

## 自由邊界網球拍模型之振動特性分析

<sup>1</sup>王栢村 <sup>2</sup>陳建文 <sup>2</sup>莊豐榮 <sup>3</sup>丁麗芬

<sup>1</sup>國立屏東科技大學機械工程系 教授

<sup>2</sup>國立屏東科技大學機械工程系 學生

<sup>3</sup>輔英科技大學體育室 教授

E-mail: wangbt@mail.npust.edu.tw

### 摘要

本研究旨在探討網球拍之振動特性，研究中應用理論及實驗兩種方式，分別對一網球拍進行實驗模態分析與有限元素分析，在有限元素分析中分別採用樑元素模擬網線與立體元素模擬拍框進行分析，再與實驗求得之模態參數進行驗證，可由模態分析所得自然頻率與模態振型，與實驗分析數值作比較驗證，以得到網球拍之分析完整模型，並可作為未來球拍設計之參考。本研究可減少研發測試過程中所耗費之人力與時間，亦可作為其他種球拍之振動分析、設計變更及定義品質之參考。

**關鍵詞：**實驗模態分析，有限元素分析

### 1.前言

隨著新科技的發展，技術不斷的創新，網球拍之研發更是結合了材料與力學等諸多的領域，強調其賽場優勢與球員握拍之舒適性等的多樣產品也隨之問世，其球拍之設計規格及製造更是越來越複雜。歸納一些報告中，其目的就是要取得一個握拍舒適且不易有運動傷害的最佳設計。除了對其拍框的材質、勁度、網線的延展性、截面積等因素均探討外，其各因素之間之作用所造成的影響亦需加以研究。

利用實驗模態分析，可求得實際結構之模態參數，如自然頻率、阻尼比及模態振型。實驗模態分析是使結構於靜止狀態下進行量測。傳統驅動器之選擇分別為衝擊錘或激振器，感應器則以加速度計為主，再將量測所得之訊號輸入頻譜分析儀，透過快速傅立葉轉換處理後即可得頻率響應函數。在丁等人[1]研究透過振動模態實驗的分析方法，蒐集球拍受激振後，所呈現的自然頻率及阻尼比，並分析鈦合金網球拍之振型，藉此了解鈦合金球拍本身固有振動特性。應用衝擊錘對拍柄固定處施以脈衝激振，並以加速規為感應器，擷取空拍框上的激振資料，將所得資料透過電荷放大器、頻譜分析儀與 STAR 模態分析軟體之處理與運算，求出各模態之振型、自然頻率及阻尼比參數。Wang and Lin[12]中了解以結構模態的假定參數知道了一個更重要的結論，諧波激振的加速響應是可測量和預測模型，諧波力對樑的激振響應被推導出來，計算諧波力的振幅和位置以最佳化公式表示之。

在關於網球拍分析中，由相[6]中可知球停留在網線上之時間與網線振動半個週期相同，則可達到較完整之能量轉換，而常見之共振現象，即為作用於系統之外力頻率，與該系統之自然頻率相同所產生之現

象，振動理論即在說明物體之振動型式、週期或頻率及所牽涉之力量。在林[4]中可知不同網線張力對網球拍振動模態之影響，其了解了網球拍拍面局部之正向彎曲勁度會隨者網線張力的增加而增強，並可以比較由丁等人[2]和丁等人[3]裡所做之分析跟實驗數值做相關之驗證，得知若加上網線後其球拍的自然頻率呈現降低之趨勢。相[5]又提到材質、外形、慣量、勁度、網線張力及振動特性等，皆會影響運動狀態，網線之振動對球拍及碰撞過程，就可造成極大影響，網線最主要功能就是將球之動能以彈性能儲存，再將本身動能及此彈性能以振動方式傳送給網球，若球停留在網線上之時間與網線振動半個週期相同，則可達到較完整之能量轉換，使球達到最高反彈速度。

關於阻振擋板，Strode *et al.*[11]評估網球拍線在球拍手柄上的振動擋板振動，了解拍框有典型的基礎頻率在 100 和 200 赫茲之間，當頻率超過 180 個赫茲到手的振動減少，而擋板的使用減少線振動，線振動擋板是有效，可很快吸引人高周波的振動。蕭[8]發現鈦合金網球拍受碰撞時，不論在恢復係數及振動響應的表現均優於非鈦金網球拍，鈦金含量高的網球拍恢復係數及振動響應的表現也優於鈦金含量低的網球拍，故鈦金含量可能是影響球拍勁度的原因之一。

