

壓電材料樑之靜態反應分析

王栢村 曾文饒

國立屏東技術學院機械工程技術系

摘 要

本文在探討以有限元素方法分析樑受壓電材料作用之靜態反應。考慮一簡支樑將壓電材料薄片黏貼於樑上下兩面，施以正負相反電壓使樑產生純彎曲之變形，應用有限元素分析法考慮理想黏著及有黏著層之接著方式，分析壓電材料對樑之靜態反應，分析結果與現有理論模式以變形、正向應力、剪應力分佈情形分別作比較，結果發現有限元素分析與理論模式有相當程度之吻合，本文也考慮了理論理想黏著與具黏著效應之差異，本報告驗證了壓電材料應用於樑激振之理論模式，將來可應用於樑或其他結構振動及噪音控制。

關鍵字：壓電材料、樑、有限元素分析。

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STATIC RESPONSE IN A PIEZOCERAMIC EXCITED BEAM

Bor-Tsuen Wang and Wen-Jao Tsen

*Department Of Mechanical Engineering
National Pingtung Polytechnic Institute
Pingtung, Taiwan 912, R.O.C.*

Key Words: piezoceramic, beam, finite element analysis.

ABSTRACT

This paper presents the finite element analysis (FEA) for the static response in a piezoceramic excited beam. A simply-supported beam has the piezoceramic patches attached symmetrically on the top and bottom surfaces of the beam symmetrically. The input voltages are applied to the piezoceramic patches out-of-phase so as to excite the beam. The cases of ideal bonding and adhesive layers between the piezoceramic patches and the beam are considered. The results of finite element analysis are compared with the theoretical solutions in terms of beam deformation, normal stress and shear stress distributions. The results show that both FEA and theoretical analysis match well. Additionally, this work also discusses the effects of ideal bonding and bonding with adhesive layers. This work demonstrates the application of FEA to determine the static response in a piezoceramic excited beam. The analysis technique can also be extended to beam vibration and sound radiation control as well as for other structural applications.

一、前 言

壓電材料本身在高電壓極化後具有良好的壓電特性，當電場施加於壓電材料，電壓與應變有良好的線性關係，

同時材料有變形時，相對地會造成電壓差，因此無論做智慧型材料結構的驅動器或感應器都很合適。

壓電材料作用於結構體當驅動器之理論模式有很多，在此列舉樑、板結構之理論分析。Crawley和de Luis[1]

建立了壓電材料應用於樑之結構振動控制之分析，此模式可應用壓電材料貼在樑之表面或鑲入樑之內部做驅動器，他們亦作了實驗分析比較。Dimitriadis et al.[2]利用應力/應變關係發展了壓電材料黏貼於板之純彎曲變形驅動器應用分析，証明了壓電驅動器在振動控制之可行性。Wang和Rogers[3]應用複合材料理論，推導壓電材料應用於複合材料板及樑之驅動理論分析模式。Clark et al.[4]基本上是運用Dimitriadis et al.[2]之二維板之理論分析基礎，推導一維樑之壓電材料純彎曲驅動理論模式分析。其他有關壓電結構驅動模式，有以彈性力學理論[5-7]或以複合材料板理論[8-10]為基礎之分析模式，所推衍之理論分析固然方便用於振動控制及噪音控制之模擬分析，但其理論之基本假設大多僅考慮理想之黏著狀態並未對黏著層之效應詳加考慮，同時理論分析僅限於簡單之結構，如板或樑。另外，也有諸多有限元素數值分析模式[11-13]，必需推導壓電元素及發展數值解析程式，過程複雜也不易應用。

本文之目的在應用商用有限元素軟體，以熱應變來模擬壓電應變，完全不需推導壓電元素模型，即可以分析壓電材料應用於樑結構之驅動情形，同時考慮具有黏著層情況之驅動反應情形，本文首先探討壓電材料特性、Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]理論模式，再建立有限元素幾何模型及邊界條件之設定，並描述所使用之分析技巧，最後數值分析以變形、正向應力、剪應力之分佈分別與Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]之理論結果做分析比較，同時有限元素分析也考慮具有黏著層效應之結果。比較結果顯示，有限元素分析與理論模式有相當程度之吻合，將來本篇報告所採用之分析技巧可用於其他結構之分析，進而作振動或噪音控制。

