

懸臂樑結構系統之未知衝擊外力預測

王栢村 吳德和 陳重彰

國立屏東科技大學機械工程系

摘要

本文主要運用吳[1]所發展之外力預測模式，應用於懸臂樑結構上，求取未知衝擊外力作用於懸臂樑之大小、時間歷程與作用位置，而未知衝擊外力以三角力型式模擬。基於最小平方誤差法可建構外力預測之最佳化問題，其目標函數則定義為預測與量測響應間的誤差平方和，當求解最佳化問題可求得此未知衝擊力之大小、作用時間歷程，與一組與未知衝擊外力作用位置相關之模態振型，經與實際結構模態振型做比較分析，即可得知未知衝擊外力之作用位置。文中以未知衝擊外力作用於懸臂樑結構，探討其外力預測方法之可行性與適用性，所發展之外力預測模式可適用於類似之樑結構，未來將可結合不同感測器應用此外力預測模式以解決外力預測問題。

關鍵詞：衝擊力、外力預測、模態參數、懸臂樑。

UNKNOWN IMPACT FORCE PREDICTION FOR CANTILEVER BEAM STRUCTURES

Bor-Tsuen Wang Der-Ho Wu Chung-Chang Chen

*Department of Mechanical Engineering
National Pingtung University of Science and Technology
Pingtung, Taiwan 912, R.O.C.*

Key Words: impact force, force prediction, modal parameter, cantilever beam.

ABSTRACT

This work is mainly to make use of the force-predictive model, which was developed by Wu[1], extended to the cantilever beam for determining the amplitude, time history and location of the unknown impact force acting on the beam. The unknown impact force is assumed to be a triangular force. The optimization problem base on the least square error method to predict the impact force contents can be formulated. The objective function can be defined as the sum of square errors between the predicted and measured response. The optimization problem can then be solved for the amplitude and time history of the unknown impact force as well as the mode shape information associated with the location of the unknown impact force. In comparison to the structural mode shapes, the location of the impact force can be determined. This work verifies the feasibility and fitness of the force-predictive model for the unknown impact force acting on the cantilever beam and demonstrates the application of the force-predictive model to similar beam structures. In the future, different sensors can be adopted in conjunction with the predictive model for force prediction problems.

一、前言

未知外力預測主要是探討什麼樣的輸出來自什麼樣的輸入，也就是欲以系統之輸出反推出系統之輸入問題。一般傳統上探討結構受外力作用之影響，首先須知道外力之型式及其作用位置，下一步才探討外力對結構物之影響，也就是探討什麼型式之輸入而結構產生什麼型式之輸出。而逆向工程問題(inverse problem)就是利用系統之輸出而反推系統之輸入，結構系統之外力預測(force prediction)便是在這樣的理念下，利用其結構之響應預測出結構物所受外力作用之大小、時間歷程與作用位置。Okubo and Tatsuno[2]即探討了工具機切削力、引擎座及軸承之反作用力等之外力預測問題；又複合材料受撞擊不易由結構表面觀察[3-4]，若能預測衝擊力位置，將可減少應用其他檢測方法對結構全面性檢查之時間，因此可知外力預測問題於工程應用之需要性。

外力預測模式之探討研究中，可以就外力形式歸納為幾種類型，第一類外力為衝擊力，通常假設已知作用位置，以求得衝擊外力大小及時間歷程。D'Cruz et al. [5]量測彈性簡支板結構受力作用之響應，配合最小均方根誤差之估算，成功地預測出外力大小及時間歷程。Fabunmi [6]則發展以利用結構系統輸入與輸出間之移動性(mobility)進行偽逆運算(pseudo inverse)以測定結構所作用之未知力。Hansen and Starkey[7]則以模態模型(modal model)為基礎以求得頻率響應函數，經適當地選擇模態數和量測位置下，即可準確預測出作用力之大小。Law et al. [8]則推導出結構系統之運動方程式，在利用同時量測兩點以上之結構響應，可預測出外力大小，而採最小均方根法，來預測外力之時間歷程。Michaels and Pao [9]則利用格林函數(Green's function)預測結構響應，同時量測最少兩點以上之響應，即可得力之時間歷程。在現有文獻中較少有可同時預測衝擊力大小及作用位置，如 Wu et al. [10]係以比較不同作用力位置之應變響應契合方式，間接的得到作用位置，需要大量的不同作用位置之比對。Doyle[11]則採類似之響應契合方式，以兩個求解迴圈分別求得外力大小及作用位置，也要求較高之計算能力。本文將採作者過去外力預測系列研究[1,12,13]擴展應用至懸臂樑結構，Wang and Chiu[12]與邱[13]探討簡支樑受衝擊力之外力預測問題，以理想脈衝函數(ideal impulse function)模擬衝擊力，可同時合理的預測出外力作用位置，但是衝擊力誤差相當大，吳[1]仍考慮簡支樑結構之衝擊力預測問題，則改善假設衝擊力為三角力形式，更能吻合實際衝擊力物理現象，對衝擊力大小及作用位置均有較佳之預測結果。本文將探討所發展之外力預測方法應用於不同邊界之懸臂樑結構遭受未知衝擊力之外力預測，可同時求得衝擊大小、時間歷程及其作用位置。

第二類常見外力形式如隨機力之外力預測研究探

討，Paolo and Kenneth [14]則是利用加速度計量測結構響應，以頻率域響應利用偽逆運算方式對結構隨機外力作預測，其先決限制是隨機力所作用之頻率需在所限制頻寬中，同時作用力位置仍須假設已知。第三類如結構受簡諧激振(harmonic excitation)，求取簡諧力之大小，D'Cruz et al. [15]則以簡支板結構受週期函數之外力作用時，利用最少四個感測器量測結構之響應，可預測出作用於簡支板之簡諧力大小、作用位置及相位角。Karlsson [16]則在已知外力型式為簡諧力，在固定頻率下，已知系統之模態參數及外力之振幅下，即可預測出簡諧力大小及其作用位置。Moller [17]則提出一新方法利用連續二次方程式，計算出 MAC (modal assurance criterion)矩陣，並比較結構體在不同點加質量之 MAC 值的變化，即可預測出簡諧力大小及位置。Spina and Valente[18]則同樣為簡諧力，利用 Hilbert 轉換函數，來處理結構受外力之響應值，可比較其響應值之實數部或虛數部，便可成功預測出力之大小。Verhoeven[19]也是在外力同為簡諧力下，在結構固定位置，不同轉速的狀況下，量測運轉機械不同頻率下之響應，利用其響應反推簡諧力之大小，結果顯示在不同頻率下皆可預測出外力大小。

本文將探討懸臂樑結構受未知衝擊力之外力預測，假設衝擊力為三角力形式，以加速度計為感測器之外力預測模式，可同時預測出衝擊力大小、時間歷程及作用位置。並就兩種組合之外力預測分析結果作探討，組合(I)為理論之數值分析，作為此方法之可行性評估，組合(II)為實際懸臂樑結構受衝擊力時，配合實驗量測之外力預測，結果顯示作用位置可得到相當明確之預測，衝擊力大小也在合理之預測範圍，也驗證吳[1]所發展之外力預測模式適用於類似之樑結構。

