

## 不同材料模型於碳纖維之機械性質探討

<sup>1</sup>王栢村 <sup>2</sup>廖學任 <sup>2</sup>李建興

<sup>1</sup>國立屏東科技大學機械工程系教授

<sup>2</sup>國立屏東科技大學機械工程系大學部學生

E-mail: [wangbt@mail.npust.edu.tw](mailto:wangbt@mail.npust.edu.tw)

### 摘要

本文結合有限元素分析與實驗模態分析以求得碳纖維高爾夫球桿之等效數學模型，並探討其機械性質。驗證方法首先分別以等向性材料模型、正向性材料模型、以及非等向性材料模型，等三種不同材料模型建構碳纖維球桿之有限元素模型以進行模態分析，進一步分別求得球桿在自由邊界條件與固定邊界條件之自然頻率與模態振型。並做碳纖維球桿實驗量測經曲線嵌合所擷取出的模態參數與有限元素分析進行比對驗證。以實驗量測所得球桿之自然頻率為基準，進行最佳化分析，使有限元素分析與實驗量測之自然頻率吻合，比對驗證求得球桿之楊氏係數、蒲松比、剪力模數，探討其材料機械性質，進而建立球桿之等效數學模型。未來可將以機械性質所建立之數學模型應用於含球頭之高爾夫球桿之應力或振動特性之應用分析。

**關鍵詞：**有限元素分析、實驗模態分析、等向性材料模型、正向性材料模型、非等向性材料模型

### 1. 前言

隨著生活品質的提升，高爾夫球運動漸漸不再只是貴族運動，無論是高爾夫球員或玩家，對高爾夫球具的品質越來越重視，造就了高爾夫球桿市場的擴大，同時，為降低生產成本，國內外紛紛對高爾夫球桿無論在材料、品質等各方面皆有多方面的探討與研究。就目前以球桿的使用狀況而言，從早期的木桿、鐵桿，一直發展至今的複合材質，多年來得成果相當可觀。由於碳纖維複合材料的研發使用，其高強度、高韌性、重量輕的優越材料特性，也被應用使用在高爾夫球桿上。碳纖維球桿由於材料疊層過於複雜，過去幾年對碳纖維高爾夫球桿部分的機械性質分析並無詳細的參考資料，故在研究上頗具重大意義與發展。

對高爾夫球桿的分析常使用的方法是有限元素分析及實驗模態分析，在王和黃[1]利用有限元素分析來對三種不同單獨的高爾夫球桿進行模態分析分別求取其模態參數，並與實驗模態分析所求得之模態參數進行比較驗證，再進行有限元素模型之修正，結果顯示相當吻合。王等人[2]利用實驗模態分析求得材料之自然頻率，再配合半點能量法與阻尼比修正法，進而求得材料之楊氏係數。王等人[3]首先以三維立體元素建構球桿之有限元素模型，進行簡諧響應分析可得頻率響應函數。王和黃[4]利用實驗進行模態分析，求得有握把及無握把之高爾夫球桿的模態參數，並將實驗結果做比對，以探討握把的有無對高爾夫球桿品質的影響。王和黃[5]以三種不

表 1 碳纖維球桿基本資料

桿長 (mm)	最大外徑 (mm)	最大內徑 (mm)	最小外徑 (mm)	最小內徑 (mm)	桿重 (g)	密度 (kg/m <sup>3</sup> )
1016	15.12	12.74	9.44	4.60	82.5	1516.857

同球頭來做有限元素分析及實驗模態分析，做有限元素分析以求得模態參數，並與實驗模態分析所求取球桿之模態參數進行比較驗證，以期獲得定義球桿品質的方法。劉等人[6]利用有限元素分析來對三種不同單獨的高爾夫球桿進行模態分析以求得模態參數，並與實驗模態分析所求取球桿之模態參數進行比較驗證，主要探討球桿在實驗模態分析求得甜蜜區之範圍。璩等人[7]主要對高爾夫球桿木桿頭作特性分析，藉由實驗模態分析得模態參數。利用振型來界定甜蜜區的位置，所用的方法主要對高爾夫球桿的品質鑑定有很大幫助。

除了傳統的實驗模態分析外，在 Hocknell et al. [8] 利用非接觸式雷射振動儀及電子光束干涉技術求得空心高爾夫球頭之振動模態特性，藉以驗證有限元素分析所得之結果正確性。Pelz [9]建立了一個其專屬的資料庫，以及能改善碳纖維桿有限元素模型的分析，以使得將來在進行此類實驗時能有一個數學上的依據以做印證與改進。

其他對碳纖維複合材質性質探討的有 Hwang and Chang [10]對鋁與碳纖維樹脂複合材做實驗，對鋁的實驗著重於比較邊界條件在完全自由的情況下與一端固定的情況下，分別得到彈性係數的差異量，結果顯示在越接近固定端的位置，兩種邊界條件分別得到的彈性係數值的差異量越大。而對碳纖維樹脂複合材的實驗是著重於比較不同尺寸、內部堆疊關聯性的情況下，分別對彈性係數的求取有何影響。由結果顯示，以上兩種不同的情況，對所得的彈性係數值並無影響。