二、理論分析

圖1顯示壓電材料黏貼於簡支樑之系統圖，壓電材料片對稱地貼於樑之上下表面施以正負電壓，使其產生彎曲之變形，其相關理論分析有許多，已如前言所述。在此僅摘要說明Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]之理論分析結果，以期與有限元素分析結果作比較。

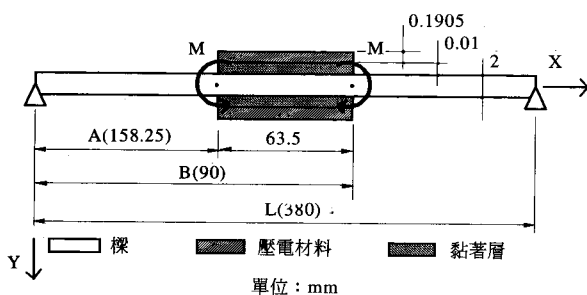


圖1 壓電材料系。

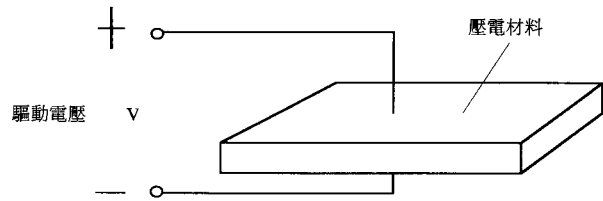


圖2 壓電材料特性。

1. 壓電材料特性：

$$\Lambda = \frac{d_{31}}{t_a} V \quad (1)$$

d_{31} ：壓電常數

Λ ：壓電應變

t_a ：壓電材料厚度

V ：驅動電壓

由式(1)，壓電材料之壓電應變 Λ 與驅動電壓 V 成正比。壓電材料之電壓驅動方式如圖2所示。

2. Wang和Rogers[3]之理論模式：

Wang和Rogers[3]假設在壓電材料之正向應力為均勻分佈，而樑之正向應力為線性分佈，並假設為理想之黏著情況，則壓電材料所產生之彎曲力矩，將集中於壓電材料之兩端，如圖3。所產之彎曲力矩如下：

$$M = \frac{t_b^2 E_b}{6 + \psi} W \Lambda \quad (2)$$

$$\psi = \frac{t_b^2 E_b}{t_a E_a} \quad (3)$$

M ：壓電材料兩端之彎曲力矩

W ：壓電材料寬度

ψ ：壓電材料和樑之物理性質純量比

t ：厚度

E ：楊氏係數

下標

a ：壓電材料

b ：樑

3. Clark et al.[4]之理論模式：

Clark et al.[4]假設在壓電材料之正向應力為線性分佈，而樑正向應力為線性分佈，同樣考慮理想之黏著層，如圖4。壓電材料所產生彎曲力矩，集中於壓電材料兩端，但其所產生之彎曲力矩表示式較為複雜，如下：

$$M = m_z W \quad (4)$$

$$m_z = C_0 \Lambda \quad (5)$$

m_z ：上下層壓電材料每單位寬度對樑所產生彎曲力矩

C_0 ：壓電材料樑之拘束參數

其中 C_0 為樑及壓電材料物理性質之複雜變數，其詳細表示式如[4]。以上之理論分析乃假設壓電材料片作用於無限長之樑結構，與實際系統之結構不相同，有必要進一步以有限元素法分析實際系統之變化情形。

4. 簡支樑受等效彎曲力矩之位移分佈：

當一簡支樑受到如圖1所示之一對彎曲力矩 M 之作用，也就是Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]理論分析壓電材料所產生之等效彎曲力矩，在此彎矩作用下樑位移分析如下：

$$y = \frac{1}{E_b I_b} \left[M(A-B) + \frac{1}{2} \frac{M(B^2 - A^2)}{L} \right] x, \quad x \leq A \quad (6)$$

$$y = \frac{1}{E_b I_b} \left\{ \frac{1}{2} Mx^2 + \left[\frac{1}{2} \frac{M(B^2 - A^2)}{L} \right] x + \frac{1}{2} MA^2 \right\}, \quad A \leq x \leq B \quad (7)$$

$$y = \frac{1}{E_b I_b} \left\{ \frac{M(B^2 - A^2)}{2L} x - \frac{M(B^2 - A^2)}{L} \right\}, \quad x \geq B \quad (8)$$

