

## 樑結構受隨機外力之頻譜響應分析

王栢村<sup>1</sup>、吳盈輝<sup>2</sup>、陳冠鈞<sup>1</sup>、張博鈞<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 國立屏東科技大學機械工程系

<sup>2</sup> 國立內埔高級農工職業學校 機械科

<sup>3</sup> 瑞智精密股份有限公司

E-mail: [wangbt@mail.npust.edu.tw](mailto:wangbt@mail.npust.edu.tw)

### 摘要

結構受到隨機激振是常見的議題，需要進行頻譜響應分析以預測系統響應。本文探討樑結構受到點力作用之隨機激振，將介紹樑結構的頻譜響應分析。首先，外力輸入的隨機信號需要執行頻譜分析得到功率頻譜，藉由頻率域分析可以求得樑結構的輸出響應，如位移、應力及邊界反作用力之功率頻譜。又由功率頻譜可推算求得平方平均根值及標準差，基於常態分佈假設，可以取得位移、應力及邊界反作用力的最大及最小值，因此，免於求得系統輸出的時間域響應，即可解讀系統響應之特徵。本文探討薄樑在隨機振動的理論分析，分別以簡支樑及懸臂樑為案例，並以 CAE 有限元素分析軟體求解隨機激振之頻譜響應，也以薄樑理論分析驗證數值分析。結果顯示數值解析及理論分析有良好的對應，所建立的頻譜分析方法可以應用到產品需要評估隨機激振狀態之工程實務，本文成果可推論 CAE 軟體可以應用到複雜結構之頻譜響應分析。

**關鍵詞：**隨機激振、頻譜響應分析、樑、功率頻譜。

### 1. 前言

頻譜響應分析是工程上常用於診斷與維護，段等人[1]針對往復壓縮機的活塞進行模態分析，驗證活塞之激振頻率不會與活塞之自然頻率產生共振，並進行頻譜分析，了解到活塞工作時變形與安全因子皆在許可範圍，也可用此方法驗證活塞之安全性。趙[2]運用頻譜分析，針對離心齒式壓縮機進行故障診斷，從故障數據中得知，壓縮機轉子出現不平衡與摩擦故障，進一步對離心齒式壓縮機進行拆解，發現摩擦刮痕，驗證頻譜分析之結果。申[3]利用量測儀器量測齒輪箱實際運轉數據，運用頻譜分析針對齒輪箱有限元素模型進行狀態監測並進一步進行趨勢分析，找出齒輪箱零件損壞比率，齒輪高達 60%，運用此方法可以針對保障設備進行診斷與維護。陸等人[4]運用時頻分析，分析兩種典型微震訊號，從頻譜特性得知兩者之差別，並可進一步對岩體進行微震監測，並了解在煤層與頂板微震爆破上，微震信號主頻帶之不同。頻譜響應分析需要具備相關的專業知識背景才能進行分析，隨著結構的複雜度越來越高，採用理論分析是不容易處理的。故面對實際工程的應用時則需要透過 CAE (Computer Aided Engineering) 軟體來進行輔助分析。

再者，因結構受到隨機激振是工程上常見的議題，由於隨機振動的背景知識取得不易，大多數工程師並不

熟悉頻譜響應分析的相關領域，因此，學習透過 CAE 軟體來進行頻譜響應分析是有其必要性。

當系統受隨機激振的輸入時，一般而言從時間域下是無法看出隨機訊號的特性，因此若採用時間域中的暫態響應分析通常是不可行的，則需採用頻率域的分析技術。從不同領域下才能看出它的特性，通常外部激振的隨機輸入可由功率頻譜密度(power spectral density, PSD) 函數來表示，因此可獲得結構隨機響應的 PSD 函數，再根據統計方法中之機率密度函數、機率分佈函數等等的量值來計算，即可得知系統的響應結果。

本文以樑結構為例，主要參考王[5]之理論分析，首先推導薄樑結、應力及邊界反作用力之功率頻譜，以及對應的平方平均根值(roo 構的運動方程式，由理論模態分析，求得結構自然頻率及模態振型。其次，探討受隨機外力激振的頻譜響應分析，在已知隨機外力功率頻譜，可以求得系統響應，包括：位移 t mean square, RMS) 及標準差。本文探討兩種邊界，包括簡支樑及懸臂樑，分別以白噪音隨機外力及任意功率頻譜隨機外力之作用，進行頻譜響應分析。同時，以 ANSYS 進行對應的數值模擬解析，並比較輸出響應之功率頻譜以及標準差，可以驗證以 CAE 軟體執行頻譜響應分析之正確性。

