

## 環形板之裂縫位置預測

王栢村<sup>1</sup>、林建成<sup>2</sup>

<sup>1</sup>屏東科技大學機械工程系教授

<sup>2</sup>屏東科技大學機械工程系研究生

### 摘要

本文利用應變能法(Strain Energy Method, SEM)結合微分積法(Differential Quadrature Method, DQM)建立二維環形板結構裂縫位置的預測方法。首先,以有限元素軟體 ANSYS 分析無裂縫環形板模型與有裂縫環形板模型,得到其有、無裂縫的模態振型,將模態振型資訊輸入裂縫預測程式進行二維環形板結構的裂縫位置預測。環形板裂縫預測程式利用微分積法求得環形板模態振型的一次與二次偏微分後,由應變能法運算後,可得到環形板裂縫位置的預測指標資訊。結果顯示利用此裂縫預測方法能有效找出實際之裂縫位置。

**關鍵詞:** 環形板、微積分法、應變能法。

### 1. 前言

從振動的角度來看一般的結構體由於破壞的發生,結構體原有的物理特徵會產生變化,如自然頻率、模態振型與阻尼比等。因此,可利用改變之物理特徵,進行非破壞檢測,判斷出其結構體的破壞與否,甚至偵測其破壞位置與程度。

根據 Shi *et al.* [1] 以模型結構的應變能的改變作為破壞預測的指標,以未破壞前與破壞後的能量改變做預測的基準,此指標與系統的彈簧係數、質量矩陣與模態振型及自然頻率有關。Cornwell *et al.*[2]應用對振型的二次微分之平方與二次矩與楊氏係數對一維樑與二維板求得結構的應變能,再比較未破壞與有破壞板的應變能之差異,研判破壞的發生,即可以準確的判斷出結構的破壞位置。Li and Yam [3]則是基於破壞系統的彎曲模式形式被改變,則以累加振型的二次微分在 x 向與 y 向的積分做破壞的指標,並使用在平板做預測,對照分割的元素位置可以判斷出破壞之位置。Teo *et al.*[4]應用微積分法(Differential Quadrature Method, DQM)來分析三維彎曲板,應用 DQM 方法可以僅輸入點位置與點座標之值,即可以求得該點的一次微分、二次微分與一次偏微分、二次偏微分等。Chondros *et al.*[5]發展具有連續破壞樑的振動理論,此理論可以應用簡支樑上在一面或者在兩面的表面上具有表面破壞的狀況,可以實際預測接近破壞之位置。Xia and Hao[6]另外利用了自然頻率的資訊,利用輸入系統的隨機訊號並計算機率密度函數與質量和結構的勁度矩陣,由破壞前與破壞後的差異估算出破壞的位置。Hu *et al.*[7]應用複合材料疊層板破壞前後應變能比

值定義破壞指標來找出複合材料疊層板的破壞位置。王與曹[8],文中提及破壞預測的方法分為位移振型差法、位移振型差斜率法及應變能法。其中能得到最佳預測結果的方法為位移振型差斜率法搭配應變能法。張[9]文中提及,以有限元素軟體 ANSYS 分析得到未破壞平板模型與建立破壞平板模型的模態振型,並經由 Lagrange-Interpolation 法配合微積分法與應變能法的預測方法,達到預測破壞目標。

本文利用結構模態振型,探討環形板結構之破壞指標,先以有限元素軟體 ANSYS 得到未破壞環形板之振型,再建立一具有微小破壞的環形板之模型,將得到的振型經由 DQM 計算得到各環形板振型的一次微分與二次微分後,將結果代入應變能法,以應變能法計算結構的破壞位置與破壞程度化,建立以環形板結構的破壞預測方法,希望對環形板結構的振動破壞檢測能有進一步的貢獻。

### 2. 裂縫環形板之有限元素分析

利用有限元素軟體 ANSYS 對環形板結構進行模態分析,一為無裂縫之自由邊界環形板,另一為具裂縫之自由邊界環形板。一自由邊界環形板鋼板,如圖 1 所示。環形板結構材料之尺寸和性質,如表 1 所示。

#### 2.1 無裂縫環形板

無裂縫環形板的有限模型建立條件如下列項目所示:

- (1) **元素形式:** 環形板為一薄殼結構,故以 ANSYS 軟體中之線性四邊形元素 Shell63 架構。
- (2) **元素分割:** 徑向取 10 等分,在角度方向由 0°至 360°取 36 等分,共 360 個元素,如圖 2 所示。
- (3) **位移限制:** 考慮環形板為自由邊界狀態,故在有限元素模型設定上並不需要設定位移的限制。
- (4) **負荷條件:** 因為進行模態分析不需要設定負荷的條件,故在有限元素之模型上並不設定任何的外力負荷。

#### 2.2 具裂縫環形板

具裂縫環形板的有限元素模型建立的條件如無裂縫環形板的條件相同,在裂縫之模擬架構方面,以邊緣裂縫為例,於破壞處架構新節點(401,402,403,404),並且重新定義破壞處位置之元素架構節點順序,如圖 2(b)所示。本文建立 4 種不同的裂縫位置形式,如表 2

所示，說明如下：

**Case A: 裂縫長度固定，裂縫位置不同**

本組固定裂縫深長度為 4.8cm，預測裂縫位置分為 90°、150°及 180°外側處，探討預測裂縫位置、大小是否出現在預測位置處。

**Case B: 裂縫位置固定，裂縫長度不同**

本組令固定裂縫位置在 180°外側，考慮裂縫長度分別為 3.6cm、7.2cm及 10.8cm，探討裂縫位置、大小是否可預測裂縫長度區別及其位置。

**Case C: 內部徑向及圓周向裂縫**

本組假設裂縫位置分別在 180°方向內側徑向裂縫，裂縫長度為 4.8cm(Case C1)、60°方向圓周向裂縫，裂縫長度在半徑 30cm，40°至 80°所構成之弧線長(Case C2)及 180°方向圓周向裂縫，裂縫長度由半徑 30cm，由 160°至 200°所構成之弧線長度(Case C3)，來預測裂縫位置、大小是否出可預測內部之裂縫。

**Case D: 兩個裂縫同時發生之預測**

本組預測之項目為固定裂縫深度為 4.8cm，預測裂縫位置分別在 90°外側、180°內側，90°外側、180°外側及 90°外側、270°內部，探討預測裂縫位置、大小是否可同時預測 2 個裂縫之位置。

**3. 裂縫預測方法介紹**

本文建立一裂縫預測之方法，利用有限元素軟體 ANSYS 求解出無裂縫環形板之模態振型值與模擬具有裂縫破壞環形板模態振型值，如圖 3 所示，代入 DQM 方法求得模態振型的偏微分結果，最後再由應變能法運算各區域之應變能差異比以預測得到破壞的位置與長度。本文採用預測流程，如圖 6 所示。步驟如下：

步驟 1：分別由 ANSYS 軟體進行模態分析，求得有、無裂縫之模態振型值  $\phi_{ijk}^*$ 、 $\phi_{ijk}$ ，其中  $ij$  為徑向及周向位置之指標， $k$  為模態數，\*代表有裂縫。

步驟 2：如圖 5 所示，將環形板之位置座標，轉換成矩形位置座標，以環形板  $AB$  當成矩徵板  $x$  軸，並將此圖 5(a)環形板展開如圖 5(b)之矩形板，使有相同之元素分割節點，亦即  $N_x \times N_y = 11 \times 36$  之矩陣分割點。

步驟 3：引用 DQM 對步驟 1 求得之模態振型值  $\phi_{ijk}$  進行偏微分運算，令第  $k$  模態之模態振型值如下： $f(x_i, y_j) = \phi_{ijk}$ 。由 DQM 在已知位置座標  $(x_i, y_j)$ ， $i = 1, 2, \dots, N_x$ ，and  $j = 1, 2, \dots, N_y$  可分別求得

$f(x_i, y_j)$  之偏微分如下：

$$f_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{r=1}^{N_x} C_{ir}^{(n)} f(x_r, y_j); n = 1, 2, \dots, N_x - 1 \tag{1}$$

$$f_y^{(m)}(x_i, y_j) = \sum_{s=1}^{N_y} \bar{C}_{js}^{(m)} f(x_i, y_s); m = 1, 2, \dots, N_y - 1 \tag{2}$$

$$f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j) = \sum_{r=1}^{N_x} C_{ir}^{(n)} \sum_{s=1}^{N_y} \bar{C}_{js}^{(m)} f(x_r, y_s) \tag{3}$$

