

具拉伸應力效應之小提琴琴弦振動模態分析與驗證

王栢村^{1*}、龍曄²、蘇秉翔¹、馬凱齡¹、吳盈輝³

¹ 國立屏東科技大學機械工程系, 屏東, 台灣

² 國立屏東科技大學木材科學與設計系, 屏東, 台灣

³ 國立內埔高級農工職業學校機械科, 屏東, 台灣

E-mail: wangbt@mail.npust.edu.tw (通訊作者*)

摘要: 琴弦為小提琴主要結構之一, 其發聲路徑由琴弦振動, 再傳遞至琴橋、面板與音箱, 最後產生小提琴獨特音色。為了模擬分析探討小提琴的振動模態與聲音特性, 有必要發展琴弦受拉伸預應力效應之振動模態分析模型。本文針對實際小提琴的琴弦進行模型驗證, 於有限元素分析中, 建立了琴弦不同層次的分析模型, 以漸進方式有效的驗證琴弦預應力效應之影響, 包括: 單一琴弦、琴橋邊界、多條琴弦以及琴弦與面板結構耦合等分析模型, 並詳細介紹不同分析模型的建構理念與設定方式。結果顯示, 琴弦自然頻率及所對應的模態振型, 與實驗量測之琴弦振動相吻合, 振動頻譜響應也有合理對應, 驗證了受拉伸預應力效應之琴弦與小提琴琴身耦合分析模型的可靠性, 未來可引用本文建立的琴弦受預應力模擬方法, 進行整支小提琴之振動模態與聲音特性探討。

關鍵詞: 小提琴琴弦; 模型驗證; 振動模態

1. 前言

小提琴為弦樂器一種, 其發聲機制由弓拉奏琴弦, 琴弦振動傳遞至琴橋面板, 最後使音箱產生共振, 進而發出小提琴特有聲音。琴弦為小提琴主要結構之一, 張等人[1]研究小提琴弓弦系統, 將小提琴放置於全息光學防震台上, 並透過高速攝影機進行琴弦振動量測, 比對拉弦與撥弦的振動特性, 結果顯示, 琴弦振動狀態區分為正程與逆程, 拉弓力道也會影響琴弦振動。王等人[2]進行吉他弦研究, 探討吉他弦振動特性, 也針對木吉他與電吉他的聲音特性探討, 使用實驗模態分析量測吉他弦振動, 發現加速規黏貼於琴弦會造成質量效應, 其自然頻率會增加; 木吉他聲音主要依靠音箱結構擴音, 電吉他無音箱結構, 因此兩者音色明顯不同。

為了瞭解琴弦振動特性, 因此進行琴弦模型驗證, 模型驗證區分為實驗量測與有限元素分析。Lu. [3]進行小提琴面板模型驗證, 進行了有限元素分析(Finite Element Analysis, FEA)與實驗模態分析(Experimental Modal Analysis, EMA), 變更有限元素模型材料參數與幾何, 將傳統木材雲杉更改為複合材料碳纖維, 結果顯示複合材料之自然頻率會高於傳統木材, 面板厚度降低則會產生低頻響應。王等人[4]進行了吉他模型驗證, 建立吉他有限元素模型並與 EMA 量測結果比較, 模態振型對應並非十分良好, 推測是因有限元素模型忽略吉他內部支撐結構, 造成模態振型對應較不良, 並透過實驗模態振型得知, 吉他結構背板響應較面板與琴頭大, 推測是加速規放置位置影響。

EMA 為實驗量測結構模態參數手法之一, George.

[5] 進行小提琴八重奏的實驗模態分析, 透過自動衝擊錘激振, 使用掃描激光都卜勒振動計進行量測, 並取得腔體模態 A_0、A_1 以及彎曲模態 B_1、B_2, 結果顯示 B_1 模態出現於所有八重奏小提琴中, A_1 模態為主木板共振引起。王等人[6]進行實驗模態分析與操作模態分析(Operational Modal Analysis, OMA)探討, 分別對於振動平台進行實驗量測, EMA 是將加速規黏貼於平台上量測平台振動訊號, 由衝擊錘激振平台; OMA 是將加速規分別黏貼於平台上與振動試驗機上, 一顆為量測平台振動訊號, 另一顆為參考點, 量測振動試驗機激振訊號, 結果顯示 EMA 適合量測結構靜止狀態, OMA 適合量測結構運轉中狀態, 最後驗證 OMA 可以取得結構模態參數。王等人[7]進行小提琴琴弦操作模態分析, 人為撥奏琴弦, 並使用雷射位移計量測琴弦振動訊號, 也提出了 OMA 實驗步驟與數據分析手法, 透過 OMA 數據分析解決因人為撥奏力道不穩定, 結果顯示, 透過 OMA 可以取得琴弦結構位移模態振型。