本文主要是針對碳纖維球桿作機械性質的分析探討，以求得碳纖維球桿的理論分析等效模型。

### 2. 問題定義與分析目標

取一不含球頭及握把之碳纖維高爾夫球桿，其基本資料如表 1，並規劃量測點數，如圖 1 所示，長度部分分為 20 點，圓形面等分成 8 個角度方向量測，進行有限元素分析與實驗模態分析比對驗證。本文主要求出球桿分別在自由邊界與固定邊界於三種不同材料模型之材料機械性質參數，包括楊氏係數、蒲松比、剪力模數，進而可比對驗證出等效數學模型，並探討其機械性質。

### 3. 有限元素分析

本文採用 ANSYS 套裝軟體對碳纖維高爾夫球桿作有限元素分析。以三維線性立體元素(SOLID45)分別架構等向性、正向性、非等向性三種不同有限元素

材料模型，於各材料模型中所設定之材料參數，在等向性材料模型包含  $E_x$ 、 $\nu_{xy}$ ，在正向性材料模型中包含  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $G_{xy}$ 、 $\nu_{xy}$ ，在非等向材料模型中包含  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$ 、 $G_{xy}$ 、 $G_{yz}$ 、 $G_{xz}$ 、 $\nu_{xy}$ 、 $\nu_{yz}$ 、 $\nu_{xz}$ 。元素分割在長度方向分割 19 等分、圓柱等分割 8 等分、厚度部分分割 2 等分，使用 Mapped Mesh 之分割方式。為探討並驗證材料機械性質，考慮以下兩種不同邊界條件：

- (1)自由邊界：有限元素模型如圖 2(a)所示，無位移限制條件設定。
- (2)固定邊界：握把處之有限元素模型如圖 2(b)所示，由於實際球桿握把處並非完全固定，故於球桿有限元素模型中之握把處取出上下左右四個點，加上三維線性旋轉彈簧元素 (COMBIN 14)，其彈簧勁度為  $K_N$  (N/m)，以模擬實際固定之狀態。

### 4. 實驗模態分析

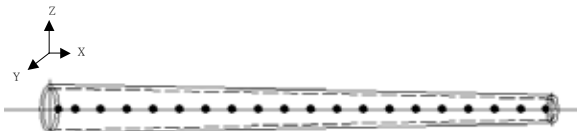
為求得碳纖維球桿之材料機械性質，除了以有限元素作理論分析，更加以設計實驗分析來與理論分析互相比對驗證。為求實驗之正確性與合理性，分別採用靜態實驗模態分析與動態實驗模態分析。

#### 4.1 靜態實驗模態分析

圖 3(a)為靜態實驗模態分析實驗架構示意圖，圖 3(b)為實驗儀器設備。如圖 3(b)所示，靜態模態分析係以衝擊錘為激振器，以加速度計為感測器，透過訊號分析儀，經過傅立葉轉換求得頻率響應函數與關連性函數。實驗過程中量測頻寬範圍均在 2000Hz 內。靜態實驗模態分析中，又分為自由邊界及固定邊界條件。

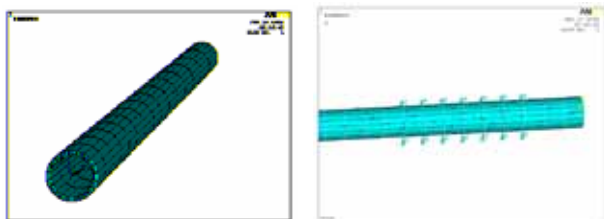


(a)實際球桿



(b)球桿點數規劃

圖 1 所選用之碳纖維高爾夫球桿

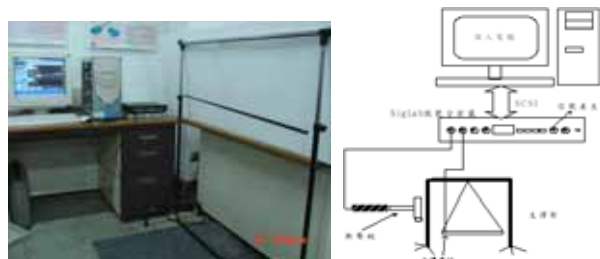


(a)有限元素分割示意圖 (b)有限元素固定邊界模型  
圖 2 不同邊界之有限元素模型分割示意圖

在自由邊界下，圖 4 為碳纖維球桿自由邊界量測示意圖。如圖 3(a)所示，將碳纖維球桿以釣魚線懸吊，呈現自由邊界狀態。球桿設定座標軸於 YZ 平面上之圓周部分以-Z 方向為原點，分別以順時針方向分為 0°、45°、90°、135°、180°、225°、270°、315°等 8 個角度方向，在各角度之長度 X 方向等分成 20 個點數。

使用衝擊錘敲擊，經過加速度計之感應，透過訊號分析儀，經過傅立葉轉換求得頻率響應函數與關連性函數。將頻譜分析所得之頻率響應函數經 ME'Scope 曲線嵌合軟體可得到結構之自然頻率、模態振型、及阻尼比。為與有限元素分析所得之自然頻率與模態振型做比對驗證，於是進行以下 3 種實驗方式：