其中， $f_x^{(n)}(x_i, y_j)$  為函數對  $x$  進行  $n$  次偏微分， $f_y^{(m)}(x_i, y_j)$  為函數對  $y$  進行  $m$  次之偏微分， $f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j)$  為函數對  $xy$  進行  $(n+m)$  次偏微分。式中  $C_{ir}^{(n)}$ ， $\bar{C}_{js}^{(m)}$  之定義可參考王與曹[10]

為了能得到較好、較正確的微分運算結果，對於選擇其取樣點的方式是重要的。由 Shu and Xue.[11]中提出建議的取樣點方法。可重新定義板  $x$  方向的與板  $y$  方向的分割點為：

$$x_i = \frac{L_x}{2} \left( 1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N_x - 1} \right) \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x$$

$$y_j = \frac{L_y}{2} \left( 1 - \cos \frac{(j-1)\pi}{N_y - 1} \right) \tag{5}$$

$$j = 1, 2, \dots, N_y$$

步驟 4：採用應變能法 (SEM)，求得第  $k$  個模態在  $(x_i, y_j)$  位置之無因次化應變能值如下：

$$f_{ijk} = \frac{\int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \phi_{ijk}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy} \tag{6}$$

上式中，分子為在  $(x_i, y_j)$  之局部應變能值，分母為整體結構之應變能值。

步驟 5：定義各  $(x_i, y_j)$  位置之破壞指標  $\beta_{ij}$  如下：

$$\beta_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m f_{ijk}^*}{\sum_{k=1}^m f_{ijk}} \tag{7}$$

其中，分子代表具裂縫板各模態在  $(x_i, y_j)$  無因次化應變能之累加，分母則為無裂縫板之對應

值。在有裂縫存在時，將顯現較大之應變能比值差異，故引用做為破壞指標。

步驟 6：定義正規化破壞指標  $Z_{ij}$  如下：

$$Z_{ij} = \frac{\beta_{ij} - \bar{\beta}_{ij}}{\sigma_{ij,\beta}} \quad (8)$$

其中， $\bar{\beta}_{ij}$  所有破壞指標  $\beta_{ij}$  之平均值， $\sigma_{ij,\beta}$  為其對應之標準差。經此正規化處理之破壞指標可更顯著表現出裂縫之應變能差異性。

步驟 7：圖示表達正規化破壞指標  $Z_{ij}$  之三維圖，具有較大值處，即為預測裂縫所在。

以上步驟，以 MALAB 軟體發展撰寫，與矩形板之基於 SEM 預測程式相同，唯僅需套入對應於如圖 5 所示之環形板為各模態振型值。

#### 4. 結果與討論

本節將探討一典型有、無縫環形板之振動模態特性，接著就前述 Case A~Case D 之不同裂縫形式，引用前節所發展之裂縫位置預測方法，探討具裂縫環形板之裂縫位置預測的可行性。

##### 4.1 環形板振動模態特性分析

表 3 為一典型的有、無縫環形板之模態振型，而表 4 為各模態之自然頻率及其模態數，表 5 則為環形板不同  $(r,\theta)$  模態之物理意義，綜合討論如下：

- (1) 表 3 及表 4 均從第 7 個模態顯示，因為前 6 個模態為典型自由邊界結構之剛體模態，自然頻率均為 0，在此未顯示。
- (2) 由表 4，可知如模態 7、8 及模態 9、10 均為軸對稱模態，理論上其自然頻率應相同，在此僅些微差異，係來自有限元素分析之誤差，由表 3 可看出其模態振型特性相同，僅有旋轉  $90^\circ$  角度之差異。
- (3) 觀察表 3，可得知此環形板有兩種類型之振動模態特性，如表 5 所示，R1 型模態為  $(r,\theta)=(1,2)$  或  $(1,3)$ ，R2 型模態為  $(r,\theta)=(2,0)$  或  $(2,1)$ ，依此原則類比寫出各模態之  $(r,\theta)$  如表 4 所示。
- (4) 本文取環形板前 10 個彈性振動模態，如表 3 所示，進行裂縫預測，其中有 4 個 R1 型模態，有 2 個 R2 型模態。