其他相關研究中，Baca[9]概述三度空間的影像覆蓋動畫，利用球的動畫，球拍影響階段，模擬的結果產生不但關於時間的資訊一球拍和球的依賴三度空間的位置和方位，發現有球拍的橫向和扭轉振動和線平面的撓度和球的壓縮，球拍是參數化的，所以球拍的形狀能被改變，其在球拍上模擬的衝擊力和反作用力。Hiroyuki and Mitsuo[10]製作一個二維的機器人學習任務動作的理論，以上下擺動的特點針對網球發球的複雜動作作實驗。相[7]提到關於網球拍振動對手肘之影響，說明了正拍的手肘振動比反拍還要大，雙手反拍比單手反拍的手肘振動還要大，手肘彎曲角度、手腕彎曲角度、手腕橈側彎曲角度、前臂大小與手肘的振動幾乎都有相關，最後由研究可知加強手臂的訓練或是戴上網球肘護具，可以減少振動所造成的傷害，並且打擊時手腕及手肘關節角度互相配合適當，亦可以避免振動的傷害。

本研究以有限元素分析與實驗模態分析兩種方式，進行網球拍自由邊界分析，最後將有限元素法與實驗模態分析之頻率響應函數及模態參數作驗證比較，期望所得之結果能作為網球拍模擬動態分析、設計變更及定義品質之參考指標，能讓球拍使用起來更

為實用、舒適及安全。

## 2.問題描述與分析目標

網球拍之實體結構圖如圖 1 參數如表 1 來作網球拍之振動分析，採用樑元素模擬網線與立體元素模擬拍框來做實體之網球拍模型，球拍框長 49cm 寬 28cm，球拍柄長 19.5cm，本文主要分析目標有：

- (1)進行 FEA 模態分析所得，自然頻率，模態振型。
- (2)進行實驗模態分析與 FEA 作比較驗證。
- (3)建立網球拍之 FEA 模擬技術及分析模型之可靠性。

## 3.有限元素模型

本研究是採用 ANSYS 套裝軟體，以有限元素分析法進行理論分析，以求得模態參數，並與實驗作驗證，網球拍之有限元素模型如圖 2(a)說明如下：

- (1)元素類型：採用三維樑元素(Beam4)模擬網線與立體元素(Solid45)模擬拍框來架構網球拍模型。
- (2)元素分割：簡化之網球拍結構，在有限元素分析時，三維樑元素(Beam4)，以直接架構法定義之，取適當的距離建立網線模擬；而立體元素則衡量適當距離，能與實際結構實際量測的點數分割配合即可。
- (3)位移限制：自由邊界，無需設定任何位移限制。
- (4)負荷條件：進行模態分析時，不必設定任何之外力負荷條件。

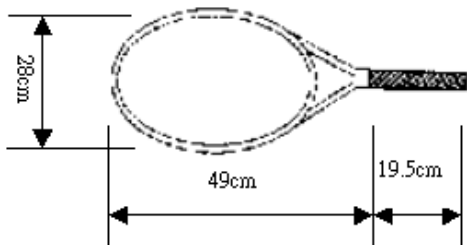


圖 1 實體結構圖

表 1 材料參數

	網線	拍框	握把
楊氏係數 (N/m <sup>2</sup> )	2.418×10 <sup>10</sup>	2.684×10 <sup>10</sup>	1.622×10 <sup>10</sup>
密度(kg/m <sup>3</sup> )	4.4	1632	820
蒲松比	0.2967	0.27012	0.3
截面積(m <sup>2</sup> )	1.2469×10 <sup>-6</sup>		
IZZ(m <sup>4</sup> )	1.2372×10 <sup>-13</sup>		
IYY(m <sup>4</sup> )	1.2372×10 <sup>-13</sup>		
Z(m)	0.00126		
Y(m)	0.00126		
初始應變	0.00737177		

## 4.最佳化分析

由於網球拍的材料性質為不確定之參數，所以在做分析時其材料常數必須經由推衍而得。首先以丁等人[2]所得之數據為依據，再稍微調整楊氏係數與密度等參數，再與實驗所做之自然頻率與模態振型進行比對，當接近一致時，就可推論此模型與實際結構接近相同。

模擬網線張力係以初始應變為樑元素之輸入參數條件，利用力學公式推算之，其力學公式如下：

$$\delta = \frac{PL}{AE_{net}} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{P}{AE_{net}} \quad (2)$$