I ：面積慣性矩
 A, B, L ：如圖1所示

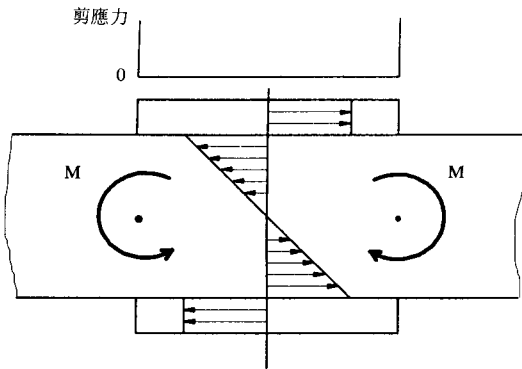


圖3 Wang和Rogers[3]理論正向應力與剪應力。

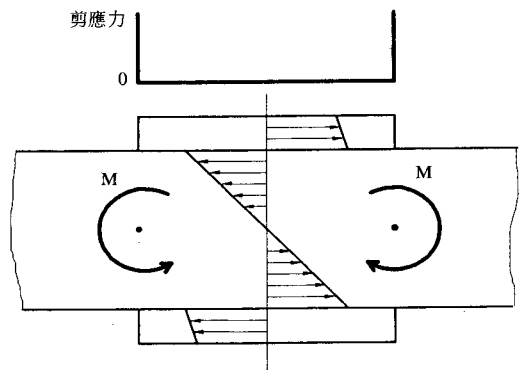


圖4 Clark et al.[4]理論正向應力與剪應力。

表一 元素模型之統計資料

元 素	節 點
樑	320 405
壓電材料	160×2 205×2
黏著層	80×2 123×2
合計	800 897

三、有限元素模型

本節探討簡支樑具有壓電材料之有限元素模型之建立，首先必須架構幾何模型，包括元素之選擇、自由度之選擇、材料幾何性質之設定等，其次設定邊界條件，如位移之限制及受力情形等，由於此分析系統為壓電激振情形，所以分析技巧採用熱膨脹分析方式以模擬壓電驅動效果，以下則針對幾何模型之建立，及邊界條件之設定，熱膨脹分析應用於壓電材料激振之分析技巧。

1. 幾何模型之建立：

本報告考慮理想黏著與有黏著層效應兩種有限元素模型。理想黏著模型中，將壓電材料與樑直接相連，中間無設定黏著層。有黏著層效應模型中，中間設有一厚度為0.01mm之黏著層，在此兩種模型之樑與壓電材料寬皆為40mm，且有相同的邊界條件。

由於所欲分析之系統具對稱性，所以分析時僅取一半之模型即可，可減少元素、節點及其自由度、提高求解速度、節省記憶空間、提高元素之密度、增加準確性。表一顯示，在元素分割上，樑分為兩區域，在壓電材料夾層區域，水平分為40格，垂直分為4層，在非夾層區域水平亦分成40格，垂直亦分成4格，合計320個元素，元素分割情形如圖5。壓電材料之元素分割，上下兩片，每一片，水平為40格，垂直分為4層，合計320個元素。

黏著層之元素分割，上下兩片，每一片，水平為40格，垂直分為2層，合計160個元素。表二顯示所使用之元素種類為STIF42，有4個節點，每個節點有UX、UY兩個自由度，為平面固體四邊形元素。

表三顯示在元素性質上，採用四種材料性質。黏著材料中，楊氏係數取自黏著材料手冊[14]為30N/mm²，卜易松比0.3。樑為鋼質，壓電材料採G-1195[15]。在分析技巧上，採用熱應變分析模擬壓電材料壓電應變，壓電材料之熱膨脹係數取 d_{31}/t ，令系統整體溫度變化值即為驅動電壓值 V 。因系統中，僅有壓電材料會產生壓電應變，而樑及黏著層並無壓電應變，所以假設壓電材料以外之材料熱膨脹係數為零。由於系統溫度變化均為正，所以給予上下層壓電材料之膨脹係數大小相等，正負相反，使其產生與供應正負相反電壓相同之應變效果。