- (1)free-free-single：示意圖如圖 5(a)，其中黑點為加速度計，箭號為衝擊錘示意。加速度計所固定之角度方向隨衝擊錘量測角度方向而變動，便可得到球桿各方向角度之頻率響應函數，目的在於證明碳纖維桿的非等向性材料特性。
- (2)free-free-Z：示意圖如圖 5(b)，其中黑點為加速度計，箭號為加速度既固定之方向。固定加速度計於原點，移動衝擊錘量測 8 個角度方向，每個方向 20 個規劃點，故量測了在整體球桿 Z 方向上共 160 點的頻率響應函數。
- (3)free-free-Y：示意圖如圖 5(c)，其中黑點為加速度計，箭號為加速度既固定之方向。固定加速度計於相對原點的 Y 方向，移動衝擊錘量測 8 個角度方向，每個方向 20 個規劃點，故量測了在整體球桿 Y 方向上共 160 點的頻率響應函數。



(a)實驗儀器設備與架構圖 (b)實驗架設示意圖  
圖 3 實驗儀器設備

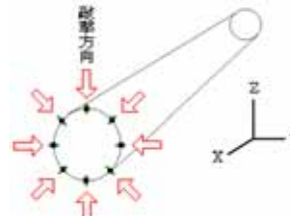
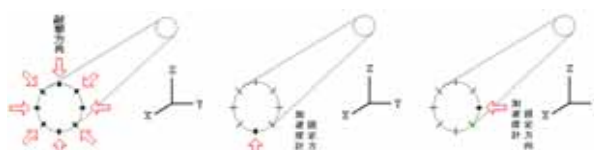


圖 4 碳纖維球桿自由邊界量測示意圖



(a)free-free-single (b)free-free-Z (c)free-free-Y  
圖 5 靜態實驗模態量測於自由邊界條件

在固定邊界下，圖 6 為碳纖維球桿固定一端之實際狀況。如圖 6 所示，相對於自由邊界之實驗方法，固定邊界係以海綿墊包覆於握把處，並使用虎鉗固定之。此外，球桿設定座標軸於 YZ 平面上之圓周部分以-Z 方向為原點，分別以順時針方向分為 0°、90°、180°、270° 等 4 個角度方向，在各角度之長度 X 方向等分成 20 個點數。同樣為與有限元素分析比對驗證，亦進行兩種實驗方式：

- (1)fixed-free-Z：示意圖如圖 7(a)，其中箭號為衝擊垂量測之方向，使其固定於原點，移動加速度計量測 4 個角度方向，每個方向 20 個規劃點，故量測了在整體球桿 Z 方向上共 80 點的頻率響應函數。
- (2)fixed-free-Y：示意圖如圖 7(b)，其中箭號為衝擊垂量測之方向，使其於相對原點的 Y 方向，移動加速度計量測 4 個角度方向，每個方向 20 個規劃點，故量測了在整體球桿 Y 方向上共 80 點的頻率響應函數。

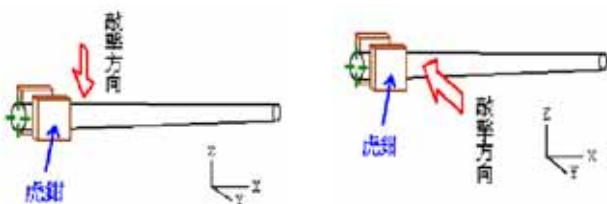
#### 4.2 動態實驗模態分析

動態實驗模態分析有別於傳統靜態實驗模態分析，其說明如下：

- (1)圖 8 為動態實驗模態分析實驗架構示意圖。如圖 8 所示，碳纖維球桿以固定邊界狀態分析，將碳纖維夾持一端，以振動試驗機做動態模態量測分析。輸入一隨機訊號波至振動試驗機，則分別可量測到 Y、Z 方向的頻率響應函數，進而直接得知兩方向之自然頻率所在，可與靜態模態量測中 fixed-free 邊界狀態分析做比較驗證。
- (2)在動態模態分析中，可以閃頻器直接觀察到碳纖維高爾夫球桿之模態振型，可與相同邊界條件之有限元素分析及靜態實驗模態分析所得之模態振型做驗證。



圖 6 固定一端邊界實際夾持狀態



(a)fixed-free-Z (b) fixed-free-Y  
圖 7 靜態實驗模態量測於固定邊界條件

#### 5. 最佳化分析

圖 9 為本研究最佳化分析之流程與概念，由實驗模態分析經曲線嵌合所得的自然頻率為基準，與有限元素分析中的最佳化分析來做比對驗證，可得到與真實碳纖維桿之等效性數學模型，進而求出碳纖維桿之材料機械性質。

目的在於找到 swing、droop 兩組不同方向的材料機械性質，其中包含楊氏係數、蒲松比、剪力模數，依不同材料模型設定又有不同之材料性質參數。使有限元素分析出模態特性之自然頻率，與實驗模態分析量測出的自然頻率的誤差值不超過 5%。在最佳化分析中，所設定條件為：

- (1)目標函數：

$$\phi = \sum_{n=1}^4 \left( \frac{f_i - \hat{f}_i}{\hat{f}_i} \right)^2 \quad (1)$$

以最小誤差平方法使誤差範圍在±5%之間。其中， $\hat{f}_i$  為實驗所得之自然頻率， $f_i$  為有限元素分析所得之自然頻率。

- (2)設計變數：分別在三種不同材料模型中各有不同設計變數，其中等向性為  $E_x$ 、 $\nu_{xy}$ ，正向性為  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $G_{xy}$ 、 $\nu_{xy}$ ，非等向性為  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$ 、 $G_{xy}$ 、 $G_{yz}$ 、 $G_{xz}$ 、 $\nu_{xy}$ 、 $\nu_{yz}$ 、 $\nu_{xz}$ 。