其中， $P$  為網線的張力， $L$ 、 $A$ 、 $E_{net}$  分別為網線的長度、截面積及楊氏係數， $\varepsilon$  為推算之初始應變，為三維樑元素(Beam4)元素之輸入條件。

而推衍之數據可再進一步用軟體做最佳化分析，以拍框和握把與網線之密度、楊氏係數、蒲松比為設計變數，然而再把先前所得之自然頻率與實驗所得之自然頻率做一誤差，以此誤差作為目標函數使之為最小，故最佳化問題定義如下：

- (1)設計變數：網線： $\rho_{net}$ 、 $E_{net}$ ，拍框： $\rho$ 、 $E$ 、 $\nu$ ，

其中  $\rho$  為密度， $E$  為楊氏係數， $\nu$  為蒲松比。

- (2)目標函數：

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \left( \frac{f_n - \hat{f}_n}{\hat{f}_n} \right)^2 \quad (3)$$

其中  $N$  為對應之模態數， $f_n$  為 FEA 自然頻率值， $\hat{f}_n$  為 EMA 自然頻率值。目標函數為使頻率誤差平方為最小， $N$  為對應之模態數， $f_n$  為 FEA 自然頻率， $\hat{f}_n$  為 EMA 自然頻率。

## 5.實驗步驟與方法

### 5.1 儀器架設

自由邊界是用釣魚線從網拍中心懸吊之，以固定敲擊點移動加速度器的方式進行實驗，固定敲擊之第 20 點為在網拍框中心偏離 X 方向 4.5cm 處如圖 2(b)，偏離中心的原因是為了量測扭矩模態。



(a)有限元素模型 (b)實體圖

圖 2 實驗架構圖

圖 3 實驗量測點規劃

## 5.2 實驗方法

利用衝擊錘作為驅動器，對網球拍框施以激振力，利用加速度計作為感應器，量取結構之頻率響應訊號，透過電壓放大器將訊號傳入雙頻道訊號分析儀，由訊號分析儀對輸入之訊號作快速傅立葉轉換，求得球拍的頻率響應函數和關聯性函數，利用 ME'Scope 軟體架設實驗量測點規劃，如圖 3 為自由邊界的實驗量測點規劃，藉由頻率響應函數求出自然頻率、模態振型及阻尼比。

## 6. 實驗結果與討論

將實驗與理論分析的結果進行比較，探討實驗與理論結果之差異性，並找出振動影響的特性。

### 6.1 自由邊界網球拍之模型驗證

圖 4 實驗之頻率響應函數比較圖，由圖中可看出，實驗結果與曲線嵌合結果接近吻合，代表曲線嵌合正確，圖 4 (a)為敲擊點與量測點不同，但其曲線嵌合接近吻合，圖 4 (b)中敲擊點與量測點相同，而其曲線嵌合接近吻合。

圖 5 為實驗之關聯性函數圖，由其圖 5(a)與圖 5(b)可觀察出，不論其敲擊點與量測點是否相同，除了共振點以外，其關聯性函數都趨近於 1，代表此實際量測球拍結構之頻率響應函數可信度相當高。

由表 2 自由邊界 FEA 與 EMA 自然頻率比較表中，能知其對應的模態為 Z 軸的彎矩、Y 軸的扭矩與網線模態，而未對應到的模態為徑向模態與 X 軸彎矩，因在實驗量測時，主要是量測 Z 軸向之響應，所以 X 軸與徑向模態響應就較小甚至等於零。

表 3 為有限元素分析跟實驗所得相對應之模態振型與物理意義，其結果討論如下：

- (1)在自由邊界 FEA 與 EMA 模態振型比較表中，除了兩個自然頻率誤差大於 10% 以外，其餘誤差皆在 ±10% 以內，此結果相當符合實際，產生誤差的原因有可能為實驗誤差或模型分析的誤差。
- (2)從表中可看出其模態振型的對應相當吻合，如第一彎矩模態等，而模態中未有移動的點稱之為節點，其節點可說是在此自然頻率下模態振型中不動的點。
- (3)所對應的模態是利用 MAC 進行比對，就理論而言，當 FEA 與 EMA 其模態相對應時，其 MAC 數值趨近於 1，因 FEA 所取的點位置與 EMA 不盡相同，是取接近於 EMA 的位置，故部分誤差值較高。
- (4)由表中可明顯的看到網線對應到的模態，及因網線的影響下，其拍框的模態不明顯，必須把網線遮起來看就可對應到實驗的模態振型，如網線模態(1,1)，可知網線未遮時其拍框未變形，網線遮後則拍框成一彎矩模態，與實驗之模態振型吻合。