二、理論分析

1. 加速度響應分析

受一未知外力 $F(x, t)$ 作用，長度為 L_b 之均勻懸臂樑結構，如圖 1 所示，根據傳統樑理論，忽略剪力變形及轉動慣量效應，可得懸臂樑側向運動方程式通式如下[20]：

$$E_b I_b \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + C_b \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1)$$

其中， E_b 為懸臂樑的楊氏係數， I_b 為懸臂樑的截面慣性矩， C_b 為懸臂樑的阻尼係數， ρ_b 為懸臂樑的密度， A_b 為懸臂樑的截面積， w 為樑之側向位移。

當外力為衝擊力以三角力形式模擬時，如圖 2 所示在結構座標 $x = x_j$ 受衝擊力作用，其外力的型式可寫成：

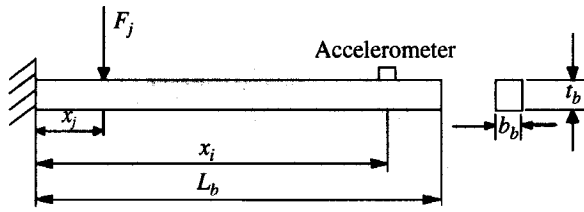


圖 1 懸臂樑尺寸及未知外力作用位置圖

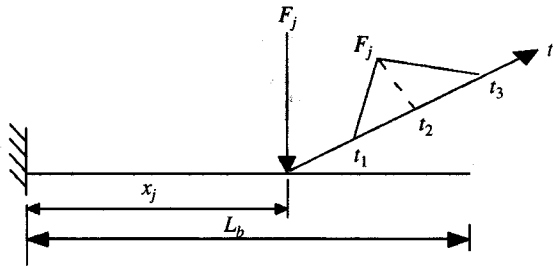


圖 2 三角力作用圖

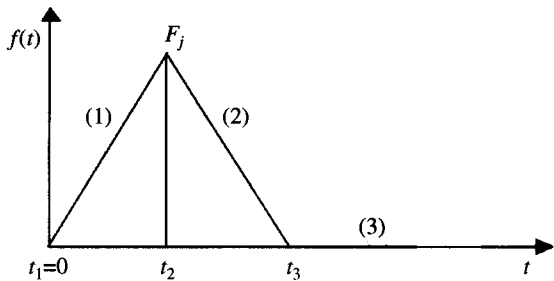


圖 3 三角力作用時間

$$F(x,t) = \delta(x-x_j) \times \begin{cases} 0 & , t < t_1 \\ F_j \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)} & , t_1 < t < t_2 \\ F_j \frac{(t-t_3)}{(t_2-t_3)} & , t_2 < t < t_3 \\ 0 & , t > t_3 \end{cases} \quad (2)$$

利用擴充原理(expansion theorem)[21,22]與結構模態振型之正交性關係，並假設其三角力的作用時間 \$t_1 = 0\$，如圖 3 所示，可分為三個部分推導得懸臂樑之側向加速度響應函數如下[23]：

(一) 當 \$0 < t \le t_2\$ 時：

$$a(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ \begin{aligned} & (C_1 \cos \omega_{d_n} t + C_2 \sin \omega_{d_n} t) \\ & \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \\ & \times (C_1 \sin \omega_{d_n} t - C_2 \cos \omega_{d_n} t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中

$$\omega_{d_n} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} \quad (4)$$

$$C_1 = \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\xi_n)}{\omega_n^3 t_2} \quad (5)$$

$$C_2 = \frac{F_j \phi_n(x_j) (2\xi_n^2 - 1)}{\omega_n^2 \omega_{d_n} t_2} \quad (6)$$

\$\omega_{d_n}\$ 為阻尼自然頻率，\$\omega_n\$ 為自然頻率，\$\xi_n\$ 為阻尼比，\$\phi_n(x)\$ 為模態振型。

(二) 當 \$t_2 \le t \le t_3\$ 時：

$$a(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ \begin{aligned} & (C_3 \cos \omega_{d_n} t + C_4 \sin \omega_{d_n} t) \\ & \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \\ & \times (C_3 \sin \omega_{d_n} t - C_4 \cos \omega_{d_n} t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$C_3 = C_1 + F_j \phi_n(x_j) \cdot e^{\xi_n \omega_n t_2} \cdot \frac{[(2\xi_n t_3 \omega_{d_n} \cos \omega_{d_n} t_2) - (2\xi_n^2 - 1) t_3 \omega_n (\sin \omega_{d_n} t_2)]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) (t_2) \omega_{d_n}} \quad (8)$$

$$C_4 = C_2 + F_j \phi_n(x_j) \cdot e^{\xi_n \omega_n t_2} \cdot \frac{[(2\xi_n t_3 \omega_{d_n} \sin \omega_{d_n} t_2) + (2\xi_n^2 - 1) t_3 \omega_n (\cos \omega_{d_n} t_2)]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) (t_2) \omega_{d_n}} \quad (9)$$

(三) 當 \$t \ge t_3\$ 時：

$$a(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ \begin{aligned} & (C_5 \cos \omega_{d_n} t + C_6 \sin \omega_{d_n} t) \\ & \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \\ & \times (C_5 \sin \omega_{d_n} t - C_6 \cos \omega_{d_n} t) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中

$$C_5 = C_3 - F_j \phi_n(x_j) \cdot e^{\xi_n \omega_n t_3} \cdot \frac{[(1 - 2\xi_n^2) \omega_n \sin \omega_{d_n} t_3 + 2\xi_n \omega_n \cos \omega_{d_n} t_3]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) \omega_{d_n}} \quad (11)$$

$$C_6 = C_4 + F_j \phi_n(x_j) \cdot e^{\xi_n \omega_n t_3}$$

$$\frac{[(1-2\xi_n^2)\omega_n \cos \omega_{d_n} t_3 - 2\xi_n \omega_{d_n} \sin \omega_{d_n} t_3]}{\omega_n^3 (t_2 - t_3) \omega_{d_n}} \quad (12)$$

2. 外力預測模式

當懸臂樑結構受未知衝擊外力作用時，假設在 $x = x_i$ 位置之加速度響應可實驗量測以 $\hat{a}_i(t)$ 表示，又由前節可知，假設該懸臂樑在座標為 $x = x_j$ 位置受到未知衝擊外力作用，則在 $x = x_i$ 位置之加速度響應 $a_i(t)$ 可由式(3)-(12) 預測得知，以式(3)為例：

$$a_i(t) = a(x_i, t) = \sum_{n=1}^k \phi_n(x_i) e^{-\xi_n \omega_n t} \left\{ (C_1 \cos \omega_{d_n} t + C_2 \sin \omega_{d_n} t) \right.$$

$$\left. \times (\xi_n^2 \omega_n^2 - \omega_{d_n}^2) + (2\xi_n \omega_n \omega_{d_n}) \times (C_1 \sin \omega_{d_n} t - C_2 \cos \omega_{d_n} t) \right\} \quad (13)$$