### 2. 樑結構之頻譜響應理論分析

本節探討的薄樑結構系統如圖 1，當樑結構系統承受到隨機外力的激振輸入時，即可得到隨機響應的輸出。基於此分析理念，以下將針對樑結構頻譜響應分析的理論推導過程加以說明。

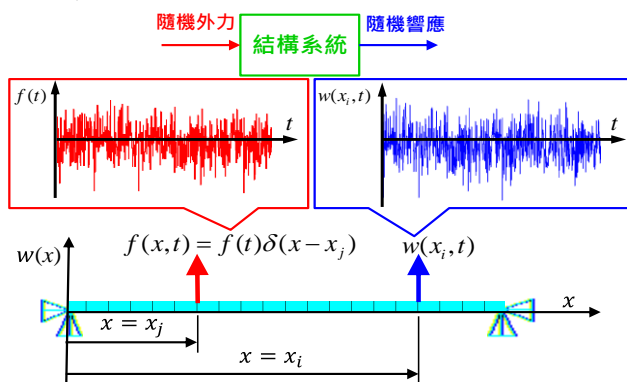


圖 1 樑結構受隨機外力激振之系統響應

#### 2.1 薄樑結構運動方程式

考慮一含阻尼均勻截面樑承受隨機外力激振的結

構系統如圖 1 所示，若考慮黏滯阻尼，假設為比例黏滯阻尼，其運動方程式如下所示[6]：

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + C \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (1)$$

其中， $E$  為樑之楊氏係數、 $I$  為樑之截面慣性矩、 $\rho$  為樑之密度、 $A$  為樑之截面積  $C$  為比例黏滯阻尼、 $w(x,t)$  為樑之側向位移及  $f(x,t)$  為作用於樑之均佈外力。

而樑之共通的邊界條件包括有位移、斜率、力矩及剪力等四種形式如下：

$$w(x,t) = 0 \quad (2)$$

$$\theta(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

$$V(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} (EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}) = 0 \quad (5)$$

式(2)-(5)所示，對於任意之邊界狀況，至少須設定其中任兩種條件。針對樑之初始條件，可利用位移及速度形式來描述，分別如下所示：

$$w(x,0) = w_0(x) \quad (6)$$

$$\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \quad (7)$$

其中， $w_0(x)$  及  $\dot{w}_0(x)$  分別為樑之初始位移及樑之初始速度。

## 2.2 薄樑結構之理論模態分析

藉由特徵值問題的求解分析，針對不同樑之邊界條件，可獲得無窮多組的自然頻率  $\omega_r$  及所對應的特徵函數解  $w_r(x)$  [7]，藉由引用式(6)可重新定義此特徵函數  $w_r(x)$  成唯一的表示式：

$$\phi_r(x) = \frac{w_r(x)}{\sqrt{\int_0^L \rho A [w_r(x)]^2 dx}} \quad (8)$$

基於位移模態振型函數之正交性關係，可得到以下的關係式：

$$\int_0^L \rho A \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \delta_{rs} \quad (9)$$

$$\int_0^L \phi_r(x) EI \frac{\partial^4 \phi_s(x)}{\partial x^4} dx = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad (10)$$

$$\int_0^L C \phi_r(x) \phi_s(x) dx = 2\zeta_r \omega_r \delta_{rs} \quad (11)$$

關於，不同形式的樑結構之自由振動分析，其自然頻率及其對應之模態振型的求解問題，已經被廣泛的研究[8-14]。關於暫態、簡諧及頻譜的響應分析的自然模態及模態振型函數之正交特性的相關問題，也已獲得證明[5]。

經由式(2)-(5)簡單的邊界條件及位移模態振型函數之正交性關係，即可得到如式(9)-(11)的關係式，關於 Ginsberg[15]所提出的質量與彈簧端的正交條件，因篇幅的關係本文予以省略，以下針對樑的兩個常見邊界條

件敘述如下：

(1) 簡支樑

$$\omega_r = \alpha_r^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \alpha_r = \frac{r\pi}{L} \quad (12)$$

$$\phi_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}} \sin \alpha_r x \quad (13)$$

(2) 懸臂樑

$$\omega_r = \alpha_r^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (14)$$

$$\phi_r(x) = \sqrt{\frac{1}{\rho AL}} [(\sin \alpha_r x - \sinh \alpha_r x) + \sigma_r (\cos \alpha_r x - \cosh \alpha_r x)] \quad (15)$$

$$\sigma_r = \frac{\sin \alpha_r L + \sin \alpha_r L}{\cos \alpha_r L + \cosh \alpha_r L} \quad (16)$$