然而基本上若只看於有限元素分析之比對而不與實驗比對，也可知其模態都是有其相關性的，但還是必須先以實驗來作比較驗證，才可得知其關聯性。

## 7. 結論

本文利用有限元素分析進行理論模態分析，得到網球拍的自由邊界之自然頻率與模態振型，並進行實驗與理論的比對驗證。

實驗所得的自然頻率與模態振型與理論分析的大致相同，唯有理論得到的幾個特殊結果與實驗無法對應，如 X 方向的彎矩模態與徑向模態，因在實驗量測時，主要是量測 Z 軸向之響應，所以 X 軸與徑向模態響應就較小甚至等於零，而模型驗證裡除了兩個自然頻率誤差大於 10% 以外，其餘誤差皆在 ±10% 以內。

本研究可減少研發測試過程中所耗費之人力與時間，亦可作為其他種球拍之振動分析、設計變更及定義品質之參考。

表 2 自由邊界 FEA 與 EMA 自然頻率比較表

模態	FEA		EMA		物理意義	誤差 %
	自然頻率(Hz)	模態	自然頻率(Hz)	模態		
7	142.2	1	139		Z(1)	2.3
8	156.2				X(1)	
9	333.6	2	347		Y(1)	-3.86
10	397.9	3	390		Z(2)	2.03
11	473.6				X(2)	
12	528.2	4				-4.48
		5	633			
13	735.4	6	765		Z(3)	-3.87
14	750.1				X(3)	
15	960.7	7	788		Y(2)	21.9
		8	872			
		9	905			
16	1020				X(4)	
17	1054				R1	
18	1174				R2	
19	1246	10	1140		Z(4)	9.3
		11	1180			
		12	1410			
20	1328	13	1420		(1,2)	-6.49
		14	1530			
21	1594				R3	
		15	1660			
		16	1860			
22	1672	17	1920		Y(3)	-12.9

註：Z1：Z 軸第一彎矩，Y1：Y 軸第一扭矩，X1：X 軸第一彎矩，R1：拍框徑向模態 1，(1,1)：網線模態(1,1)