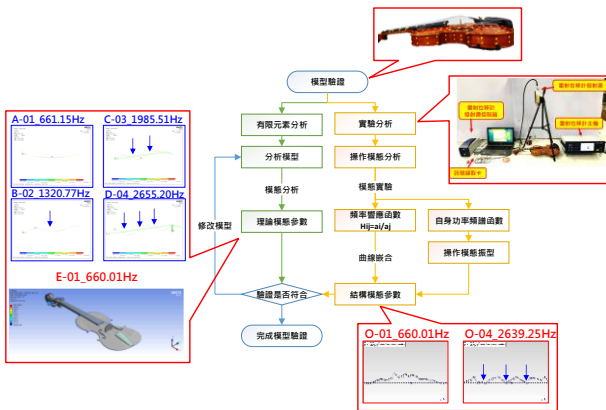
接著進行琴弦振動特性探討, 對於材料參數變更。Aditanoyo et al. [8]研究竹製小提琴與木製小提琴, 探討不同材質製作小提琴其聲音特性, 為了降低人為實驗誤差, 因此開發了自動拉弦機, 可以控制拉弦速度、弓與琴橋距離與拉弦力道。透過聲音頻譜圖可以了解, 竹製與木製小提琴低頻響應最大, 但竹製小提琴在中頻響應較高頻大。Jasson. [9]進行了琴橋幾何對於小提琴振動與聲音特性探討, 準備不同尺寸琴橋, 進行實驗量測, 將小提琴振動頻譜圖之峰值訂為 P1、P2 與 BH, 為後續進行比較之基準, 結果顯示, 琴橋間距減小會降低 BH 斜率並增加其量值, 驗證琴橋間距會改變小提琴振動與聲音特性。

為了探討小提琴琴弦振動模態特性, 本文進行小提琴琴弦模型驗證, 使用 OMA 方法進行小提琴琴弦實驗量測; 並利用理論振動分析, 計算琴弦受預應力效應之自然頻率; 接著透過有限元素分析建立了不同分析模型, 針對分析設定, 幾何、材料參數、邊界、接觸邊界進行確認。最後比較琴弦實驗模態參數與理論模態參數, 達到琴弦模型驗證。未來可運用於含琴弦小提琴模型驗證與其振動模態與聲音特性探討。

2. 小提琴琴弦模型驗證理念

本節介紹小提琴琴弦模型驗證理念, 圖一為小提琴琴弦模型驗證流程圖, 首先模型驗證區分為有限元素分析與實驗分析兩區塊。

有限元素分析建立小提琴琴弦分析模型, 透過模態分析, 取得理論模態參數, 包含: 自然頻率與模態振型。



圖一：小提琴琴弦模型驗證流程圖

本文實驗方式使用操作模態分析，透過模態實驗取得琴弦振動之頻率響應函數與自身功率頻譜密度函數，可使用曲線嵌合得到琴弦模態參數，包含：自然頻率、模態振型與模態阻尼比。本文是使用自身功率頻譜密度函數，取得琴弦操作模態振型 (Operational Deflection Shape, ODS)，接著得到峰值對應模態參數。

接著驗證理論模態參數與結構模態參數是否吻合，不吻合則修改分析模型；吻合則完成模型驗證，確認得到等效於小提琴琴弦之分析模型。最後進行不同模型模態分析取得理論模態參數，再進行簡諧分析，於 E 弦上輸入 Z 方向 -1(N) 力，求得理論頻率響應函數。

