻尼比誤差(%)
比例阻尼	比例阻尼	70.83	--	-0.01	--
		197.81	--	-0.33	--
		282.82	--	-1.38	--
70.83		--	-0.01	--	
197.81		--	-0.33	--	
282.82		--	-1.38	--	
一般化阻尼	一般化阻尼	70.83	0.00233	-0.01	-0.00022
		197.81	0.006193	-0.33	-0.0130
		282.82	0.008550	-1.38	-0.053
70.83		0.00233	-0.01	-0.00022	
197.81		0.006193	-0.33	-0.0130	
282.82		0.008550	-1.38	-0.053	

Note: $N_k=200,$

$k=50, f_s=2200Hz, \alpha=0.001, \beta=0.001, SNR=0$

Development and Application of General Damping System for Modal Analysis by Free Vibration Response Only

Bor-Tsuen Wang¹ Deng-Kai Cheng² Tien-Chi Chao²
¹Professor, Department of Mechanical Engineering,
National Pingtung University of Science and Technology.

²Department of Mechanical Engineering National
Pingtung University of Science and Technology.
NSC Project No.: NSC-97-2221-E-020-007

Abstract

This work aims to develop the algorithm for modal analysis by free vibration response only (MAFVRO), in particular for the general damping system model. If the structural displacement or acceleration response due to free vibration can be measured, the system response matrices, including displacement, velocity and acceleration, can be obtained through numerical differential or integration method. These response matrices can then be applied to the developed MAFVRO method to determine the structural modal parameters. The numerical differential and integration methods are introduced and adopted for establishing the modal parameter prediction program for the general damping model of MAFVRO. This work shows a three and ten degree-of-freedom (DOF) systems, respectively, to demonstrate the feasibility of MAFVRO. The developed method can successfully use the output response only to obtain the structural modal parameters and also be extended to continuous system as well.

Keywords: modal analysis, modal parameter, natural frequency, mode shape, damping ratio.