其中，懸臂樑的  $\alpha_r L$  可由相關的振動書籍得知 [16]。

## 2.3 薄樑結構之頻譜響應分析

薄樑結構系統在承受隨機激振下之頻譜響應的分析理念如圖 2 所示，當系統受隨機激振的輸入時，一般而言從時間域下是無法看出隨機訊號的特性，因此若採用時間域中的暫態響應分析通常是不可行的，則需採用頻率域的分析技術。從不同領域下才能看出它的特性，通常外部激振的隨機輸入可由 PSD 函數來表示，因此可獲得結構隨機響應的 PSD 函數，再根據統計方法中之機率密度函數、機率分佈函數等等的量值來計算，即可得知系統的輸出響應結果。接著，經由有興趣輸出響應的 PSD 函數可求得對應之 RMS 值及標準差，再配合三倍原則，則可求得有興趣輸出響應範圍為正負 3 個標準差範圍，故可得於隨機外力下之應力最大值與最小值之分佈狀態，可用來評估結構響應的特性。

以下將針對薄樑結構系統在承受隨機激振下之頻譜響應的理論分析加以說明[5]，一般外力函數可以表示如下：

$$f(x,t) = f_j(t)\Gamma(x) \quad (17)$$

若考慮理想的衝擊點力，可定義空間位置函數  $\Gamma(x)$  如下：

$$\Gamma(x) = \delta(x - x_j) \quad (18)$$

接著，將第  $j$  個外力  $f(x,t)$  進行傅利葉轉換後可得頻率域的表示式：

$$F(x,\omega) = \mathfrak{F}[f(x,t)] = \mathfrak{F}[f_j(t)]\Gamma(x) = F_j(\omega)\Gamma(x) \quad (19)$$

其中， $F_j(\omega)$  為第  $j$  個外力  $f_j(t)$  的傅利葉頻譜，經由 PSD 函數得定義，可得  $f(x,t)$  的 PSD 函數

$$S_{ff}(x_j,\omega) = [\Gamma(x)]^2 S_{f_j f_j}(\omega) \quad (20)$$

其中，

$$S_{f_j, f_j}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[ F_j^*(\omega) \cdot F_j(\omega) \right] \quad (21)$$

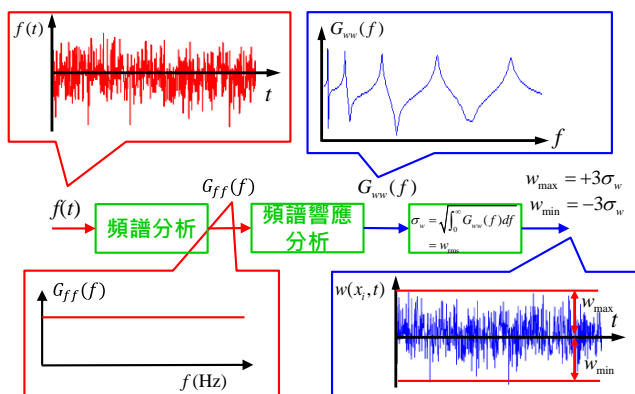


圖 2. 隨機激振之頻譜響應分析理念

經由暫態響應分析，可將薄樑的響應變數  $s(x,t)$  改寫成：

$$s(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r^S(x) q_r(t) \quad (22)$$

接著將響應變數  $s(x,t)$  進行傅利葉轉換及以 PSD 函數來重新定義，可得：

$$S(x, \omega) = \mathfrak{F}[s(x,t)] = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r^S(P) Q_r(\omega) \quad (23)$$

$$S_{ss}(x, \omega) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \phi_r^S(x) \phi_s^S(x) S_{q_r, q_s}(\omega) \quad (24)$$

其中， $S_{q_r, q_s}(\omega)$  是  $q_r(t)$  的 PSD 函數，經由計算可得

$$S_{q_r, q_s}(\omega) = H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{N_r, N_s}(\omega) \quad (25)$$

其中， $S_{N_r, N_s}(\omega)$  是  $N_r(t)$  的 PSD 函數，經由計算可得式

$$S_{N_r, N_s}(\omega) = \phi_r^F(x_j) \phi_s^F(x_j) S_{f_j, f_j}(\omega) \quad (26)$$

其中， $\phi_r^F(x_j)$  是一般外力的模態振型函數，典型的外力表示式如表 2 所示：

表 2 樑暫態分析的外力型式[5]