3. 小提琴琴弦振動分析

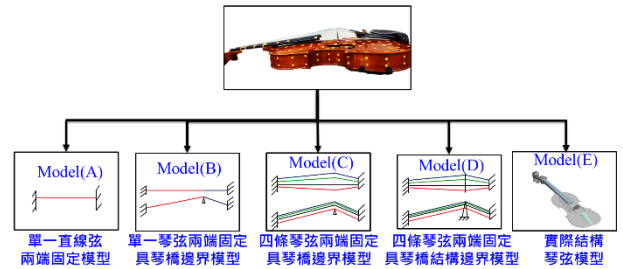
本文使用有限元素分析與理論振動分析，探討小提琴琴弦振動模態特性。

3.1. 有限元素分析

本節介紹小提琴琴弦有限元素分析設定，為了確認分析過程是正確的，因此建立了5種不同型的分析模型。圖二為小提琴琴弦不同有限元素模型圖。

Model(A)為單一直線兩端固定模型，為最初的小提琴琴弦模型，是一條琴弦兩端設為固定邊界，主要探討琴橋到琴頭的琴弦，沒有探討琴橋邊界的影響。

Model(B)為單一直線兩端固定具琴橋邊界模型，實際琴弦為拉弦板延伸至琴頭，中間有橫跨琴橋，因此本模型加入了琴橋邊界效應，主要探討拉弦板到琴頭的琴弦，兩端設定固定邊界，琴弦與琴橋邊界接觸部分加上位移限制，探討琴橋邊界影響。



圖二：小提琴琴弦不同有限元素模型圖

Model(C)為四條琴弦兩端固定具琴橋邊界模型，與Model(B)不同的是有加入四條琴弦，因四條琴弦所對應張力值均不同，Model(C)為確認四條琴弦是否受到各自琴弦張力影響，主要探討有限元素分析中預應力設定手法。

Model(D)為四條琴弦結構兩端固定具琴橋結構邊界模型，與Model(C)差異部分為加入了琴橋結構，為了與實際小提琴結構相同，探討琴弦結構加上琴橋結構，由原本的設定邊界改成直接與琴橋結構接觸。

Model(E)為實際小提琴琴弦結構模型，主要加上琴頭、拉弦板與面板結構，以符合實際小提琴結構。透過設定不同分析模型，確認分析過程中，預應力設定、邊界設定、接觸設定及幾何變更對於琴弦之影響。

琴弦是由樑元素BEAM188建構，其餘結構，琴橋、琴頭、拉弦板與面板結構均以立體元素Solid185建構。表一為小提琴琴弦材料參數總表，材料參數主要分為3個部分，第1部分為幾何參數，設定直徑與長度；第2部分為材料參數，設定楊氏係數、蒲松比與密度；第3部分為分析參數，包含應變值、應力值與張力值。

本文主要探討E弦，E弦為四條琴弦內最細琴弦，其材料為鋼弦，因琴弦較細所受的張力值較其餘三條琴弦高。分析軟體中預應力是使用應變值進行設定，因此琴弦受張力值需先轉換成應變值，其方程式如下：

$$\epsilon_0 = \frac{\delta}{L} \quad (1)$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (2)$$

$$T = \frac{P}{A} \quad (3)$$

其中， P 為琴弦張力， A 為琴弦截面積， T 為應力， E 為楊氏係數， L 為琴弦長度， δ 為變形量， ϵ_0 為應變值。

表一：小提琴琴弦材料參數總表

		G弦	D弦	A弦	E弦	單位
幾何參數	直徑(d)	0.812	0.733	0.577	0.257	mm
	長度(L)	0.33	0.33	0.33	0.33	m
材料參數	楊氏係數(E)	40.9	48.44	49.03	210	GPa
	蒲松比(ν)	0.4	0.4	0.4	0.27	
	密度(D)	4750	2600	2550	7700	kg/m ³
分析參數	應變值(ϵ_0)	0.001851	0.001952	0.00424	0.00695	
	應力(T)	75,729,277.80	94,550,976.00	207,882,960.00	1,459,500,000.00	MPa
	張力(P)	39.19	39.87	54.33	75.67	N

表四：小提琴E弦不同分析模型與OMA之自然頻率總表

E弦 mode	OMA			FEA								
	f_r (Hz)	頻率 比例	Model(A) (Hz)	誤差(%)	Model(B) (Hz)	誤差(%)	Model(C) (Hz)	誤差(%)	Model(D) (Hz)	誤差(%)	Model(E) (Hz)	誤差(%)
1	660.01	1.000	661.15	0.173	660.26	0.038	661.47	0.222	663.13	0.473	660.19	0.027
2	1320.02	2.000	1322.55	0.192	1320.77	0.059	1323.22	0.241	1326.54	0.494	1319.50	-0.039
3	1980.01	3.000	1984.43	0.223	1981.76	0.091	1985.51	0.277	1990.49	0.529	1979.70	-0.016
4	2639.25	3.999	2647.05	0.296	2643.49	0.161	2648.6	0.354	2655.2	0.604	2642.60	0.127
5	3302.38	5.004	3310.64	0.250	3306.19	0.115	3312.84	0.317	3321.15	0.568	3305.50	0.094