##### 4.2 環形板裂縫預測結果

表 6 為前述 Case A~Case D 不同裂縫形式之裂縫位置預測結果，討論如下：

- (1) Case A 為不同裂縫位置之預測，由表 6(a) 可看出成功預測其裂縫位置。
- (2) 表 6(b) 為 Case B 對不同裂縫長度之預測結果比較，對於較長裂縫如 Case B3，破壞指標有對應裂縫長度之顯示，而短裂縫造成其圓周方向有多一些雜訊。
- (3) 表 6(c) 為內部裂縫形式之預測結果，對於裂縫位置確實可明顯判斷，唯對於徑向或圓周向裂縫則不易判斷。

(4) 兩個裂縫同時存在時之預測如表 6(d)，大致上均不預測得知裂縫對應位置，對於 Case D3 則內部裂縫之指標比邊緣指標值較低，不過仍可判讀裂縫所在。

(5) 綜合來看，本文所發展之方法於環形板之裂縫位置及長度，有不錯之預測結果。

為了解不同類型模態對此環形板裂縫預測之影響，表 7 為分別探討，僅 R1 型，R2 型以及 R1 與 R2 型模態同時考慮之裂縫預測差異比較，結果說明如下：

- (1) 以僅 R1 型模態進行裂縫預測，並不成功，呈現諸多不正確之錯誤指標值。
- (2) 以僅 R2 型模態進行裂縫預測，大致可預測成功，如 Case A1，會呈現局部之不正確指標，可判斷 R2 型模態對裂縫預測而言是較有效之模態。
- (3) R1 及 R2 型模態一併考慮，可看出有最佳之預測效果，R1 型模態有降低指標雜訊之效果。

#### 5. 結論

本文利用振動模態分析得到環形板模態振型，將無裂縫環形板及裂縫環形板的模態振型值代入破壞預測程式，經由微分積分法(DQM)微分後，代入應變能法(SEM)進行裂縫預測，大致相當成功，綜合結論如下：

1. 由不同裂縫位置、不同裂縫長度、內部裂縫及兩不同裂縫同時發生，以上四種不同破壞形式檢驗，預測程式能有效找出實際之裂縫位置。
2. 不同型態的模態振型對預測程式會影響預測的結果，尤其是 R2 型態的振型值對預測極為重要，在 R1 及 R2 模態振型值共同使用時，可得到最佳的預測結果。
3. 本文利振動之特性進行非破壞分析，以二維環形板結構進行分析驗證，其預測結果相當良好，未來希望能應用於其他結構之裂縫預測。

#### 6. 參考文獻

1. Shi, Z. Y., S. S. Law, and L. M. Zhang Structural Damage Localization from Modal Strain Energy Change. Journal of Sound and Vibration, Vol. 218, No.5, pp. 825-844, 1998.
2. Cornwell, P., S. W. Doebbling, and C. R. Farrar, Application of the Strain Energy Damage Detection Method to Plate-Like Structures. Journal of Sound and Vibration, Vol.224, No. 2, pp. 359-374, 1999.
3. Li, Y. Y., and Yam, L. H., Sensitivity Analyses of Sensor Locations for Vibration Control and Damage Detection of Thin-Plate System, Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 4, pp. 623-636, 2001.
4. Teo, T. M., and K. M. Liew, A Differential Quadrature Procedure for Three-dimensional Buckling Analysis of Rectangular Plates, Journal of Solid and Structures, Vol. 36, pp.1149-1168, 1999.
5. Chondros, T. G., A. D. Dimarogonas, and J. Yao, A Continuous Cracked Beam Vibration Theory. Journal of Sound and Vibration, Vol. 215, No.1, pp.17-34,

- 1998.
6. Xia, Y., and Hao, H., Measurement Selection for Vibration-Based Structural Damage Identification, Journal of Sound and Vibration, Vol. 236, No.1, pp. 89-104, 2000.
  7. Hu, H. W., Wang, B. T., Su, J. S., Application of Modal Analysis to Damage Detection in Composite Laminates, T Proceedings of ESDA04: 7th Biennial Conference on Engineering System Design and Analysis, Manchester, United Kingdom, Paper No.: ESDA2004-58296, 2004.
  8. 王栢村, 曹文昌, 應用有限元素分析與實驗模態分析之結構模型驗證, 中華民國振動與噪音工程學會第十屆學術研討會論文集, 第 131-138 頁, 2002。
  9. 張懷智, 基於模態振型之結構破壞預測發展與驗證, 碩士論文, 國立屏東科技大學機械工程系, 屏東, 台灣, 2006。
  10. 王栢村, 曹文昌, 板結構之裂縫破壞檢測, 中華民國第二十六屆全國力學會議, 論文編號: J024, 虎尾, 台灣, 2002。
  11. Shu, C., and H. Xue, Solution of Helmholtz Equation by Differential Quadrature Method : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 175, pp. 203-212, 1999。