2. 邊界條件之設定：

設定邊界條件主要有位移限制及受力情形或初始溫度，

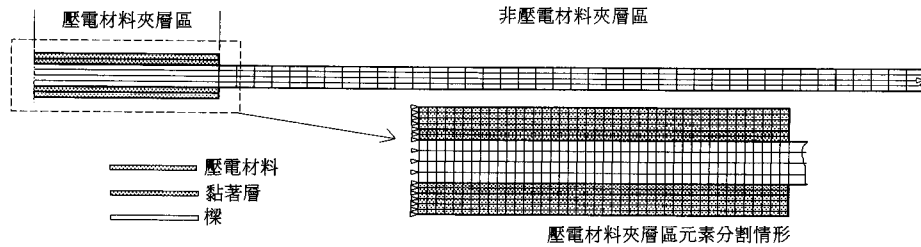


圖 5 壓電材料系統元素分割。

表二 元素種類

元素種類	STIF 42
節點數	4
形狀	二維 固體四邊形
自由度	UX UY

表三 元素性質

	壓電材料 (上層)	黏著層	樑	壓電材料 (下層)
編號	1	2	3	4
EX	6.3E4	30	207E3	6.3E4
ALPX	8.1E-7	0	0	-8.1E-7
NUXY	0.3	0.3	0.3	0.3

註：楊氏系數(EX):N/mm²

熱膨脹係數(ALPX):mm/°C

卜易松比(NUXY)

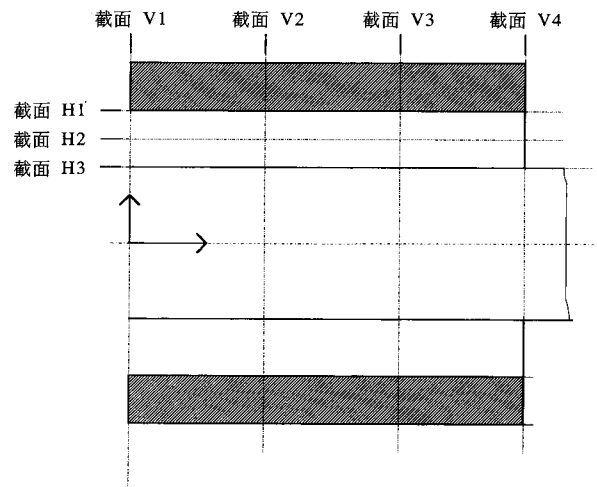


圖 6 截面之定義。

本系統主要有位移限制及溫度變化。

位移限制：考慮簡支樑，所以在樑兩端面之中性軸處的單一節點取位移UX、UY方向拘束。在對稱中心截面處，採取Y方向拘束，使其能產生對稱性之變形，如圖5。

溫度變化：此為模擬壓電材料之電壓變形，初始溫度設定為0°C，最終溫度設定100°C，溫度相差100°C相當於壓電材料受100V電壓。

四、結果與討論

1. 正向應力之比較

在正向應力比較中，以有限元素中的理想與有黏著層效應之模型分別與Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]比較。有限元素的理想黏著與有黏著層效應模型皆取截面V1、V2、V3、V4（如圖6所示），Clark et al.[4]及Wang和Rogers[3]之值皆由理論算出，以實線表示Wang和Rogers[3]之理論假設，虛線表示Clark et al.[4]之理論假設。

在有限元素理想黏著層模型分析，中間並無黏著層，使得在兩材料之接觸面上無理論假設之應力轉向情形，因

為在有限元素中將兩材料視為一體。由圖7中在截面V1、V2、V3之正向應力大小相同，並與Wang和Roger[3]及Clark et al.[4]理論結果相吻合。在V4截面上壓電材料只有約2N/mm²之正向應力存在值略小，此乃由於邊界效應。

在有限元素考慮黏著層效應模型中，在壓電材料與樑之間，設定一層厚度為0.01mm的黏著層，在黏著層上有明顯之應力轉向現象，與Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]理論假設類似。在V1、V2、V3截面之應力大小相同，在樑處呈非線性分佈，此與理論分析假設線性分佈不同，而在V4截面上壓電材料之正向應力幾乎為零，此乃為邊界效應。但在此模型中，在壓電材料與樑之接觸面上，樑之正向應力值小於壓電材料之正向應力值，此與Clark et al.[4]之分析相近。在壓電材料處之正向應力分佈，在理想黏著之有限元素分析呈線性分佈（如圖7），此與Clark et al.[4]之假設相吻合，然而在考慮有黏著層時，壓電材料處之正向應力乃呈現均勻分佈（如圖8），此又與Wang和Rogers[3]之假設相同。