圖 8 動態實驗模態量測於振動試驗機上

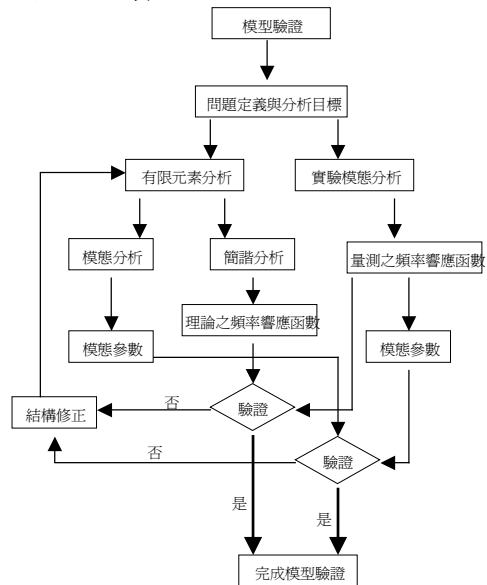


圖 9 最佳化分析比對驗證流程

表 2 free-free-single 所求之自然頻率

角度 方向	自然頻率(Hz)				
	Mode	Mode	Mode	Mode	Mode
0°	82.7	225	443	733	1090
45°	83.1	225	444	733	1090
90°	83.1	226	445	735	1100
135°	82.8	225	444	736	1090
180°	82.8	225	443	733	1090
225°	83	225	444	733	1090
270°	83	226	444	735	1100
315°	82.8	225	443	735	1090

## 6. 結果與討論

有限元素分析與實驗模態分析,可針對球桿分等向性材料特性之驗證、模型驗證、不同邊界條件比較、等效材料模型之選用比較等四大項討論之。

### 6.1 球桿非等向性材料特性之驗證

碳纖維球桿係由碳纖維布經疊層後捲曲而成,由於球桿之幾何模型為對稱形狀,為求所選用碳纖維球桿探討之意義與否,在研究對象的選用及其材料特性便相當重要。表 2 為實驗 free-free-single 所得之自然頻率,其討論如下:

- (1) 可觀察到所選用球桿於各對邊方向角度中所量測的自然頻率在低頻部份均有所差異。同對邊角度例如 0°、180°之自然頻率各為 82.7Hz 及 82.8Hz; 90°、270°之自然頻率各為 83.1Hz 及 83Hz。
- (2) 由此訊息可得知碳纖維球桿雖為幾何對稱模型,但其材料性質卻非為等向性材料,顯示非等向性材料模型之需要性

### 6.2 模型驗證

最佳化分析可比對驗證球桿模型,獲其實際機械性質,進而得到球桿等效數學模型,主要以自由邊界為比對驗證之基準,表 3 為三種不同材料模型於碳纖維之機械性質其中在等向性材料模型中的材料參數有  $E_x$ 、 $\nu_{xy}$ , 在正向性材料模型中的材料參數有  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $G_{xy}$ 、 $\nu_{xy}$ , 在非等向性材料模型中的材料參數有  $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$ 、 $G_{xy}$ 、 $G_{yz}$ 、 $G_{xz}$ 、 $\nu_{xy}$ 、 $\nu_{yz}$ 、 $\nu_{xz}$ 。

就實驗誤差與實驗品質而言,圖 10 為頻率響應函數性與關連性函數對應。其中中可得到實驗模態分析之頻率響應函數實驗曲線與軟體軟體綜合曲線之嵌合情形非常吻合,顯示實驗模態分析之正確性。由關聯性函數曲線可觀察值趨近於 1, 則表示實驗過程中品質的良好。

就自然頻率而言,驗證出材料機械性質後,進一步比較有限元素分析中三種不同材料模型與實驗模態分析之差別。表 4 為碳纖維高爾夫球桿於自由邊界狀態下自然頻率之比較。討論如下:

- (1) 在三種不同材料模型與實驗量測比較中,可觀察出理論與實驗所求之自然頻率誤差值均不起

過±5%。

- (2) 其中,以非等向性材料模型平均誤差最小,誤差值為-0.08%。
- (3) 正向性材料模型平均誤差位居其次,誤差值為-0.49%。
- (4) 平均誤差最大為等向性材料模型,誤差值高達 1.15%。

在所驗證之機械性質之正確性方面,表 5 為碳纖維高爾夫球桿於固定邊界狀態下自然頻率之比較。討論如下:

- (1) 球桿於固定邊界下,三種不同材料模型中之自然頻率,係由自由邊界中所驗證之機械性質套入固定邊界條件中,所得之有限元素自然頻率。
- (2) 除了三種不同材料模型的自然頻率,並分別與靜態、動態實驗模態分析經曲線嵌合所求得之自然頻率作比較,其誤差值皆於±5%間,顯示高度之吻合性。

就模態振型比對而言,為進一步瞭解球桿之振動特性,可從其模態振型觀察之。其討論如下:

- (1) 從表 6 中發現桿身除了在自然頻率的對應誤差在±1%之間,在其對應之理論模態振型與實際模態振型亦有相當高的吻合度。
- (2) 表 7 中 MAC 比對結果發現理論模態振型與實驗模態振型之對應點振幅比例關係無論在 Y 或 Z 方向均接近 1, 表示理論模態振型與實驗模態振型成比例關係,亦證明了材料機械性質的正確性。

### 6.3 不同邊界條件比較

主要針對有限元素分析以及實驗模態分析於自由邊界與固定邊界之比較探討,在有限元素分析中,表 8 為有限元素分析於不同邊界比較。討論如下:

- (1) 有限元素分析中,球桿於自由邊界狀態的最低彈性模態自然頻率為 82.407Hz,於固定邊界狀態的最低彈性模態自然頻率則為 16.880Hz。
- (2) 就模態振型比對而言,振型相同的模態,球桿之自然頻率在固定邊界會比在自由邊界來的高,平均約高出 19.33%,此現象為固定一端之等效彈簧邊界所致。

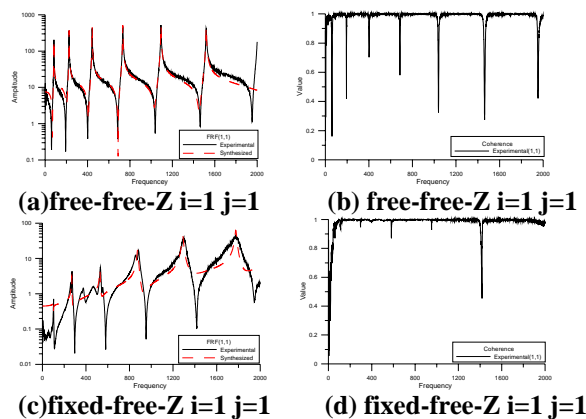


圖 10 頻率響應函數性與關連性函數

表 3 三種不同材料模型之材料性質

材料模型	等向性 -Isotropic-	正向性 -Orthotropic-	非等向性 -Anisotropic-
材料機械性質	$E_x = 5.8496 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $\nu_{xy} = 0.34537$	$E_x = 5.8496 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $E_y = 1.9825 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $G_{xy} = 1.0186 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $\nu_{xy} = 0.34537$	$E_x = 5.7968 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $E_y = 5.7715 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $E_z = 5.55 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $G_{xy} = 3.1336 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $G_{yz} = 3.3560 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $G_{xz} = 2.1269 \times 10^{10}$ (N/m <sup>2</sup> ) $\nu_{xy} = 0.49917$ $\nu_{yz} = 0.44723$ $\nu_{xz} = 0.26496$

表 4 碳纖維高爾夫球桿於自由邊界狀態下自然頻率之比較(頻率單位: Hz)

模型 模態	實驗量測	對應模態	等向性材料模型	誤差(%)	正向性材料模型	誤差(%)	非等向性材料模型	誤差(%)
Z, 1	82.7	7	83.303	0.73	82.172	-0.64	82.407	-0.35
Y, 1	82.6	8	83.303	0.85	82.172	-0.52	82.427	-0.20
Z, 2	226	9	228.85	1.26	226.82	0.36	226.31	0.14
Y, 2	226	10	228.85	1.26	226.82	0.36	226.40	0.18
Z, 3	443	11	447.85	1.09	442.76	-0.05	442.73	-0.01
Y, 3	444	12	447.85	0.87	442.76	-0.28	443.05	-0.21
Z, 4	733	13	739.48	0.88	728.64	-0.59	730.76	-0.31
Y, 4	735	14	739.48	0.61	728.64	-0.86	731.55	-0.47
Z, 5	1090	15	1103.6	1.19	1082.9	-0.65	1090.1	0.00
Y, 5	1090	16	1103.6	1.19	1082.9	-0.65	1091.8	0.01
Z, 6	1520	17	1540.0	1.32	1503.7	-1.07	1520.5	0.03
Y, 6	1520	18	1540.0	1.32	1503.7	-1.07	1523.7	0.24
平均誤差 (%)			1.05		-0.49		-0.08	

表 5 碳纖維高爾夫球桿於固定邊界狀態下自然頻率之比較(頻率單位: Hz)

模型 模態	實驗靜態量測	振動試驗機量測	誤差 (%)	對應模態	等向性材料模型	誤差 (%)	正向性材料模型	誤差 (%)	非等向性材料模型	誤差 (%)
Z, 1		20		3	16.941		16.910		16.880	
Y, 1		20		4	16.946		16.915		16.881	
Z, 2	100	100	0.00	5	100.48	0.48	100.24	0.24	100.11	0.11
Y, 2	101	100	-0.90	6	100.49	-0.50	100.25	-0.74	100.14	-0.85
Z, 3	268	260	-2.90	7	275.64	2.85	274.65	2.48	274.63	2.47
Y, 3	270	275	1.85	8	275.65	2.09	274.65	1.72	274.79	1.77
Z, 4	528	540	2.27	9	533.25	0.99	530.33	0.44	531.40	0.64
Y, 4	528	535	1.33	10	533.26	1.00	530.34	0.44	531.87	0.73
Z, 5	874	885	1.26	11	867.78	-0.71	861.05	-1.48	865.12	-1.02
Y, 5	877	885	0.91	12	867.88	-1.04	861.16	-1.81	866.04	-1.25
Z, 6	1290	1325	2.71	13	1261.2	-2.23	1249.2	-3.18	1257.8	-2.56
Y, 6	1300	1365	5.00	14	1261.3	-2.98	1249.3	-3.90	1259.5	-3.12
平均誤差 (%)			1.15		0.01		0.50		0.21	