前式中為配合數值分析故只取前 k 個模態， $\phi_n(x_i)$ 表示第 n 個模態振型函數在 $x = x_i$ 位置之值，可將模態振型函數改寫成向量的型式，令 $\phi_{n,i} = \phi_n(x_i)$ ，則 $\phi_{n,i}$ 為第 n 個模態振型向量之第 i 個元素。又由式(13)預測之加速度響應表示式可知，加速度為結構模態參數以及衝擊力大小 F_j 、時間歷程 t_2 和 t_3 與作用力位置 x_j 之函數，其中模態參數如自然頻率(ω_n)、模態阻尼比(ξ_n)與模態振型($\phi_{n,i}$)可經由理論分析或實驗模態分析得之均為已知，所以式(13)中之未知數包含其三合力大小 F_j 、作用力時間歷程 t_2 和 t_3 與作用力的位置 x_j ，而與作用力位置相關之 j 係以模態振型 $\phi_n(x_j)$ 呈現，如式(5)-(6)所示。

欲進行外力預測，求得衝擊力之大小、時間歷程及作用位置，將根據最小誤差平方法之理念架構外力預測之最佳化問題，此最佳化問題之理念：找到「設計變數」，亦即「 F_j 、 t_2 和 t_3 與 $\phi_{n,j}$, $n=1,2,\dots,k$ 」，使得「目標函數」最小化，亦即「預測之加速度響應 $a_i(t)$ 與實驗量測之加速度響應 $\hat{a}_i(t)$ 的誤差平方和」最小化，因此定義最佳化分析問題如下：

$$\text{目標函數： } Q_i = \sum_{r=1}^{N_i} [a_i(t_r) - \hat{a}_i(t_r)]^2 \quad (14)$$

$$\text{設計變數： } F_j, t_2, s_2, \phi_{n,j}, n=1,2,\dots,k \quad (15)$$

其中， $s_2 = t_3 - t_2$ 。目標函數 Q_i 定義為由 N_i 個時間點之加速度響應預測值 $a_i(t)$ 與實際值 $\hat{a}_i(t)$ 之誤差平方和。最佳化分析問題的設計方向在使式(14)之目標函數為零或最小化，進而求得式(15)之設計變數，包括 F_j 、 t_2 、 s_2 與

$$\phi_{n,j} = \phi_n(x_j)。$$

進行求解式(14)-(15)之最佳化問題，將可得到衝擊力大小 F_j 與時間歷程 t_2 和 s_2 ，而 $t_3 = t_2 + s_2$ ，以及一組模態振型 $\{D\}_j$ 可表示如下：

$$\{D\}_j = [\phi_{1,j} \ \phi_{2,j} \ \dots \ \phi_{k,j}]^T \quad (16)$$

其中，上標 T 代表對矩陣作轉置(transpose)運算，由式(16)可看出 $\{D\}_j$ 為所有模態振型向量在位置 x_j 所組成之向量，若定義已知之結構模態振型矩陣如下式：

$$\{\Phi\} = [\{\phi\}_1 \ \{\phi\}_2 \ \dots \ \{\phi\}_k] = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \dots & \phi_{k,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \dots & \phi_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,m} & \phi_{2,m} & \dots & \phi_{k,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_1 \\ [G]_2 \\ \vdots \\ [G]_m \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中，

$$[G]_l = [\phi_{1,l} \ \phi_{2,l} \ \dots \ \phi_{k,l}] = \{D\}_l^T, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

式(17)中的 k 為模態數， m 為結構進行模態分析之分割點數。

MAC (modal assurance criterion)為評估實驗及理論所得振型之相關性指標，其定義如下[24]：

$$MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = \frac{|\{\phi\}_p^V \{\phi\}_x^*|^2}{(\{\phi\}_x^V \{\phi\}_x^*) (\{\phi\}_p^V \{\phi\}_p^*)} \quad (19)$$

式中上標*代表共軛(conjugate)運算， $\{\phi\}_x$ 代表實驗分析之模態振型向量， $\{\phi\}_p$ 代表理論分析之模態振型向量。當 $\{\phi\}_p = \{\phi\}_x$ ，即理論與實驗所得的振型相同時，則 $MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = 1$ ；當 $\{\phi\}_p$ 呈 $\{\phi\}_x$ 正交關係， $MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) = 0$ ；一般而言， $0 \leq MAC(\{\phi\}_p, \{\phi\}_x) \leq 1$ ，當 MAC 數值愈趨近 1，代表實驗所得的振型與理論推導所得的振型有良好之相關性；當 MAC 數值趨近於 0，則代表此兩者無相關性或在數學定義上稱兩者具有正交性。

在此將引用 MAC 之特性，評估由最佳化分析所得到的模態振型 $\{D\}_j$ 即式(16)，與結構模態振型 $\{\hat{D}\}_l$ 即式(18)，兩者間之相關性，定義 MAC_{jl} 如下：

$$MAC_{jl} = MAC(\{D\}_j, \{\hat{D}\}_l), \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

兩組振型 $\{D\}_j$ 與 $\{\hat{D}\}_l$ 具有良好的相關性時， MAC_{jl} 值會趨近於 1，亦即代表 $x_j = x_l$ ，因此可判斷在 x_l 是未知衝擊外力所作用之位置。

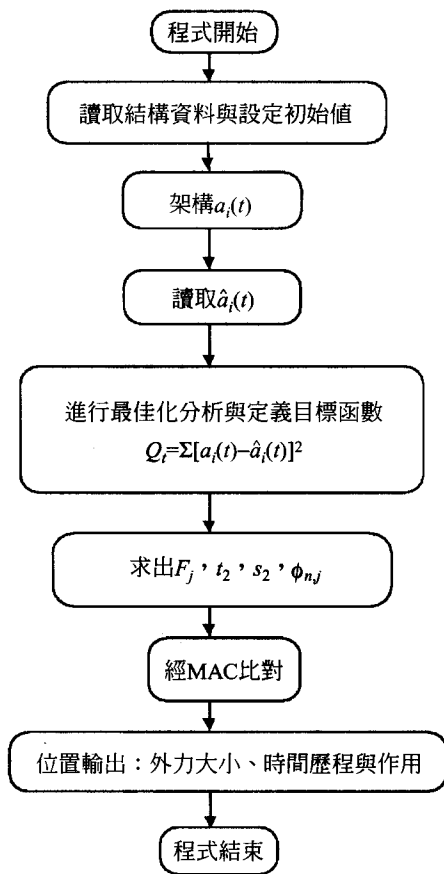


圖 4 外力預測流程圖

三、預測外力模式程式架構

本文所發展之外力預測模式程式，以 MS-FORTRAN PowerStation 語言撰寫，並使用 Visual Numerics IMSL Math Library[25]中所提供之最佳化副程式 DBCPOL，求解如前節定義之最佳化問題，外力預測分析程式流程圖如圖 4 所示。