8. 圖表彙整

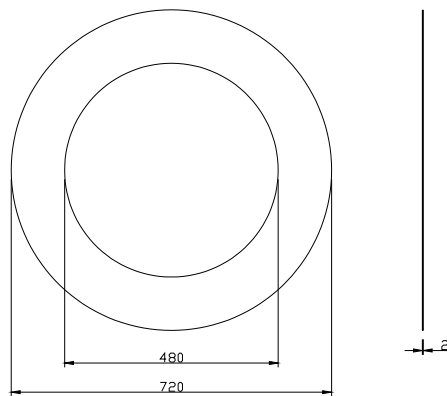
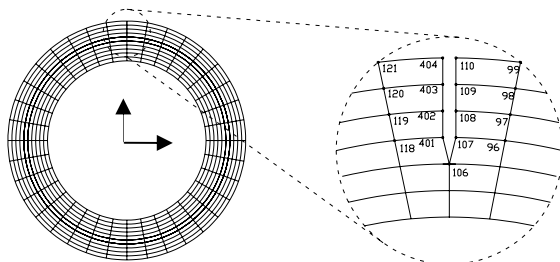
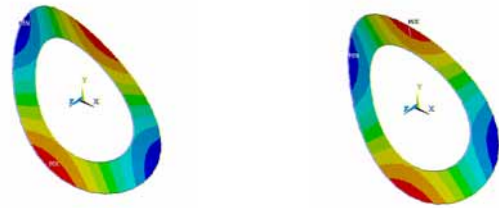


圖 1 環形板尺寸示意圖



(a)有限元素模型分割 (b)裂縫模擬架構

圖 2 有裂縫環形板之有限元素模型



(a)無裂縫環形板模態振型 (b)無裂縫環形板模態振型  
圖 3 自由邊界環形板模態振型圖

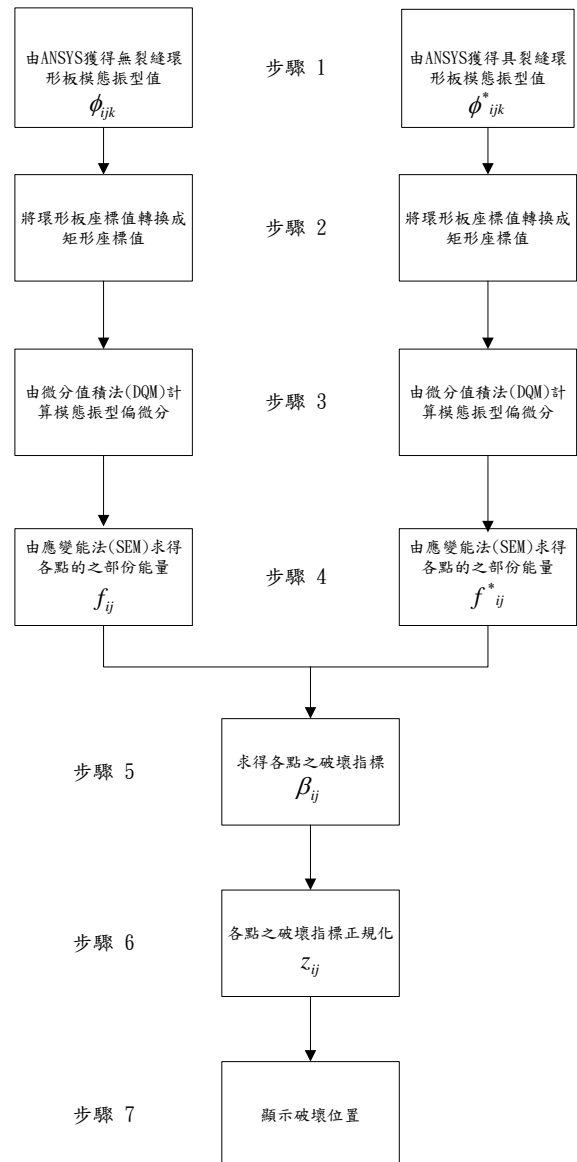
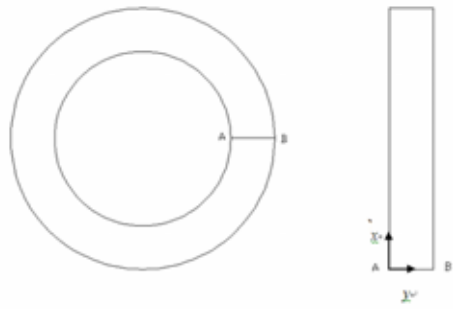