表 6 自由邊界條件下有限元素分析與實驗模態分析之振型比較

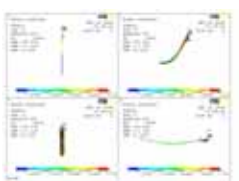
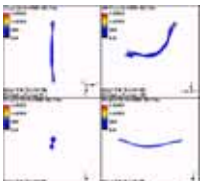
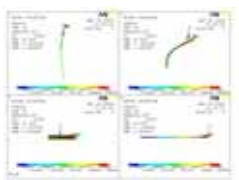
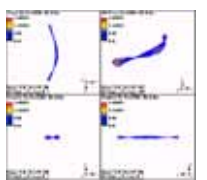
模態	自然頻率(Hz)	有限元素分析模態振型	物理意義	模態	自然頻率(Hz)	實驗模態分析振型	物理意義	頻率誤差
7	82.407		Z 軸第 1 彎矩	Z, 1	82.7		Z 軸第 1 彎矩	-0.35%
8	82.427		Y 軸第 1 彎矩	Y, 1	82.6		Y 軸第 1 彎矩	-0.20%

表 6(續) 自由邊界條件下有限元素分析與實驗模態分析之振型比較

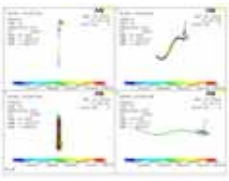
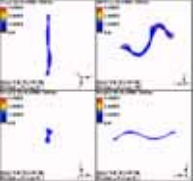
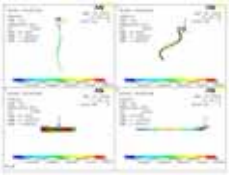
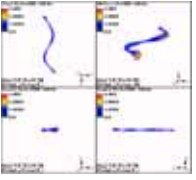
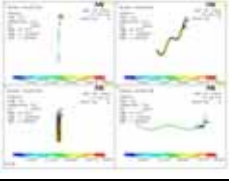
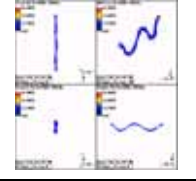
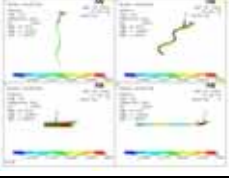
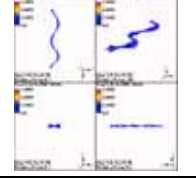
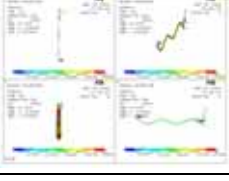
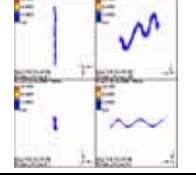
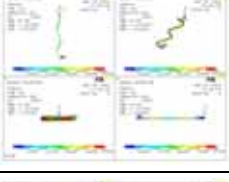
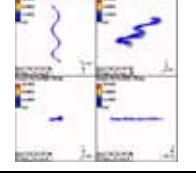
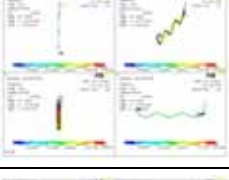
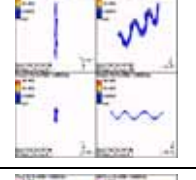
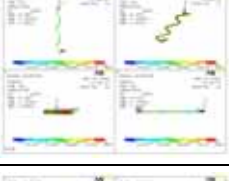
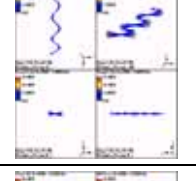
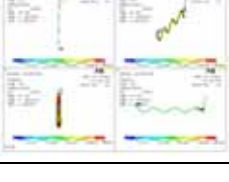
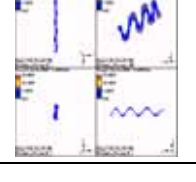
模態	自然頻率(Hz)	有限元素分析模態振型	物理意義	模態	自然頻率(Hz)	實驗模態分析振型	物理意義	頻率誤差
9	226.31		Z 軸第 2 彎矩	Z, 2	226		Z 軸第 2 彎矩	0.14%
10	226.40		Y 軸第 2 彎矩	Y, 2	226		Y 軸第 2 彎矩	0.18%
11	442.73		Z 軸第 3 彎矩	Z, 3	443		Z 軸第 3 彎矩	-0.01%
12	443.05		Y 軸第 3 彎矩	Y, 3	444		Y 軸第 3 彎矩	-0.21%
13	730.76		Z 軸第 4 彎矩	Z, 4	733		Z 軸第 4 彎矩	-0.31%
14	731.55		Y 軸第 4 彎矩	Y, 4	735		Y 軸第 4 彎矩	-0.47%
15	1090.1		Z 軸第 5 彎矩	Z, 5	1090		Z 軸第 5 彎矩	0.00%
16	1091.8		Y 軸第 5 彎矩	Y, 5	1090		Y 軸第 5 彎矩	0.01%
17	1520.5		Z 軸第 6 彎矩	Z, 6	1520		Z 軸第 6 彎矩	0.03%