此外力預測程式可依分析目的任意選擇所建構最佳化問題之目標函數組合，如式(14)所示，預測之加速度響應 $a_i(t)$ ，可由理論分析之模態參數進行估算；而實驗量測之加速度響應 $\hat{a}_i(t)$ 可以以理論數值分析值或實際實驗量測值代入。兩種組合分析及其目的分述如下：

組合(I)：以理論分析之模態參數進行估算預測之加速度響應 $a_i(t)$ ，而以理論數值分析之加速度響應取代實際實驗量測之加速度響應 $\hat{a}_i(t)$ ，以建構外力預測最佳化問題之目標函數。此組合為理論之數值分析，主要目的在探討此外力預測方法之可行性。

組合(II)：以理論分析之模態參數進行估算預測之加速度響應 $a_i(t)$ ，而以實際實驗量測之加速度響應 $\hat{a}_i(t)$ ，以建構外力預測最佳化問題之目標函數。此組合為實驗之

表一 懸臂樑之材料性質

材 料	鋼
長度 (L_b)	0.3 m
寬度 (b_b)	0.0395 m
厚度 (t_b)	0.00166 m
密度 (ρ_b)	7870 kg/m ³
楊氏係數 (E_b)	207×10 ⁹ N/m ²
蒲松比 (ν_b)	0.292

表二 使用儀器一覽表

儀器名稱	型 號
雙頻道訊號分析儀	BK3550
衝擊錘	BK8202
加速度計	PCB352A10
加速度計之電荷放大器	PCB480E09
曲線嵌合軟體	LMS CADA-PC

驗證分析在探討所發展外力預測方法實際應用之適用性。又此組合也適用於對於複雜結構，當結構之模態參數難以或無法由實驗模態分析求得時，結構之模態參數可以以理論推導或以有限元素法求得，以進行外力預測分析。

在進行外力預測之最佳化分析，為有效率的及正確的得到合理的預測結果，主要的參數設定說明如下：

1. 時間點選點之影響：由式(14)目標函數定義，需設定適當之時間點 N_t ，就選取時間點 N_t 多寡與不同區域之影響做探討，由經驗歸納所得，建議在進行最佳化外力預測分析時，對於時間點取點方式取 N_t 為 10 到 50 點，且為受衝擊力後附近區域之時間點，可較容易得到良好之預測結果，此可合理的判斷因受衝擊力時結構有較大之加速度響應，可減少實驗量測之雜訊比。
2. 設計變數初始值之影響：一般最佳化求解工具，均需設定初始值，在外力大小、時間歷程之初始值可由實際量測之經驗，提供適當之參考值，而作用位置本文係以模態振型值，配合如式(20) MAC_{ij} 值得知，一般正交化模態振型值介於正負 1 之間，亦可由理論分析明確得知參考值。
3. 設計變數之上下限：為了減低其最佳化運算時預測結果之誤差及運算時間，在分析時可先大範圍設定上下限範圍，再適當的減少上下限範圍，以得到正確結果。

四、實驗架構

本文主要探討懸臂樑受未知衝擊外力之預測，實驗架構之懸臂樑尺寸如表一所示，實驗量測之儀器設備其型號如表二所示，儀器架構圖如圖 5 所示。

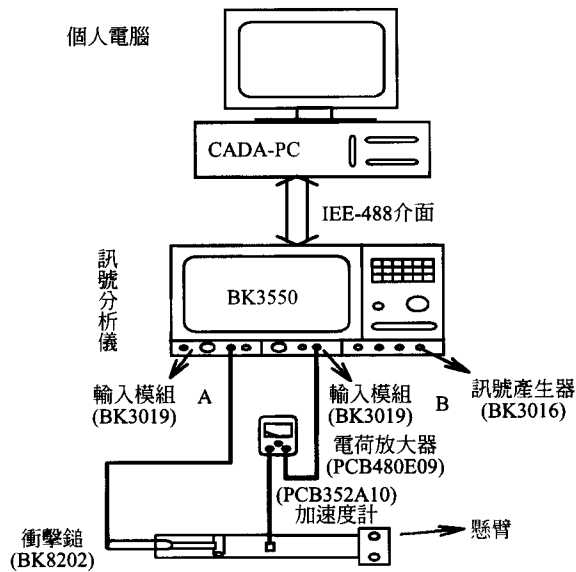


圖 5 實驗儀器架構圖

為進行外力預測之實驗驗證分析，以衝擊錘敲擊懸臂樑，經由力轉換器可度量衝擊力之時間域響應，透過訊號分析儀做紀錄。懸臂樑受衝擊力之同時將加速度計置於已知位置，經電荷放大器，透過訊號分析儀紀錄實際量測結構之加速度響應 $\hat{a}_i(t)$ ，本文實驗設定取樣時間 1 秒，取樣點數 2048，時間間距為 488×10^{-6} 秒。

對懸臂樑作均勻等份分割為 15 點，亦即 $m=15$ ，加速度計位置與作用力位置之組合以 (i, j) 表示， $(i, j)=(15, 2)$ 表示作用力於 $j=2$ ，加速度計於 $i=15$ ，第 1 點靠近固定端，第 15 點為懸臂樑自由端，若 $j=1.5$ 代表作用力介於第 1 點及第 2 點中間。

五、外力預測分析結果與討論

1. 組合(I)外力預測分析結果

組合(I)主要為最佳化問題以理論推導所得之模態參數估算預測響應搭配理論推導所得之結構響應來架構目標函數，以進行外力預測模式分析，作為探討此外力預測模式之可行性分析。

(一) 不同作用位置之影響

令未知衝擊外力分別作用於第 2 點(大約距懸臂樑固定端之 1/5 處)、第 5 點(距懸臂樑固定端之 1/3 處)、第 7 點(大約樑之中點)與第 15 點(樑之自由端點)，量測位置皆固定於第 3 個點，其時間歷程皆固定為： t_2 為 1 毫秒， s_2 為 2 毫秒，並採前述之建議方法進行外力預測分析。

表三(a)為不同作用力位置之外力大小與時間歷程預測結果，外力大小預測誤差在 6.31% 以下，而時間歷程預測最大誤差 26.4%，圖 6 為相對於表三所得

表三 組合(I)不同作用力位置之預測結果
(a) 外力大小與時間歷程

組合 (i,j)	外力大小 F_j (N)			時間歷程： $t_2=1$ (ms), $s_2=2$ (ms)			
	實際值	預測值	誤差 (%)	t_2 預測值	s_2 預測值	t_2 誤差 (%)	s_2 誤差 (%)
(3,2)	3.500	3.721	6.31	0.892	1.823	-10.8	-8.85
(3,5)	4.000	3.941	-1.48	1.226	2.123	22.6	6.15
(3,7)	4.500	4.319	-4.02	1.264	2.201	26.4	10.05
(3,15)	5.000	4.769	-4.62	1.125	1.852	12.5	-7.4

(b) 衝擊能量

組合(i,j)	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	5.25	5.05	-3.79
(3,5)	6.00	6.60	9.99
(3,7)	6.75	7.48	10.85
(3,15)	7.50	7.10	-5.35