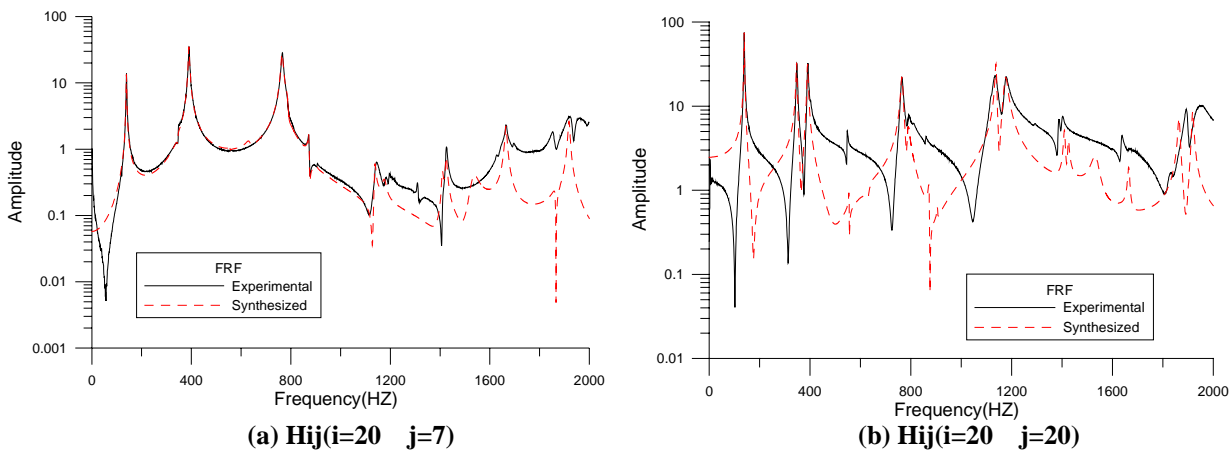


圖 4 自由邊界實驗與合成之頻率響應函數圖

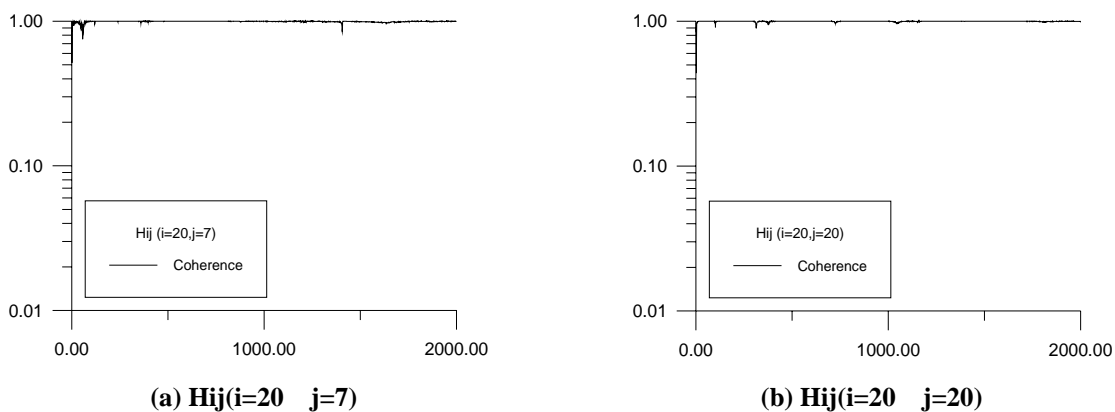


圖 5 自由邊界實驗之關聯性函數圖

表 3 自由邊界 FEA 與 EMA 模態振型比較表

FEA			EMA			頻率誤差%	MAC
模態	自然頻率(Hz) 物理意義	模態振型	模態	自然頻率(Hz)	模態振型		
7	142.2 Z(1)		1	139		2.3	0.83
9	333.6 Y(1)		2	347		-3.9	0.86

表 3 自由邊界 FEA 與 EMA 模態振型比較表(續)

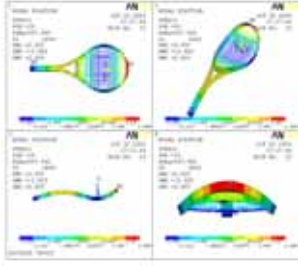
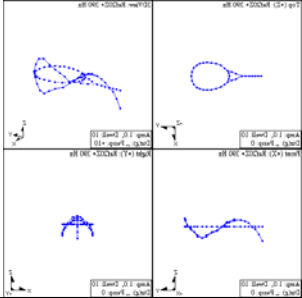
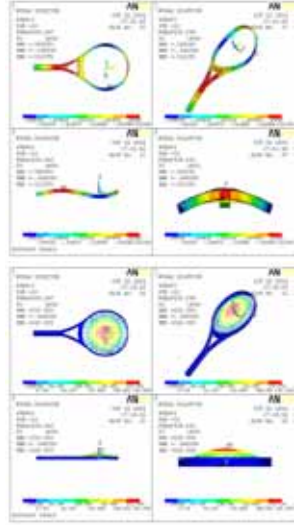
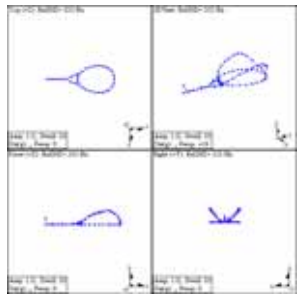
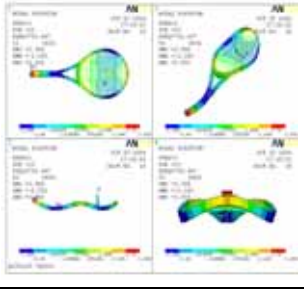
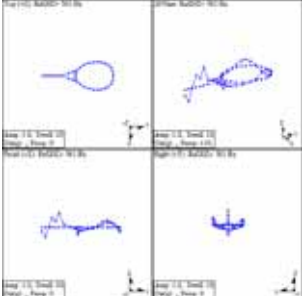
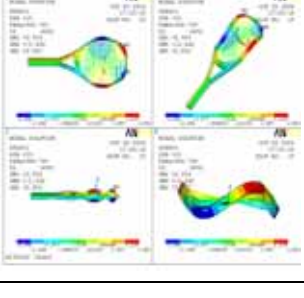
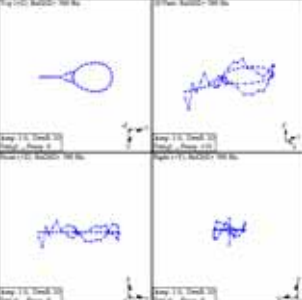
FEA			EMA			頻率誤差%	MAC
模態	自然頻率(Hz) 物理意義	模態振型	模態	自然頻率(Hz)	模態振型		
10	397.9 Z(2)		3	390		2.03	0.86
12	528.2 (1,1)		4	553		-4.5	0.46
13	735.4 Z(3)		6	765		-3.9	0.53
15	960.7 Y(2)		7	788		21.9	0.6