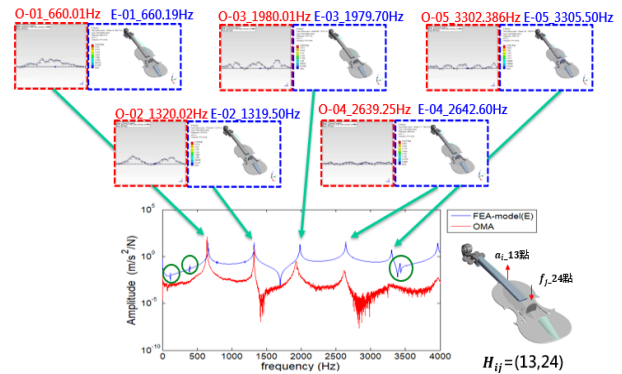
Model(C)為四條琴弦兩端固定具琴橋邊界模型，探討不同琴弦張力值設定，因幾何有變更，因此自然頻率誤差有些微變高，最高誤差為0.35%。Model(D)為四條琴弦結構兩端固定具琴橋結構邊界模型，加入了琴橋結構，琴橋結構影響琴弦自然頻率，誤差最高為0.60%。最後是Model(E)為實際小提琴琴弦結構模型，加入了拉弦板、琴頸與面板結構，自然頻率誤差最高為0.12%，皆低於其餘分析模型，推測是因Model(E)幾何最符合實際小提琴結構，因此自然頻率誤差最低。

表五為琴弦不同分析模型與OMA之模態振型總表，表格分為OMA實驗量測與FEA之模態振型，FEA包含Modal(A)、Modal(E)，其節點位置使用箭頭進行標示，結果顯示FEA與OMA實驗量測模態振型物理意義均有吻合。

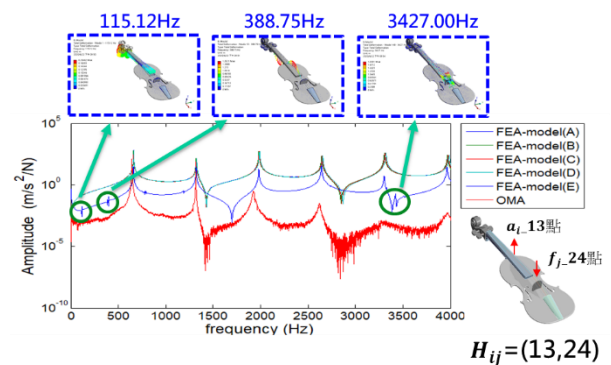
表五：琴弦不同分析模型與OMA之模態振型總表

mode	OMA	FEA	
	(Hz)	Model(A) (Hz)	Model(E) (Hz)
1	660.01	661.15	660.19
2	1320.02	1322.55	1319.50
3	1980.01	1984.43	1979.70
4	2639.25	2647.05	2642.60
5	3302.38	3310.64	3305.50

簡諧分析部分，圖六為小提琴E弦頻率響應函數圖，包含OMA實驗量測曲線與Model(E)分析所得頻率響應函數曲線，其輸入點為E弦上第24點，輸出點為E弦上第13點。實驗與分析曲線峰值均有對應，其模態振型物理意義均相同，但Model(E)曲線有出現一些小峰值。圖七為E弦不同分析模型與頻率響應函數比較圖，將Model(A)~(E)分析所得頻率響應函數曲線與OMA實驗曲線重疊，發現只有Model(E)有出現小峰值，Model(A)~(D)均沒有出現多於峰值，Model(E)與其餘分析模型不同處為增加了拉弦板、琴頸與面板結構，將Model(E)峰值115.12Hz、388.75Hz、3427.00Hz對應ODS列出，可以看到主要振動為琴頸與面板結構帶動E弦振動。而Model(A)~(D)因無琴頸與面板結構，因此不會有峰值產生，而實際小提琴結構因有側板與背板固定面板，因此沒有出現琴頸與面板帶動琴弦振動之模態。