圖 4 破壞預測分析之流程方塊圖



(a)環形板 (b)矩形板  
圖 5 座標值轉換示意圖

表 1 環形板結構材料之尺寸和性質

材料性質	鋼
楊氏係數 $E$	$207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
浦松比 $\nu$	0.3
密度 $\rho$	$7870 \text{ kg/m}^3$
外徑 $D_2$	0.72m
內徑 $D_1$	0.48m
厚度 $t$	0.002m

表 2 各種不同裂縫形式

代號	A1	A2	A3
圖示			
代號	B1	B2	B3
圖示			
代號	C1	C2	C3
圖示			
代號	D1	D2	D3
圖示			

mode	無裂縫環模態振型	有裂縫環模態振型(以 A1 為例)
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		

表 3 無裂縫環形板及有裂縫環形板模態振型

表 4. 模態振型分類表

mode	類別	$f_n(\text{Hz})$	$(r, \theta)$
7	R1-1	14.147	(1,2)對稱-x
8	R1-1	14.153	(1,2)對稱-y
9	R1-2	39.218	(1,3)對稱-x
10	R1-2	39.362	(1,3)對稱-y
11	R2-1	46.509	(2,0)
12	R1-3	75.387	(1,4)對稱-x
13	R1-3	76.234	(1,4)對稱-y
14	R2-2	79.673	(2,1)對稱-x
15	R2-2	79.853	(2,1)對稱-y
16	R1-4	124.502	(1,5)對稱-x

表 5. 模態振型的物理意義

模態振型		
物理意義		
R1 型	$(r, \theta)=(1, 2)$	$(r, \theta)=(1, 3)$
模態振型		
物理意義		
R2 型	$(r, \theta)=(2, 0)$	$(r, \theta)=(2, 1)$

## Crack Position Detection for Annular Plate

Bor-Tsuen Wang<sup>1</sup>, Chien-Cheng Lin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Professor, <sup>2</sup> Graduate Student

Department of Mechanical Engineering  
National Pingtung University of Science and Technology.

### Abstract

This work adopts strain energy method (SEM) as the damage detection index and combines the differential quadrature method (DQM) to develop the crack detection algorithm for 2-D annular plate structure. By performing finite element analysis (FEA), one can obtain the damaged and non-damaged structure modes and mode shapes that are used by the crack detection algorithm to predict the crack's position. The annular plate detection algorithm uses the annular plate mode shapes' first derivatives and second derivatives by DQM and calculates the strain energy index to determine the crack's position. Results show that the crack detection method can exactly predict the crack's position.

**Keywords :** Annular Plate, Differential quadrature method (DQM), Strain energy method (SEM)

表 6 不同裂縫的預測結果

(a) Case A: 裂縫長度固定，裂縫位置不同之預測

代號	A1	A2	A3
裂縫示意圖			
預測結果圖			

(b) Case B: 裂縫位置固定，裂縫長度不同之預測

代號	B1	B2	B3
裂縫示意圖			
預測結果圖			

(c) Case C: 內部徑向及圓周向裂縫之預測

代號	C1	C2	C3
裂縫示意圖			
預測結果圖			

表 6 不同裂縫的預測結果(續)  
(d) Case D: 兩個裂縫同時發生之預測

代號	D1	D2	D3
裂縫示意圖			
預測結果圖			

表 7 不同模態振型之預測結果

徑向裂縫 (以 A1 為例)	僅 R1 模態預測結果	僅 R2 模態預測結果	R1+R2 模態預測結果
圓周向裂縫 (以 C2 為例)	僅 R1 模態預測結果	僅 R2 模態預測結果	R1+R2 模態預測結果