表 3 自由邊界 FEA 與 EMA 模態振型比較表(續)

FEA			EMA			頻率誤差%	MAC
模態	自然頻率(Hz) 物理意義	模態振型	模態	自然頻率(Hz)	模態振型		
19	1246 Z(4)		10	1140		9.3	0.56
20	1328 (1,2)		13	1420		-6.5	0.65
22	1672 Y(3)		17	1920		-12.9	0.73

註：Z1：Z 軸第一彎矩，Y1：Y 軸第一扭矩，X1：X 軸第一彎矩，R1：拍框徑向模態 1，(1,1)：網線模態(1,1)

### 8. 參考文獻

- [1] 丁麗芬, 林寶城, 林啟川, 謝富秀, 高英傑, “鈦金網球拍之振動模態分析”, *北體學報*, 第 10 期, 第 9-21 頁, 2002。
- [2] 丁麗芬, 王栢村, 林寶成, 張家華, 陳柏宏, 「網球拍之模態特性驗證」, *教練科學*, 第 2 期, 第 29-40 頁, 2003。
- [3] 丁麗芬, 王栢村, 林寶成, 張家華, 陳柏宏, 「有無網線球拍之動態特性分析」, *大專體育學刊*, 第 13-25 頁, 2003。
- [4] 林寶城, 「不同網線張力對網球拍振動模態之影響」, 第 13 屆亞洲運動科學研討會論文, 曼谷, 泰國, 第 1-108 頁, 1998。
- [5] 相子元, 「有限元素法於運動器材之應用」, *體育學報*, 第 26 卷, 第 129-136 頁, 1998。
- [6] 相子元, 「網球拍振動之有限元素分析」, *國立體育學院論叢*, 第 2 卷, 第 29-38 頁, 1997。
- [7] 相子元, 「網球拍振動對手肘(網球肘)之影響」, *行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告*, 計畫編號: NSC 88-2314-B-179-001, 1999。
- [8] 蕭美珠, 「不同網球拍擊球之動力響應分析」, *北體學報*, 第 9 期, 第 83-95 頁, 2001。
- [9] Baca, A., “Application of Computer Animation Techniques for Presenting Biomechanical Research Results,” *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 28, pp 449-454, 1998.
- [10] Hopkins, C., “Statistical Energy Analysis of Coupled

Plate Systems With Low Modal Density and Low Modal Overlap,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, pp 193-214, 2002.

- [11] Strode, C. L., Noble, L., and Walker, H. S., “The Effect of Tennis Racket String Vibration Dampers on Racket Handle Vibrations and Discomfort Following Impacts,” *Journal of Sports Sciences*, Vol. 17, pp 379-385, 1999.
- [12] Wang, B. T., and Lin, K. Y., “Prediction of Harmonic Force Acting on Cantilever Beam,” *Proceedings of the 18th International Modal Conference, Dearborn, Michigan*, No. 64, Session 3, 2004.

### **Vibration Characteristic Analysis of Tennis Racket in Free Boundary**

Bor-Tsuen Wang, Li-Fen Ting, Jian-Wen Chen,  
Feng-Rong Zhuang

Department of Mechanical Engineering  
National Pingtung University of Science and Technology  
Fooyin University

E-mail: wangbt@mail.npust.edu.tw

#### **Abstract**

This work aims to study the vibration characteristics of a tennis racket by both analytical and experimental approaches. Experimental modal analysis (EMA) and finite element analysis (FEA) are respectively performed to obtain modal parameters of the racket. In FEA, beam elements are used to simulate the string, and solid elements are applied to construct the racket. The natural frequencies and mode shapes can be obtained from theoretical modal analysis and compared with those modal from experiments to validate the analytical modal of the tennis racket. The verified modal will be beneficial to the design of tennis racket. This work not only provides the analytical technique but also enhances understanding of vibration characteristic for tennis racket.

keywords : experimental modal analysis, finite element analysis