表 6(續) 自由邊界條件下有限元素分析與實驗模態分析之振型比較

模態	自然頻率(Hz)	有限元素分析模態振型	物理意義	模態	自然頻率(Hz)	實驗模態分析振型	物理意義	頻率誤差
18	1523.7		Y 軸第 6 彎矩	Y, 6	1520		Y 軸第 6 彎矩	0.24%

表 7 有限元素分析與實驗模態分析MAC、MSF比對

(a)MAC -free-free-Z

Mode	8	10	12	14	16	18
Y, 1	0.932	0.0167	0.0253	0.0003	0.0244	0.00004
Y, 2	0.00423	0.949	0.0281	0.0547	0.00102	0.0214
Y, 3	0.0007	0.0393	0.871	0.0232	0.0313	0.00006
Y, 4	0.00593	0.00471	0.0349	0.822	0.0814	0.0657
Y, 5	0.00666	0.00497	0.00234	0.0593	0.729	0.0947
Y, 6	0.00725	0.00477	0.0122	0.0039	0.0908	0.645

(b)MAC --free-free-Y

Mode	7	9	11	13	15	17
Z, 1	0.934	0.0317	0.0328	0.00653	0.023	0.00188
Z, 2	0.00001	0.95	0.0322	0.0576	0.0005	0.0178
Z, 3	0.00971	0.00001	0.886	0.08	0.0585	0.0113
Z, 4	0.00586	0.0175	0.0281	0.856	0.0502	0.116
Z, 5	0.0162	0.00591	0.00122	0.0263	0.772	0.0998
Z, 6	0.0109	0.00852	0.0152	0.0164	0.0443	0.694

表 8 有限元素分析於不同邊界比較

自由邊界			固定邊界			頻率差異(%)
模態	自然頻率(HZ)	物理意義	模態	自然頻率(HZ)	物理意義	
			3	16.880	Z 軸第 1 彎矩	
			4	16.881	Y 軸第 1 彎矩	
7	82.407	Z 軸第 1 彎矩	5	100.11	Z 軸第 2 彎矩	21.48
8	82.427	Y 軸第 1 彎矩	6	100.14	Y 軸第 2 彎矩	21.49
9	226.31	Z 軸第 2 彎矩	7	274.63	Z 軸第 3 彎矩	21.35
10	226.40	Y 軸第 2 彎矩	8	274.79	Y 軸第 3 彎矩	21.37
11	442.73	Z 軸第 3 彎矩	9	531.40	Z 軸第 4 彎矩	20.03
12	443.05	Y 軸第 3 彎矩	10	531.87	Y 軸第 4 彎矩	20.05
13	730.76	Z 軸第 4 彎矩	11	865.12	Z 軸第 5 彎矩	18.39
14	731.55	Y 軸第 4 彎矩	12	866.04	Y 軸第 5 彎矩	18.38
15	1090.1	Z 軸第 5 彎矩	13	1257.8	Z 軸第 6 彎矩	15.38
16	1091.8	Y 軸第 5 彎矩	14	1259.5	Y 軸第 6 彎矩	15.39

表 9 實驗模態分析於不同邊界比較

邊界狀態 模態	自由邊界			對應模態	固定邊界			頻率差異 (%)
	自然頻率 (Hz)	阻尼比 (%)	累加平均阻尼 (%)		自然頻率 (Hz)	阻尼比 (%)	累加平均阻尼 (%)	
Z, 1	82.7	0.15	0.150	Z, 2	100	0.33	0.33	20.92
Y, 1	82.6	0.09	0.120	Y, 2	101	0.34	0.335	22.28
Z, 2	226	0.10	0.113	Z, 3	268	0.59	0.42	18.58
Y, 2	226	0.13	0.118	Y, 3	270	0.58	0.46	19.47
Z, 3	443	0.13	0.120	Z, 4	528	0.55	0.478	19.19
Y, 3	444	0.04	0.106	Y, 4	528	0.59	0.497	18.92
Z, 4	733	0.11	0.107	Z, 5	874	0.59	0.51	19.24
Y, 4	735	0.11	0.108	Y, 5	877	0.48	0.506	19.32
Z, 5	1090	0.12	0.108	Z, 6	1290	0.54	0.51	18.35
Y, 5	1090	0.09	0.107	Y, 6	1300	0.45	0.504	19.27

在實驗模態分析部分,表 9 為實驗模態分析於不同邊界比較。討論如下：

- (1) 球桿於自由邊界狀態的最低彈性模態自然頻率為 82.7Hz, 於固定邊界狀態的最低彈性模態自然頻率則由於實驗過程中, 在低頻部份做曲線嵌合時由於峰值過低無法擷取, 故無法觀察其實驗前兩個軸對稱彈性模態及其自然頻率。
- (2) 就模態振型比對來說, 振型相同的模態, 球桿之自然頻率在固定邊界會比在自由邊界來的高, 平均約高出 19.5%, 此現象為邊界之夾持效應所致。

- (3) 由於固定邊界因邊界夾持, 所以球桿於固定邊界之阻尼比亦大於自由邊界。

### 6.4 等效材料模型之選用比較

將最佳化分析所得三種不同材料模型之材料機械性質, 套入有限元素分析中自由邊界與固定邊界條件中, 分別均可得到三種不同的等效數學模型, 對於材料模型之選用比較, 就自然頻率資訊, 表 4 為碳纖維高爾夫球桿於自由邊界狀態下自然頻率之比較, 討論如下：