Type of force force function	Ideal impact point force
$f(x,t) = f_j(t)\Gamma(x)$	$F_j \delta(t-t_0)\delta(x-x_{f_j})$
Temporal function $f_j(t)$	$F_j \delta(t-t_0)$
Spatial function $\Gamma(x)$	$\delta(x-x_{f_j})$
Magnitude $F_j$	$F_j$
Location $x_j$	$x_{f_j}$
generic force mode shape function $\phi_r^F(x_j) = \int_0^L \phi_r(x)\Gamma(x_j)dx$	$\phi_r^F(x_j) = \phi_r(x_{f_j})$

表 3 樑結構之典型感測器或結構響應運算符號[5]

(a) 典型感測器

Sensor	Displacement sensor	Accelerometer	Rotational (slope) sensor	PVDF sensor
Location $x_i$	$x_{d_i}$	$x_{a_i}$	$x_{\theta_i}$	$x_{p1i}, x_{p2i}$
Measured quantity $s(x_j) = R[w(x_i, t)]$	$w(x_{d_i})$	$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \Big _{x=x_{a_i}}$	$\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_{\theta_i}}$	$K_p \left[ \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_{p1i}} - \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_{p2i}} \right]$
Sensing operator $R$	$1 \Big _{x=x_{d_i}}$	$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big _{x=x_{a_i}}$	$\frac{\partial}{\partial x} \Big _{x=x_{\theta_i}}$	$K_p \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Big _{x=x_{p1i}} - \frac{\partial}{\partial x} \Big _{x=x_{p2i}} \right]$
Generic sensor mode shape function $\phi_r^S(x_i) = R[\phi_r(x_i)]$	$\phi_r^S(x_i) = \phi_r(x_{d_i})$	$\phi_r^S(x_i) = \phi_r(x_{a_i})$	$\phi_r^S(x_i) = \phi_r'(x_{\theta_i})$	$\phi_r^S(x_i) = K_p [\phi_r'(x_{p1i}) - \phi_r'(x_{p2i})]$

表 3 樑結構之典型感測器或結構響應運算符號[5] (續)

(b) 典型的結構響應

Response	Slope (Strain)	Moment	Shear force	Max. bending stress
Location $x_i$	$x_i$	$x_i$	$x_i$	$x_i$
Measured quantity $s(x_i) = R[w(x_i, t)]$	$\theta(x_i, t) = \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right _{x=x_i}$	$M(x_i, t) = EI \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right _{x=x_i}$	$V(x_i, t) = EI \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right _{x=x_i}$	$\sigma(x_i, t) = EZ \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right _{x=x_i}$
Response operator $R$	$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right _{x=x_i}$	$EI \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right _{x=x_i}$	$EI \left. \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right _{x=x_i}$	$EZ \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right _{x=x_i}$
Generic response mode shape function $\phi_r^S(x_i) = R[\phi_r^S(x_i)]$	$\phi_r^S(x_i) = \phi_r'(x_i)$	$\phi_r^S(x_i) = EI \phi_r''(x_i)$	$\phi_r^S(x_i) = EI \phi_r'''(x_i)$	$\phi_r^S(x_i) = EZ \phi_r''(x_i)$

Note:  $Z$  = 距樑中性軸最遠的距離

最後，依照上述流程可將系統的響應變數  $s(x, t)$ ，轉換成以外力的模態振型函數及 PSD 函數的關係式，完整的表示如下：

$$S_{ss}(x, \omega) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \phi_r^S(x) \phi_s^S(x) \phi_r^F(x_j) \phi_s^F(x_j) H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{f_j f_j}(\omega) \quad (27)$$

當  $x = x_i$  時，可得其響應變數  $s_i(t) = s(x_i, t)$  的 PSD 函數，如下：

$$S_{s_i s_i}(\omega) = S_{ss}(x_i, \omega) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \phi_r^S(x_i) \phi_s^S(x_i) \phi_r^F(x_j) \phi_s^F(x_j) H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{f_j f_j}(\omega) \quad (28)$$

經由平方平均根值計算，可得響應變數  $s_i(t) = s(x_i, t)$  的 RMS 值，如下：

$$s_{i, rms}^2 = \overline{s_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{s_i s_i}(\omega) d\omega = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \phi_r^S(x_i) \phi_s^S(x_i) \phi_r^F(x_j) \phi_s^F(x_j) \int_{-\infty}^{\infty} H_r^*(\omega) H_s(\omega) S_{f_j f_j}(\omega) d\omega \quad (29)$$

且

$$\sigma_{s_i}^2 = \overline{s_i^2} - (\overline{s_i})^2 = (s_{i, rms}^2) - (\overline{s_i})^2 \quad (30)$$