2. 剪應力之比較

圖9顯示剪應力分佈之比較，將有限元素模型中理想黏著與具黏著層效應作比較，以驗證Crawley和de Luis[1]之理論分析，非理想黏著層會減弱由壓電材料傳遞至樑的

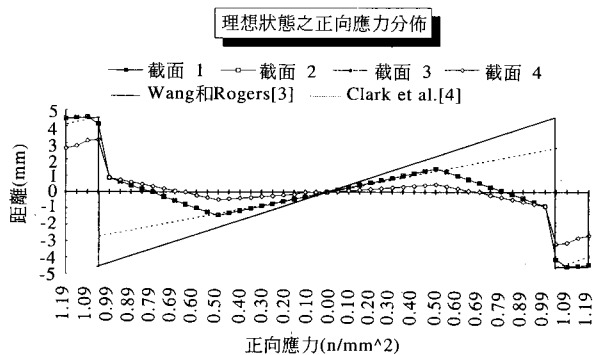


圖 7 理想狀態之正向應力分佈圖。

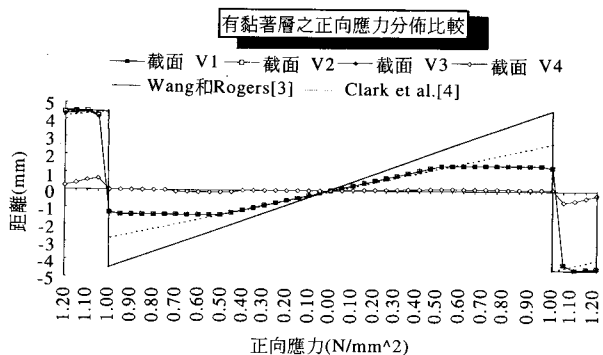


圖 8 樑之正向應力分佈。

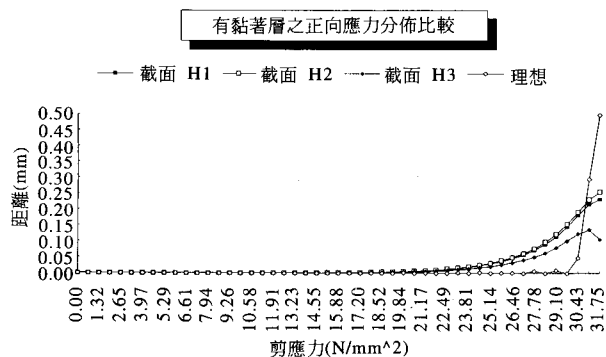


圖 9 理想黏著與黏著層分佈之比較。

剪應力，與Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]理論假設，在理想黏著狀況下，剪應力會集中於壓電材料兩端（如圖3、4上方所示之剪應力分佈）。

由圖9中，在有限元素理想黏著模型之剪應力集中於壓電材料兩端且較大。在有限元素有黏著效應模型中，取截面H1、H2、H3（如圖6）做剪應力比較，發現剪應力由截面H1到H3有減弱且無明顯集中於壓電材料兩端之現象，由Crawley和de Luis[1]理論分析可知，此效應大小與黏著層剛性、厚度有關。

3. 變形之比較

圖10顯示以有限元素理想黏著、有黏著層效應模型與

表四 變形誤差比較

	最大位移	誤差百分比
有限元素理想黏著	0.0755	0
有限元素具黏著效應	0.0698	-7.5%
Wang和Rogers[3]	0.0713	-5.56%
Clark et al.[4]	0.07595	0.6%