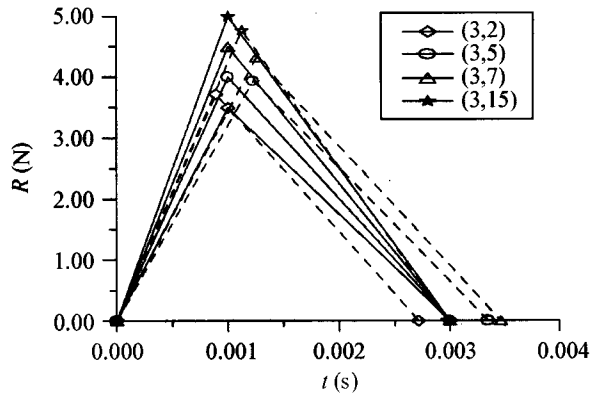


圖 6 組合(I)不同作用力位置之預測外力大小與時間歷程示意圖

之實際與預測的三角力型式比較圖，圖中實線部分代表各不同組合的實際值之外力大小與時間歷程，而虛線部分則代表各不同組合的預測值之外力大小與時間歷程。若定義衝擊能量為如圖 6 衝擊力所圍成之三角形面積，表三(b)顯示實際值與預測值之最大誤差在 $(i, j)=(3, 7)$ 時為約 10%，此可解釋在時間歷程有較大預測誤差之原因，因為外力預測之最佳化解析在求得設計變數使得目標函數最小化，當有相近之衝擊能量時，也能滿足最佳化目標。

圖 7 為相對於表三懸臂樑受不同衝擊力作用位置時，所預測之作用位置結果，圖中橫座標為懸臂樑分割點號碼，如前述共有 15 點，縱座標為根據式(20)計算之 MAC_{ij} 值，其值範圍在 0 與 1 之間，另外箭頭符號所指之處為實際衝擊力之作用位置，由圖 7

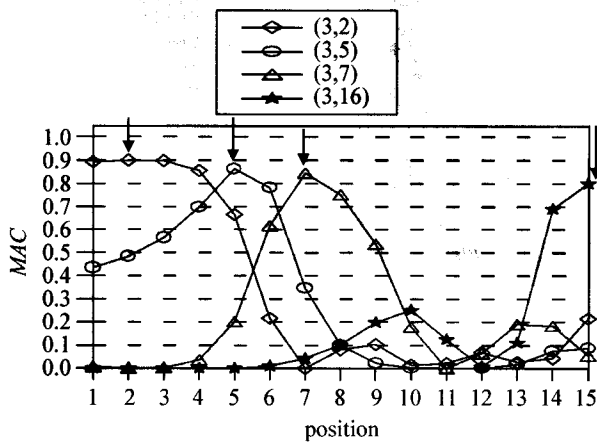


圖 7 組合(I)不同作用力位置於預測外力位置之結果

可觀察得知，四個分析實例在作用位置附近， MAC_{ij} 值明顯接近於 1，都在 0.9 左右，可判斷預測外力位置之正確性，也可看出此外力預測模式在未知衝擊外力作用於不同位置皆能適用。本文之外力預測方法特點，在可同時預測得知作用力位置，以及合理的預測出衝擊力大小與時間歷程範圍。

(二) 不同作用力大小之影響

當以不同大小之衝擊外力作用時，而外力作用在相同位置、在相同的時間歷程與在相同的位置量測結構響應之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。表四(a)及四(b)分別為本狀況預測之外力大小與時間歷程以及其對應之衝擊能量，可以看出所預測的外力大小誤差在 10%以下，而時間歷程就有較大誤差，若由衝擊能量來看，預測誤差則在 10%以下。

(三) 時間歷程改變之影響

當作用力之時間歷程改變，而外力作用在相同位置、外力大小相同、而且在相同的位置量測結構響應之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。表五(a)、五(b)及五(c)分別為外力大小、時間歷程以及其對應之衝擊能量預測結果，可觀察得知外力大小最大誤差為 6.3%，時間歷程 t_2 及 s_2 誤差則較大，然而從衝擊能量來看，除在第 2 個 $(i, j)=(3,2)$ 時為約 23%外，其他三個實例衝擊能量預測誤差均在 7%以下。

(四) 不同量測位置之影響

當量測響應位置不同時，也就是加速度計量測響應位置不同，而在相同的時間歷程、與外力作用在相同位置，但其作用之外力大小不同之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。令外力作用位置固定於分割點 2 之位置，響應量測位置分別於分割點 3、5、7 與 15，時間歷程 $t_2=1(\text{ms})$ 及 $s_2=2(\text{ms})$ 不變，由表六(a)及六(b)可看出，其預測之外力大小

表四 組合(I)不同作用力大小之預測結果

(a) 外力大小與時間歷程

組合 (i,j)	外力大小 F_j (N)			時間歷程： $t_2=1$ (ms), $s_2=2$ (ms)			
	實際值	預測值	誤差 (%)	t_2 預測值	s_2 預測值	t_2 誤差 (%)	s_2 誤差 (%)
(3,2)	3.500	3.721	6.31	0.892	1.823	-10.8	-8.85
(3,2)	5.000	4.755	-4.90	1.262	2.214	26.2	10.7
(15,1)	2.000	1.816	-9.20	1.212	2.275	21.2	13.75
(15,1)	5.000	4.675	-6.50	1.276	1.798	27.6	-10.1

(b) 衝擊能量

組合 (i,j)	實際值	預測值	誤差 (%)
(3,2)	5.25	5.05	-3.79
(3,2)	7.50	8.26	10.19
(15,1)	3.00	3.17	5.54
(15,1)	7.50	7.19	-4.19

表五 組合(I)不同作用力時間歷程之預測結果

(a) 外力大小

組合 (i,j)	外力大小 F_j (N)		
	實際值	預測值	誤差 (%)
(3,2)	3.500	3.721	6.31
(3,2)	3.500	3.850	-1.48
(15,1)	2.000	1.816	-4.02
(15,1)	2.000	2.248	-4.62

(b) 外力時間歷程

組合 (i,j)	時間歷程					
	t_2 實際值	s_2 實際值	t_2 預測值	s_2 預測值	t_2 誤差 (%)	s_2 誤差 (%)
(3,2)	1.0	2.0	0.892	1.823	-10.8	-8.85
(3,2)	0.8	1.2	1.049	1.398	31.13	16.50
(15,1)	1.0	2.0	1.212	2.175	21.20	8.75
(15,1)	1.5	2.5	1.307	2.223	-12.87	-11.08

(c) 衝擊能量

組合 (i,j)	實際值	預測值	誤差 (%)
(3,2)	5.25	5.38	2.49
(3,2)	3.50	4.33	23.70
(15,1)	3.00	2.92	-2.78
(15,1)	4.00	4.28	6.98