基於具有零平均值  $\overline{f_j} = E[f_j(t)] = 0$  的白噪音激振輸入源  $S_{f_j f_j}(\omega) = S_0$  及具有低阻尼與分離模態特性的薄樑之假設條件下，可簡化標準差的表示式，如下

$$\sigma_{s_i}^2 = s_{i, rms}^2 \approx \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \phi_r^S(x_i) \phi_r^F(x_j) \right]^2 \frac{\pi S_0}{2 \zeta_r \omega_r^3} \quad (31)$$

若外力的平均值  $\overline{f_j} \neq 0$  時，可推導出響應變數  $s_i(t) = s(x_i, t)$  的平均值，如下：

$$\overline{s_i} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\phi_r^S(x_i) \phi_r^F(x_j)}{\omega_r^2} \overline{f_j} \quad (32)$$

最後，關於響應變數  $s_i(t) = s(x_i, t)$  的統計量值，其

中的平均值  $\overline{s_i}$  及標準差  $\sigma_{s_i}$ ，可由高斯分佈函數或統計分析中其他的機率分佈函數來計算得知，當結構受依隨機外力負荷作用時，即可獲得有興趣之輸出響應，如位移、力及應力之 PSD，由功率頻譜密度函數之特性，可求得對應之 RMS 值，當平均值為零時，RMS 值也等於標準差，配合高斯常態分佈函數之特性，即可由有興趣輸出響應的 PSD 求得對應之標準差再配合三倍原則，則可求得有興趣輸出響應範圍為正負 3 個標準差範圍，故可得於隨機外力下之應力最大值與最小值之分佈狀態，此結果即可用來作為評估結構響應的參考指標。

### 3. ANSYS 頻譜響應分析

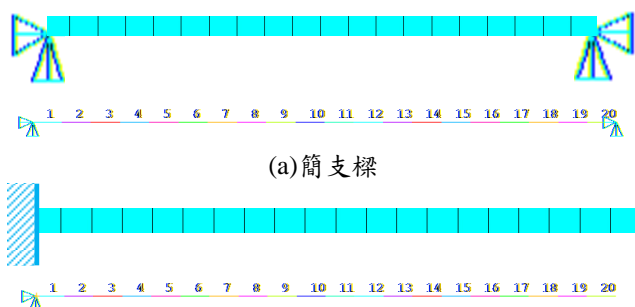
本節將針對薄樑結構系統，分別以簡支樑及懸臂樑為例，採用商用的 CAE 軟體進行頻譜響應分析，說明其有限元素模型及頻譜響應分析時之相關的設定。

#### 3.1 有限元素模型

採用 ANSYS 軟體，以有限元素分析法進行分析，本分析採用二維樑元素(Beam3)來模擬此結構，進而建構有限元素模型如圖 3，完整描述有限元素模型之四項要素說明如下：

- I. 元素形式：採用二維樑元素(Beam3)，模擬簡支樑及懸臂樑結構。
- II. 模型分割：將模擬之樑結構，分割出 20 個元素，21 個節點。
- III. 邊界條件：可將節點 1, 21 固定，故  $u_1 = v_1 = 0$  (左端點固定)， $u_{21} = v_{21} = 0$  (右端固定)，亦即模擬簡支樑兩端點之固定邊界條件；若僅將節點 1 固定，即  $u_1 = v_1 = \theta_z = 0$  (左端點固定)，即為模擬懸臂樑左端之固定邊界條件。

- IV. 負荷條件: 定義系統之外力輸入, 在節點 3 施以如圖 4PSD 定義之外力負荷。

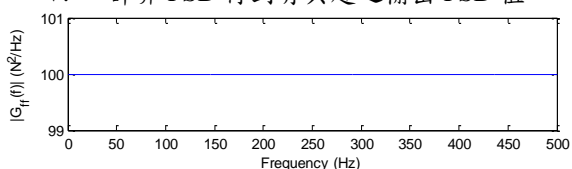


(a) 簡支樑  
(b) 懸臂樑  
圖 3. 樑結構示意圖

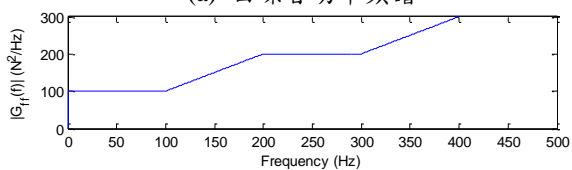
### 3.2 頻譜響應分析之設定選項

以下針對頻譜響應分析所需的主要步驟說明如下:

- I. 進行模型之建構與參數設定
- II. 進行模態分析求解, 得到模態振型與自然頻率
- III. 頻譜分析時, 需設定分析頻率範圍及輸入外力負荷型式, 例如白噪音(white noise)或任意形式之隨機外力, 圖 4 為白噪音及任意形式之 PSD。
- IV. 進行頻譜響應分析求解, 求得系統輸出參數的頻率域響應及 PSD 函數
- V. 計算 PSD 得到有興趣之輸出 PSD 值



(a) 白噪音功率頻譜



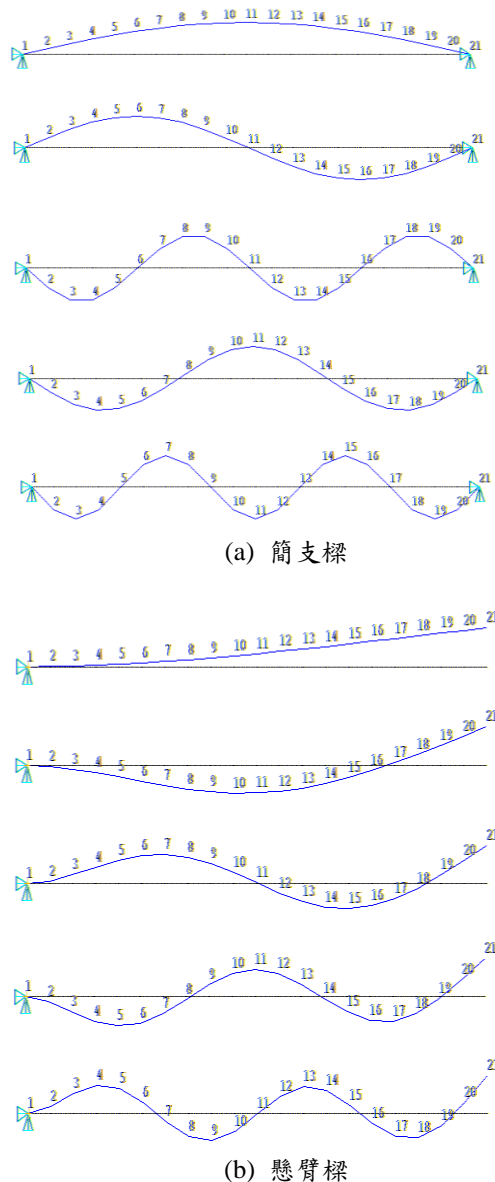
(b) 任意形式功率頻譜

圖 4. 隨機外力之功率頻譜(PSD)

## 4. 結果與討論

### 4.1 簡支樑與懸臂樑之模態分析結果

本文以簡支樑與懸臂樑結構為例, 藉由上述所建構的有限元素分析模型來進行模態分析, 進而得到所需之模態分析結果。圖 5 為簡支樑與懸臂樑前 5 個模態之模態振型, 分別觀察簡支樑與懸臂樑的自然頻率及所對應的模態振型, 可發現其振型及節點均與物理意義相符, 驗證了分析之正確性。此外, 由模態分析的自然頻率及模態振型結果, 亦可提供給設計者避免因共振(resonance)效應所產生的問題及結構補強的參考依據。



(a) 簡支樑  
(b) 懸臂樑  
圖 5. 樑結構前 5 個模態之模態振型

## 4.2 簡支樑受白噪音頻譜之隨機外力激振

考慮簡支樑結構承受以白噪音頻譜之外力負荷為激振源作用時，分別採用數值解析及理論求解來進行結構系統的頻譜響應分析。由圖 6 可觀察出其峰值之頻率約為 31.947 Hz、127.78Hz、287.50 Hz 與採用數值解析及理論求解模態分析所得之自然頻率結果有相對應性，確認了分析結果的正確性。

接著，分別比對輸出響應的位移、力及應力之 PSD 分析結果，圖 6 為簡支樑受白噪音之外力負荷時，其特定輸出點的數值解析及理論求解之位移、力及應力 PSD 變化曲線比較，結果顯示數值解析及理論分析的響應功率頻譜有良好的對應。