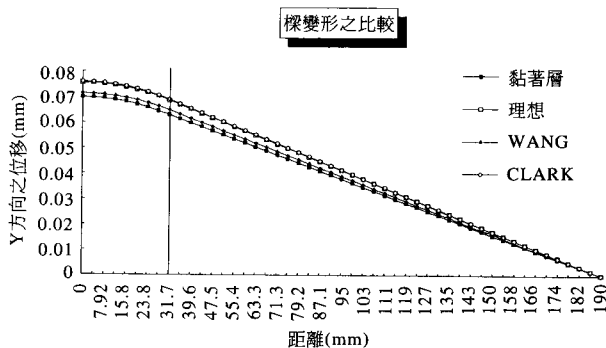


圖 10 樑變形比較。

Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]理論分析之變形比較，有限元素理想黏著模型與Clark et al.[4]理論結果接近，有黏著層效應模型與Wang和Rogers[3]理論接近，同時四種情形都有相同變形趨勢。表四顯示以有限元素理想黏著做基準之變形誤差比較，Clark et al.[4]之結果在變形上僅有0.6%誤差，得知Clark et al.[4]與有限元素理想黏假設非常接近。在有限元素黏著層模型中，有-7.5%之誤差，變形減小，可得証黏著層對壓電材料傳遞至樑之剪力有減弱之作用，而此具黏著層分析之值又與Wang和Rogers[3]之結果較接近。

五、結 論

在此報告中，利用有限元素分析法驗證了Wang和Rogers[3]及Clark et al.[4]在正向應力、黏著層剪應力之假設及靜態變形之比較。初步討論得知黏著層對系統有減小變形、減小由壓電材料傳遞至樑之剪應力、提供正向應力轉向之介面，且初步驗證Crawley和de Luis[1]對黏著層效應之假設。將來能進一步做黏著層厚度、剛性與壓電材料位置、尺寸等對系統之影響分析，做為動態分析之基礎。本報告所採用之分析技術能應用於其他結構分析，也可進一步做振動與噪音控制。

六、參考文獻

1. Crawley, E. F. and J. De Luis, "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures," *American Institute of Aeronautics*

- and Astronautics*, Vol. 25, No. 10, pp. 1373-1385 (1987).
2. Dimitriadis, E. K., C. R. Fuller, and C. A. Rogers, "Piezoelectric Actuators for Distributed Noise and Vibration Excitation of Thin Plates," *Proceeding of ASME Failure Prevention and Reliability Conference*, pp. 223-233 (1989).
 3. Wang, B. T., and C. A. Rogers, "Modeling of Finite-Length Spatially-Distributed Induced Strain Actuators for Laminate Beams and Plates," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 2, No. 1, pp. 39-57 (1991).
 4. Clark, R. L., C. R. Fuller, and A. L. Wicks, "Characterization of Multiple Piezoelectric Actuators for Structural Excitation," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 90, No. 1, pp. 346-357 (1991).
 5. Bailey, T., and J. E. Hubbard, Jr., 1985, "Distributed Piezoelectric Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, pp. 606-610 (1985).
 6. Im, S., and S. N. Alturi, "Effects of a Piezo-Actuator on a Finitely Deformed Beam Subjected to General Loading," *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 27, No. 12, pp. 1801-1807 (1989).
 7. Crawley, E. F., and K. B. Lazarus, "Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates," *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 29, pp. 944-951 (1991).
 8. Wang, B. T., and C. A. Rogers, "Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators," *Journal of Composite Materials*, Vol. 25, pp. 433-452 (1991).
 9. Lee, C. K., "Theory of Laminated Piezoelectric Plates for the Design of Distributed Sensors/Actuators. Part I: Governing Equations and Reciprocal Relationships," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 87, No. 3, pp. 1144-1158 (1990).
 10. Heyliger, P., and D. A. Saravanos, "Exact Free-Vibration Analysis of Laminated Plates with Embedded Piezoelectric Layers," *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 98, No. 3, pp. 1547-1557 (1995).
 11. Tsou, H. S., and C. I. Tseng, "Distributed Vibration control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems: Finite Element Formulation and Application," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 5, No. 3, pp. 215-231 (1991).
 12. Ha, S. K., C. Keilers, and F. K. Chang, "Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators," *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 30, No. 3, pp. 772-780 (1992).
 13. Hwang, W. S., H. C. Park, and W. Hwang, "Vibration Control of a Laminated Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator: Finite Element Formulation and Modal Analysis," *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 4, pp. 317-329 (1993).
 14. Houwink, K., and G. Slomon, *Adhesive and Adhesives*, 2nd Ed., New York, Elsevier Pub. Co., U.S.A., p. 366 (1961).
 15. Piezo System, Piezoelectric Motor/Actuator Kit Manual, Piezo Electric Products, Inc., Cambridge, Maryland, (1987).

84年9月5日收稿

85年3月11日接受