表六 組合(I)不同量測響應位置之預測結果

(a) 外力大小與時間歷程

組合 (i, j)	外力大小 F_j (N)			時間歷程： $t_2=1$ (ms), $s_2=2$ (ms)			
	實際 值	預測 值	誤差 (%)	t_2 預 測值	s_2 預 測值	t_2 誤 差(%)	s_2 誤 差(%)
(3,2)	3.500	3.721	6.31	0.892	1.823	-10.8	-8.85
(5,2)	2.500	2.348	-6.08	1.122	1.818	12.2	-9.1
(7,2)	3.000	2.816	-6.13	1.212	1.776	21.2	-11.2
(15,2)	3.500	3.183	-9.06	0.786	1.827	-21.4	-8.65

(b) 衝擊能量

組合(i, j)	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	5.25	5.05	-3.79
(5,2)	3.75	3.45	-7.96
(7,2)	4.50	4.21	-6.51
(15,2)	5.25	4.16	-20.79

在 10%以下，時間歷程最大誤差在 21%左右，而衝擊能量除 $(i, j)=(15,2)$ 誤差約 20%外，其他量測位置點之預測誤差在 8%以下。圖 8 為相對於表六之實際與預測的三角力型式比較圖，實線部分為代表各不同組合的實際值之外力大小與時間歷程，而虛線部分則代表各不同組合的預測值之外力大小與時間歷程，可觀察得知 F_j 、 t_2 及 s_2 預測值與實際值間比例之合理性。

圖 9 為相對於表六在不同量測響應位置所預測外力作用位置之結果，由圖中可看出當量測響應位置離外力作用位置越遠，其預測外力位置之 MAC_{ji} 值有偏小之趨勢，同時就整體而言，還是可由其 15 點之 MAC_{ji} 的相對極大值判斷出其外力作用之位置，由此預測結果顯示此外力預測模式對不同量測響應位置皆能適用。

綜合組合(I)之外力預測模式可行性分析，雖然在時間歷程有較大之預測誤差，但由衝擊能量觀點來看仍吻合其最佳化分析目標，又就作用位置之預測仍能相當明確得到對應之預測，而本文之外力預測方法特點，在可同時預測得知作用力位置，以及合理的預測出衝擊力大小與時間歷程範圍。另就實務之觀點來說，能得到合理之外力峰值範圍及明確之作用位置，對工程應用如檢測評估很有助益。

2. 組合(II)外力預測分析結果

組合(II)主要在探討此外力預測模式於實際應用可行性之實驗驗證，對外力預測之最佳化問題，以理論推導所得之模態參數估算預測響應 $a_i(t)$ 搭配實際實驗量測之結構響應 $\hat{a}_i(t)$ 架構目標函數，來進行外力預測分析。

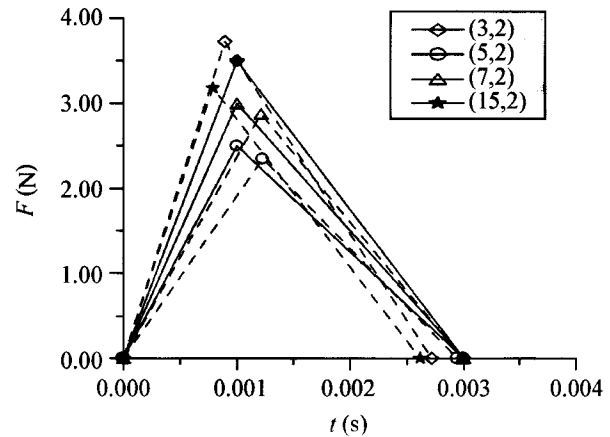


圖 8 組合(I)不同量測響應位置之預測外力

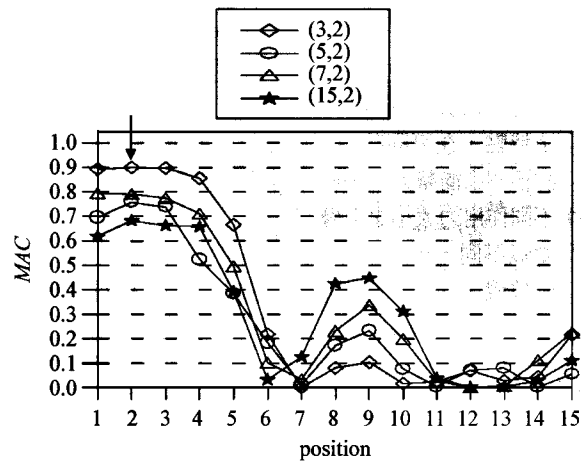


圖 9 組合(I)不同量測響應位置於預測外力位置之結果

(一) 不同作用位置之影響

為探討當外力作用在不同位置之影響，本節將探討外力作用於分割點與非分割點時之影響，同時也探討時間歷程不同時之影響。表七(a)至(c)分別為外力大小、時間歷程以及其對應之衝擊能量預測結果，外力大小最大誤差為 13.3%，時間歷程 t_2 及 s_2 誤差則較大，然而從衝擊能量來看，除在 $(i, j)=(3,2)$ 時為約 25%外，其他三個實例衝擊能量預測誤差均在 8%以下。圖 10 為相對於表七之實際與預測的三角力型式比較圖，可觀察得知 F_j 、 t_2 及 s_2 間比例之合理性。圖 11 則為對應於表七在不同外力作用位置之 MAC_{ji} 結果，由圖中 15 個分割點之 MAC_{ji} 相對極大值可判斷出其外力作用位置，對於外力作用於非分割點，也可觀察出作用力位置之趨勢。

(二) 不同外力大小之影響

以不同大小之外力作用且時間歷程不同，在外力作用在相同位置與相同位置量測結構之響應之條件

表七 組合(II)不同作用力位置之預測結果

(a) 外力大小

組合 (i,j)	外力大小 F_j (N)		
	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	3.420	3.876	13.33
(3,1)	4.610	4.155	-9.87
(3,1.5)	4.710	4.309	-8.51
(3,2.5)	4.860	4.238	-12.80

(b) 外力時間歷程

組合 (i,j)	時間歷程					
	t_2 實 際值	s_2 實 際值	t_2 預 測值	s_2 預 測值	t_2 誤 差(%)	s_2 誤 差(%)
(3,2)	1.465	1.465	1.789	1.076	22.12	-26.55
(3,1)	1.465	0.733	1.536	1.121	4.85	52.93
(3,1.5)	1.465	0.733	1.853	0.923	26.48	25.92
(3,2.5)	1.465	0.733	1.912	0.446	30.51	-39.15

(c) 衝擊能量

組合(i,j)	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	5.01	6.31	25.87
(3,1)	5.07	4.71	-6.96
(3,1.5)	5.18	5.57	7.64
(3,2.5)	5.34	5.60	4.94