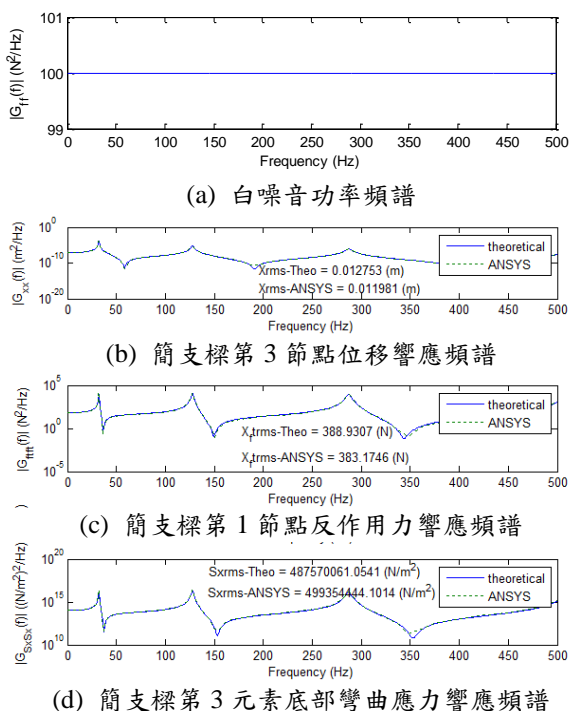


圖 6. 簡支樑受白噪音隨機外力激振之響應功率頻譜

## 4.3 懸臂樑受任意頻譜之隨機外力激振

考慮懸臂樑結構承受以任意隨機外力頻譜為外力激振源作用時，分別採用數值解析及理論求解來進行結構系統的頻譜響應分析。由圖 7 可觀察出其峰值之頻率約為 4.89 Hz、30.62Hz、85.73 Hz、167.99Hz、277.70 Hz 與採用數值解析及理論求解模態分析所得之自然頻率結果有相對應性，確認了分析結果的正確性。

接著，分別比對輸出響應的位移、力及應力之 PSD 分析結果，圖 7 為懸臂樑受任意隨機外力之負荷時，其特定輸出點的數值解析及理論求解之位移、力及應力 PSD 變化曲線比較，結果顯示數值解析及理論分析的響應功率頻譜皆有良好的對應。

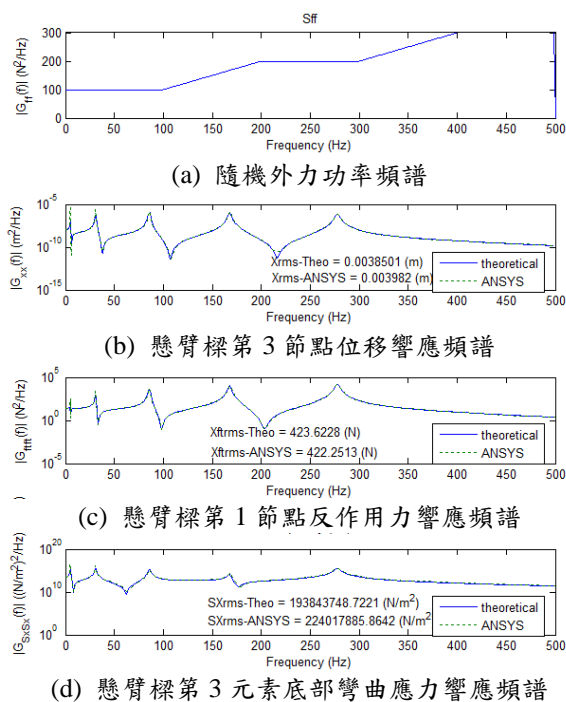


圖 7. 懸臂樑受任意隨機外力激振之響應功率頻譜

## 5. 結論

本文探討薄樑在隨機振動的理論分析，分別以簡支樑及懸臂樑為例，除了以 CAE 有限元素分析軟體求解隨機激振之頻譜響應之外，也採用薄樑理論分析方式來驗證數值分析的結果，結果顯示數值解析及理論分析有良好的對應。藉由上述的分析可得到以下結論：

- I. 透過 CAE 有限元素分析軟體求解隨機激振之頻譜響應的數值解析與理論分析結果的比較驗證，顯示數值解析和理論分析結果兩者有良好的對應，證明使用 CAE 軟體來進行頻譜響應分析的可行性與正確性。
- II. 經由功率頻譜密度可推算求得平方平均根值及標準差，基於常態分佈假設，即可取得各種響應的最大及最小值。因此，免於求得系統輸出的時間域響應，即可解讀系統響應之特徵，可有效降低分析的困難度及時間。
- III. 由頻譜分析方法可得知如地震、風力、海洋波動等不規則之外力激振之頻率域響應。
- IV. 所建立的頻譜分析方法可以應用到產品需要評估隨機激振條件的實際工業產品模擬，本文成果可推論 CAE 軟體可以應用到複雜結構之頻譜響應分析。