- (1) 以等向性材料模型架構有限元素模型過於理想化, 所得自然頻率平均誤差為 1.05%。
- (2) 在正向性材料模型中, 經比對驗證所得的機械性質其誤差又比等向性材料來的精準些, 其自然頻率平均誤差為-0.49%。
- (3) 非等向性材料模型架構有限元素模型來代表真實球桿之等效數學模型便相當符合, 所得自然頻率平均誤差為-0.08%, 幾乎取代實際碳纖維。
- (4) 但由表 5 可觀察到三種不同材料模型於球桿固定邊界條件中反而以等向性材料模型最能代表實際模型, 但由其模態振型之 MAC 比對所得知結果品質偏低, 其原因在於實際夾持狀況未明, 故在等效材料模型的選用, 以非等向性材料模型之建立為主。

未來相關分析過程中, 目的在於減少實驗耗費時

間、提升分析品質，由上述可知，以非等向性材料模型來表示球桿之等效數學模型，其自然頻率平均誤差在於-0.08%，既準確且合理，是為分析時可優先考慮之模型架構參考。

## 7. 結論

本文針對有限元素中針對三種不同材料模型的架構，對球桿在不同邊界條件下之機械性質做探討。在與實驗模態分析經由最佳化分析做比對驗證後，分別各得到等向性、正向性、非等向性三種材料模型之材料機械性質，可得到以下幾點結論：

- (1) 本文結合了有限元素分析與實驗模態分析，經最佳化分析後便得到球桿之機械材料性質，進而比對驗證出等效數學模型。
- (2) 經本研究對有限元素中三種不同材料模型的驗證討論，證實球桿的模擬分析中，為提高準確性，以非等向性材料模型來架構有限元素模型是有必要的。
- (3) 本文也探討了球桿於自由邊界與固定邊界下，其振動特性之差異，有助於未來球桿之設計分析參考。

## 8. 參考文獻

- [1] 王栢村，黃瑞光，1999，「高爾夫球桿振動模態參數之測定」，*中華民國第二十三屆全國力學會議*，新竹市，第 457-464 頁。
- [2] 王栢村，趙志燁，吳建德，1999，「應用實驗模態分析於高爾夫球頭素料之材料性質測定」，*國立屏東科技大學學報*，第八卷，第四期，第 311-317 頁。
- [3] 王栢村，洪延庭，劉文全，2003，「碳纖維高爾夫球桿材料機械性質探討」，*第十一屆中華民國振動與噪音工程學術研討會*，基隆，第 63-69 頁。
- [4] 王栢村，黃瑞光，2000，「握把對高爾夫球桿特性影響之分析」，*第二十四屆全國力學會議*，桃園，論文編號：J-17。
- [5] 王栢村，黃瑞光，2000，「不同球頭之高爾夫球桿振動特性及品質之探討」，*第八屆中華民國振動與噪音工程學術研討會*，屏東，第 209-216 頁。
- [6] 劉健烽，黃必偉，劉立晟，2001，「高爾夫球桿振動品質指標之探討」，*2001 年國立屏東科技大學論文集*，國立屏東科技大學機械工程系，第 16-1-16-16 頁。
- [7] 璩春暉，蔡鋒儒，劉建志，2001，「高爾夫球木桿振動品質特性分析」，*2001 年國立屏東科技大學論文集*，國立屏東科技大學機械工程系，第 12-1-12-11 頁。
- [8] Hocknell, A., Mitchell, S. R., Jones, R., and Rothberg, S. J., 1998, "Hollow Golf Club Head Modal Characteristics: Determination and Impact Application," *Journal of Transportation Engineering*, Vol. 38 pp. 173-180.
- [9] Pelz, D., 1990, "Science Equipment Development and Standard," *Proceedings of the First World Scientific*

*Congress of Golf 9-13<sup>th</sup>*, pp. 264-269.

- [10] Hwang, S. F., and Chang, C. S., 2000, "Determination of Elastic Constants of Materials by Vibration Testing," *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 183-190.

## Discussion on Mechanical Properties of FRP Golf Shaft for Different Material Models

Bor-Tsuen Wang, Hsueh Ren Lioa, Jian Hsing Li  
Department of Mechanical Engineering  
National Pingtung University of science and Technology

### Abstract

This paper adopts finite element analysis (FEA) and experimental modal analysis (EMA) to obtain the equivalent mathematical model of a FRP golf shaft, respectively. The FE model of golf club is first constructed considering three different material models, including isotropic, orthotropic, and anisotropic. Theoretical modal analysis is then performed to determine the structure modal parameters for both free-free and fixed-free boundary conditions. EMA is also performed to experimentally extract modal parameters of the golf shaft, including natural frequencies, mode shapes and damping ratios. Based on the experimentally measured modal parameters, optimum analysis is performed to predict the Young's modulus, Poisson ratio and Shear modulus such that both analytical and experimental modal parameters agree with each others, and so forth the equivalent FE model can be validated and further applied to other stress and vibration analysis of the golf club with the head.

**Keywords:** finite element analysis, experimental modal analysis, isotropic, orthotropic, anisotropic.