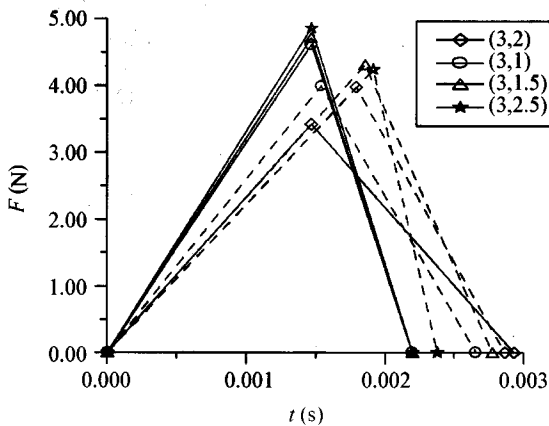


圖 10 組合(II)不同作用力位置之預測外力大小與時間歷程示意圖

下，探討此種狀況下外力預測模式是否能適應。表八(a)至(c)分別為外力大小、時間歷程以及其對應之衝擊能量預測結果，若與組合(I)之預測結果作對應比較可知，組合(II)之預測誤差明顯較高，此可能來自實驗量測之誤差，或者是來自加速度響應之理論預測模式準確性，固然預測之外力大小誤差在 10-

表八 組合(II)不同作用力大小之預測結果

(a) 外力大小

組合 (i,j)	外力大小 F_j (N)		
	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	3.420	3.876	13.33
(3,2)	8.760	7.969	-9.03
(15,1)	3.810	4.464	17.17
(15,1)	7.410	6.729	-9.19

(b) 外力時間歷程

組合 (i,j)	時間歷程					
	t_2 實 際值	s_2 實 際值	t_2 預 測值	s_2 預 測值	t_2 誤 差(%)	s_2 誤 差(%)
(3,2)	1.465	1.465	1.789	1.076	22.12	-26.55
(3,2)	1.465	1.953	1.863	2.128	27.17	8.96
(15,1)	1.465	0.733	1.841	0.931	25.67	27.01
(15,1)	1.465	0.733	1.185	0.629	-19.11	-14.19

(c) 衝擊能量

組合(i,j)	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	5.01	6.31	25.87
(3,2)	14.97	15.20	1.56
(15,1)	4.19	5.75	37.21
(15,1)	8.14	6.45	-20.76

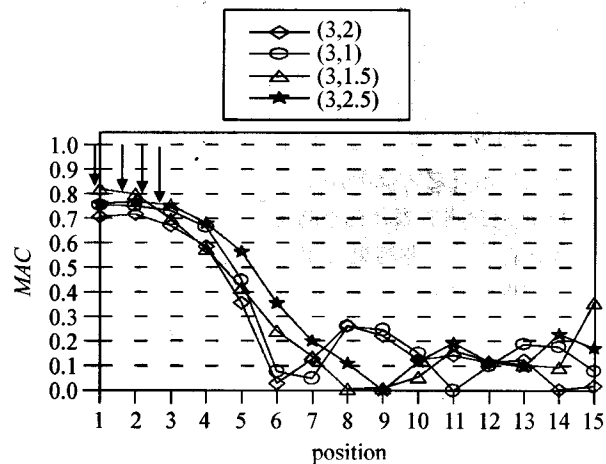


圖 11 組合(II)不同作用力位置於預測外力位置之結果

17%左右，由表八(a)可看出預測之外力大小趨勢之一致性，就衝擊能量而言，也有一定之趨勢。

(三) 量測位置不同之影響

當在不同量測響應位置之條件下，探討在此種狀況下外力預測模式是否能適應。令外力作用位置固定於分割點 2 之位置，量測響應位置分別於分割點第

表九 組合(II)不同量測響應位置之預測結果

(a) 外力大小

組合 (i,j)	外力大小 F_j (N)		
	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	3.420	3.876	13.33
(5,2)	4.100	4.544	10.83
(7,2)	3.140	2.851	-9.20
(15,2)	4.880	4.172	-14.51

(b) 外力時間歷程

組合 (i,j)	時間歷程					
	t_2 實際值	s_2 實際值	t_2 預測值	s_2 預測值	t_2 誤差(%)	s_2 誤差(%)
(3,2)	1.465	1.465	1.789	1.076	22.12	-26.55
(5,2)	1.465	1.465	1.113	1.264	-24.03	-13.72
(7,2)	1.465	1.465	1.271	1.839	-13.24	25.53
(15,2)	1.465	1.953	1.715	1.655	17.06	-15.26

(c) 衝擊能量

組合(i,j)	實際值	預測值	誤差(%)
(3,2)	5.01	6.31	25.87
(5,2)	6.01	5.86	-2.49
(7,2)	4.60	3.90	-15.22
(15,2)	8.34	7.65	-8.26

3、5、7 與 15。表九(a)至(c)分別為外力大小、時間歷程以及其對應之衝擊能量預測結果，圖 12 為相對於表九之實際與預測的三角力型式比較圖，圖 13 則為對應於表九在不同量測響應位置之 MAC_{ji} 結果，綜合此預測結果可知，外力大小之預測趨勢有一定程度之吻合，誤差在 9-15%，時間歷程之預測誤差則較大，但由圖 12 之觀察可得知 F_j 、 t_2 及 s_2 間比例之合理性，衝擊能量最大預測誤差約 25%，其大小趨勢也略呈一致，另外由圖 13 MAC_{ji} 之相對極大值出現位置，可同時預測出相當明確之作用力位置，這也是本文外力預測方法之特點。

綜合組合(II)之實驗驗證分析探討外力預測模式之實用性，可看出預測之外力大小、時間歷程、衝擊能量等，均較組合(I)之預測誤差要大，主要原因可能來自實驗量測之變異性誤差或是理論模型與實體結構間之差異，不過外力預測值之趨勢與實際值有其一定程度之吻合，同時，本文之外力預測方法特點，在可同時預測得知作用力位置，以及合理的預測出衝擊力大小與時間歷程範圍。

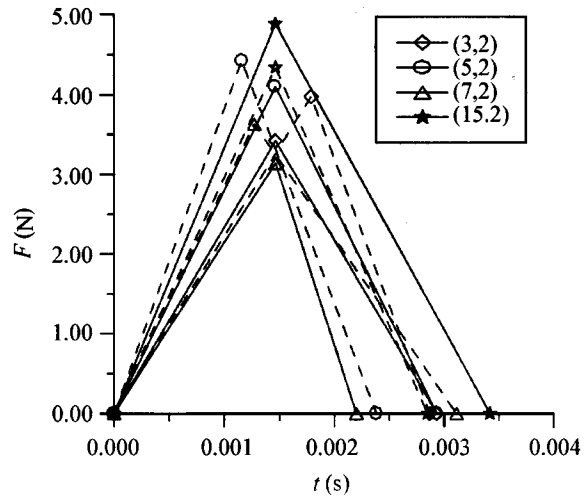


圖 12 組合(II)不同量測響應位置之預測外力大小與時間歷程示意圖

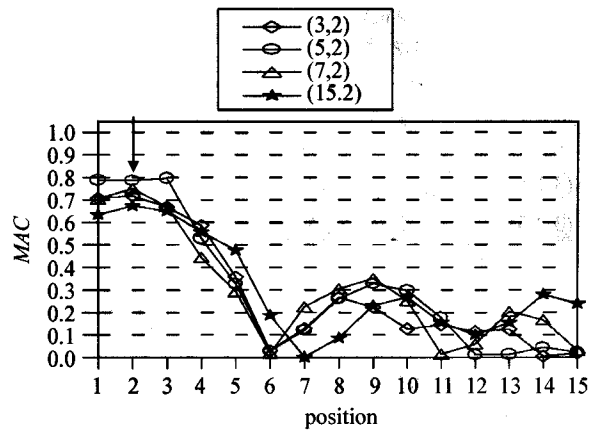


圖 13 組合(II)不同量測響應位置於預測外力位置之結果

六、結論

本文以懸臂樑結構探討其受未知衝擊外力作用時之外力預測，可合理的同時預測出衝擊力大小、時間歷程、及作用力位置。探討兩種組合之外力預測分析，一為數值分析之可行性探討，一則為對實際懸臂樑結構之外力預測實驗驗證，本文主要結論歸納綜合如下：