## 6. 參考文獻

- [1] 段禮祥, 郝少鵬, 張北, 陽廣龍, 王金江, 2001, 「基於 ANSYS 的往復壓縮機國產活塞響應頻分析」, *石油機械期刊*, 第 12 期, 第 45 卷, 第 62~66 頁
- [2] 趙利娜, 2018, 「離心齒式壓縮機頻譜分析及故障診斷」, *化工裝備技術期刊*, 第 2 期, 第 39 卷, 第 52~58 頁
- [3] 申大勇, 2010, 「頻譜分析在齒輪箱故障診斷中的應用」, *石油與化工設備期刊*, 第 3 期, 第 13 卷, 第 34~35 頁
- [4] 陸萊平, 竇林名, 吳興榮, 王慧明, 秦玉紅, 2005, 「岩體微震監測的頻譜分析與信號識別」, *岩土工程學報*, 第 17 期, 第 7 卷, 第 772~775 頁
- [5] B. T. Wang, "Vibration Analysis of Continuous System Subject to Generic Forms of Actuation Forces and Sensing Devices," *J. Sound Vib.*, vol. 319, pp 1222-1251, 2009.
- [6] L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, The MacMillan Company, Macmillan; 1967.
- [7] W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Application*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall; 1987.
- [8] M. Gurgoze, "On the Eigenfrequencies of a Cantilever Beam with Attached Tip Mass and a Spring-mass System," *J. Sound Vib.*, vol. 190, pp 149-162, 1996.
- [9] M. Gurgoze, and V. Mermertas, "On the Eigenvalues of a Viscously Damped Cantilever Carrying a Tip Mass," *J. Sound Vib.*, vol. 216, pp 309-314, 1998.
- [10] M. A. De Rosa, C. Franciosi, and M. J. Maurizi, "On the Dynamic Behaviour of Slender Beams with Elastic Ends Carrying a Concentrated Mass," *Comput. struct.*, vol. 58, pp 1145-1159, 1996.
- [11] M. A. De Rosaa, and M. J. Maurizi, "Damping in Exact Analysis of Tapered Beams," *J. Sound Vib.*, vol. 286, pp 1041-1047, 2005.
- [12] J. S. Wu, and D. W. Chen, "Dynamic Analysis of a Uniform Cantilever Beam Carrying a Number of Elastically Mounted Point Masses with Dampers," *J. Sound Vib.*, vol. 229, pp 549-578, 2000.
- [13] G. Oliveto, A. Santini, E. Tripodi, "Complex Modal Analysis of a Flexural Vibrating Beam with Viscous end Conditions," *J. Sound Vib.*, vol. 200, pp 327-345, 1997.
- [14] J. R. Banerjee, "Explicit Analytical Expressions for Frequency Equation and Mode Shapes of composite beams," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, pp 2415-2426, 2001.
- [15] J. H. Ginsberg, *Mechanical and Structural Vibrations Theory and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York; 2001.
- [16] R. D. Blevins, *Formula for Natural Frequency and Mode Shape*, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida; 1995.

## Spectrum Response Analysis for Beam Structures Subject to Random Force Excitation

Bor-Tsuen Wang<sup>1</sup>, Ying-Huei Wu<sup>2</sup>,  
Guan-Zhou Chen<sup>1</sup>, Bo-Jun Zhang<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering,  
National Pingtung University of Science and  
Technology

<sup>2</sup>Machinery Division, National Nei-Pu Senior  
Agricultural-Industrial Vocational School

<sup>3</sup>Rechi Precision Co., LTD

### ABSTRACT

The structure subject to random excitation is a common issue, and spectrum response analysis is required to predict the system. This work will present the theoretical derivation of beam subject to a point force with random waveform. The spectrum response analysis on beam structures is shown. First, the input random waveform should be performed FFT to obtain power spectrum. The output response can be predicted in frequency domain analysis. The output power spectrum can then be obtained such as displacement, stress and reaction force. The RMS value and standard deviation can also be obtained from the power spectrum. Base on the assumption of normal distribution of random process, the maximum and minimum of output can be determined. Therefore, the time domain response can be interpreted without the detail time waveform response. The thin beam structure is considered to present the theoretical derivation of random vibration analysis. Both the simply supported beam and cantilever beam are, respectively, studied. The numerical solution via CAE software for spectrum response analysis is shown and verified by theoretical solution. Results show the good agreement between numerical and theoretical solutions. The developed methodology is useful for practical industrial product simulation requiring the evaluation of random excitation conditions. This work shows that spectrum response analysis can be carried out for complex structures in CAE software.

**Keywords:** Random Excitation, Spectrum Response Analysis, Beam, Power Spectrum.