圖六：小提琴E弦頻率響應函數圖



圖七：E弦不同分析模型頻率響應函數比較圖

6. 結論

本文進行小提琴琴弦模型驗證與振動特性探討，首先有限元素分析建構了不同分析模型，並透過理論振動分析計算琴弦受張力效應之自然頻率，再搭配 OMA 實驗量測進行模型驗證，最後取得等效於小提琴琴弦之有限元素模型與其琴弦對應之張力值，其結論如下：

1. 有限元素分析建立琴弦的不同分析模型，分析琴弦受張力效應影響，探討了琴橋邊界、琴橋結構邊界、琴弦兩端邊界與實際小提琴結構模型差異，結果顯示琴頸與面板結構會影響琴弦振動模態。
2. 針對琴弦進行理論振動分析計算自然頻率，與 OMA 實驗量測琴弦自然頻率進行比較，結果顯示兩者誤差最高為 0.13%，驗證理論振動分析所計算張力值是正確的，與實驗量測自然頻率相同。
3. 透過 OMA 量測琴弦振動特性，取得琴弦實驗模態參數，接著與有限元素分析所得理論模態參數進行驗證，最後得到等效於實際小提琴琴弦之分析模型。
4. 未來可以依照本文小提琴琴弦預應力設定方式，進行含琴弦效應之小提琴振動模態與聲音特性探討。

研究經費:本研究經費由科技部提供，計畫編號：MOST-108-2221-E-020-018。

參考文獻

- [1] 張承忠，葉邦彥，梁立東，胡習之，趙學智，“小提琴弓弦系統的振動型態及振動機理研究”，*振動工程學報*，3，359-365 (2015)。
- [2] 王栢村，蘇集銘，“吉他弦之振動與聲音探討”，*中華民國音響學會第十九屆學術研討會論文集*，台南，論文編號：A7(2006)。
- [3] Y. Lu, “Comparison of Element Method and Modal Analysis of Violin Top Plate,” *Master Thesis, University of McGill, Canada*. (2013).
- [4] 王栢村，黃國棟，“吉他之振動特性與模態分析”，*中華民國音響學會第十七屆學術研討會論文集*，高雄，第 197-205 頁(2004)。
- [5] G. Bissinger, “Modal Analysis of a Violin Octet,” *J. Acoust. Soc. Am*, 113(4), 2105-2113 (2003).
- [6] 王栢村，黃俞憲，“應用實驗模態分析與操作模態分析於平台模型驗證之探討”，*機械技師學刊*，2(1)，1-7 (2009)。
- [7] 王栢村，龍暉，蘇秉翔，馬凱齡，吳盈輝，“小提琴琴弦之操作模態分析於位移模態振型量測”，*2020 第18屆精密機械與製造科技研討會*，屏東，論文編號：A034(2020)。
- [8] T. Aditanoyo, I. Prasetiyo, and I. B. A. Putra, “Study on Vibroacoustics Characteristics of Bamboo-based Violin,” *Proced. Eng*, 170, 286-292 (2017).
- [9] E. V. Jansson, “Violin Frequency Response-bridge mobility and Bridge feet distance,” *Appl. Acoust*, 65(12), 1197-1205 (2004).
- [10] 王栢村，*振動學*，全華書局，台北(2008)。

Vibration Modal Analysis and Verification of Violin Strings with Tension Pre-stressed

Bor-Tsuen Wang¹, Way Long², Bing-Shiang Su¹, Kai-Ling Ma¹, Ying-Hui Wu³

¹Department of Mechanical Engineering, National Pingtung University of Science and Technology

²Department of Wood Science and Design, National Pingtung University of Science and Technology

³Machinery Division, National Senior Agricultural-Industrial Vocational School

E-mail: wangbt@mail.npust.edu.tw (Corresponding author*)

Abstract: Strings are of importance for violin which sound radiation from the string vibration, transmitted to bridge, top-plate, resonant box and, finally, radiated the unique violin sound. For the simulation of violin structural vibration and sound radiation, vibration analysis of the string subjected to tension pre-stressed effect needs to explore and examine the string modal properties. This work presents model verification for the violin string. In finite element analysis (FEA), several progressive models are constructed to verify the effective simulation of string tension, bridge boundary, multiple strings, and top-plate interaction effects. The modeling techniques and settings in each model are detailed. Results show the string natural frequencies and corresponding mode shapes are quite comparable with experiments as well as string vibration spectrum response. The practical finite element model of violin string with pre-stressed tension effect is validated and can be adopted to perform the whole set of violin analysis in considering vibration modes and sound response.

Keywords: violin string ; model verification ; vibration mode