1. 對衝擊力之大小及時間歷程有合理之預測範圍，由衝擊能量觀點來看已達到外力預測之最佳化分析目標，同時可明確的預測出作用力位置為本文所發展外力預測方法的特點。
2. 就實務之觀點來說，能得到合理之外力峰值範圍及明確之作用位置，對工程應用如結構設計考慮或檢測評估很有助益。

3. 本文以三角力形式模擬衝擊力吻合其實際物理現象，也因此可由加速度響應與模態振型之關係，藉由 MAC_j 之特性判斷作用力位置，此外力預測理念有擴展到其他外力形式之潛力，如改變外力形式為簡諧力，本文推衍之預測方法亦可套用。
4. 本文探討之外力預測係針對懸臂樑結構，不同於吳[1]所考慮之簡支樑，可驗證此預測模式對類似樑結構之適用性。
5. 本文主要之外力預測理念，在求解一最佳化問題，採取或結合其他如遺傳學演算法[11]之最佳化求解工具，將可改善一般最佳化法則於參數設定上之缺點。

誌謝

本研究承蒙國科會計畫支助，計畫編號：NSC89-2212-E-020-009，特此致謝。

符號索引

A_b	懸臂樑之截面積
$a(x,t)$	懸臂樑之側向加速度
$a_i(t)$	理論預測加速度響應
$\hat{a}_i(t)$	實驗量測加速度響應
b_b	懸臂樑之寬度
C_b	懸臂樑之阻尼係數
E_b	懸臂樑之楊氏係數
$F(x,t)$	未知外力
F_j	三角力大小
I_b	懸臂樑之截面慣性矩
L_b	懸臂樑之長度
m	結構進行模態分析之分割點數
MAC	模態保證指標
N_t	時間點數目
Q_t	目標函數
t_b	懸臂樑之厚度
t_2 、 t_3	作用力時間歷程
$w(x,t)$	懸臂樑之側向位移
x_j	作用力位置
x_i	實驗量測加速度響應之位置
$\phi_n(x)$	模態振型
$[\Phi]$	結構模態振型矩陣
v_b	懸臂樑之蒲松比
ρ_b	懸臂樑之密度
ω_{d_n}	阻尼自然頻率
ω_n	自然頻率
ξ_n	懸臂樑之阻尼比

參考文獻

1. 吳建德，智慧型材料結構系統應用於未知衝擊外力之預測，碩士論文，國立屏東科技大學，屏東(1999)。
2. Okubo, N., and Tatsuno, S., "Identification of Force Generated by a Machine under Operation Condition," *Proceedings, 3rd International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, pp. 920-927 (1985).
3. Chang, C., and Sun, C. T., "Determining Transverse Impact Force on a Composite Laminate by Signal Deconvolution," *Experimental Mechanics*, Vol. 29, pp. 414-419 (1989).
4. Wu, E., Yeh, J. C., and Yen, C. S., "Impact on Composite Laminated Plates: An Inverse Method," *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 417-433 (1994).
5. D'Cruz, J., Crisp, J. D. C., and Ryall, T. G., "Determining a Force Acting on a Plate-An Inverse Problem," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 3, pp. 464-470 (1991).
6. Fabunmi, J. A., "Effects of Structural Modes on Vibratory Force Determination by the Pseudoinverse Technique," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 3, pp. 504-509 (1986).
7. Hansen, M., and Starkey, J. M., "On Predicting and Improving the Condition of Modal-Model-Based Indirect Force Measurement Algorithms," *Proceedings, 8th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, Florida, pp. 115-120 (1990).
8. Law, S. S., Chan, T. H. T., and Zeng, Q. H., "Moving Force Identification- A Frequency and Time Domains Analysis," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 121, No. 3, pp. 394-401 (1999).
9. Michaels, J. E., and Pao, Y. H., "Determination of Dynamic Forces from Wave Motion Measurements," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 61-68 (1992).
10. Wu, E., Yen, J. C., and Yen, C. S., "Identification of Impact Forces at Multiple Locations on Laminated Plates," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 12, pp. 2433-2439 (1994).
11. Doyle, J. F., "A Genetic Algorithm for Determining the Location of Structural Impacts," *Experimental Mechanics*, Vol. 34, pp. 37-44 (1994).
12. Wang, B. T., and Chiu, C. H., "Determination of Unknown Impact Force Acting on Arbitrary Structures," *Proceedings, 17th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, Florida, pp. 1653-1659 (1999).
13. 邱俊賢，未知衝擊外力作用於任意結構之預測，碩士論文，國立屏東科技大學，屏東(1998)。
14. Paolo, S. V., and Kenneth, G. M., "Predicting Random

- Excitation Forces from Acceleration Response Measurements," *Proceedings, 15th International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, pp. 1-6 (1997).
15. D'Cruz, J., Crisp, J. D. C., and Ryall, T. G., "On the Identification of a Harmonic Force on a Viscoelastic Plate from Response Data," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 722-729 (1992).
 16. Karlsson, S. E. S., "Identification of External Structural Loads from Measured Harmonic Responses," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 196, No. 3, pp. 59-74 (1996).
 17. Moller, P. W., "Load Identification through Structural Modification," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, No. 3, pp. 236-241 (1999).
 18. Spina, D., and Valente, C., "A Representation of the Harmonic Response in the Complex Plane for Modal Parameter Identification," *Proceedings, 15th International Modal Analysis Conference*, Orlando, Florida, pp. 57-63 (1997).
 19. Verhoeven, J., "Excitation Force Identification of Rotating Machines Using Operational Rotor/Stator Amplitude Data and Analytical Synthesized Transfer Functions," *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, pp. 307-314 (1988).
 20. Meirovich, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York (1967).
 21. Rao, S. S., *Mechanical Vibrations*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company (1990).
 22. 王栢村, 「振動學」, 修訂版, 全華科技圖書公司(1996)。
 23. 陳重彰, 懸臂樑結構系統之未知外力預測, 碩士論文, 國立屏東科技大學, 屏東(2000)。
 24. Ewins, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press LTD., Letchworth Hertfordshire, England (1986).
 25. IMSL Problem-Solving Software System, Math / Library Fortran Subroutines for Mathematical Applications, IMSL, Inc. (1989).

2001年09月24日 收稿

2001年12月21日 初審

2002年01月02日 複審

2002年02月20日 接受